

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ЖУКОВСКОГО В СЛУЧАЕ АЛГЕБРЫ ЛИ $E(2, 1)$

Е. С. Агуреева ¹, В. А. Кибкало ²

В работе изучается осесимметричный аналог интегрируемого случая Жуковского в случае алгебры Ли $e(2, 1)$. Построены бифуркационные диаграммы, существенно зависящие как от постоянных параметров системы, так и от значений функций Казимира — аналогов геометрического интеграла и интеграла площадей. Описано критическое множество системы, проверена невырожденность его точек. Найдены аналоги 3-атомов Фоменко системы и показано, что все они имеют тип прямого произведения двумерной базы на одномерный слой. В системе обнаружены некомпактные некритические бифуркации.

Ключевые слова: интегрируемая система, динамика твердого тела, слоение Лиувилля, псевдоевклидово пространство, случай Жуковского, топологический инвариант, особенность.

We study an axisymmetric analog of the Zhukovsky integrable case for the Lie algebra $e(2, 1)$. Bifurcation diagrams are constructed. They essentially depend both on the constant parameters of the system and on the values of the Casimir functions, which are analogues of the geometric integral and the area integral. The critical set of the system is studied, and the nondegeneracy of its points is checked. Analogues of the Fomenko 3-atoms of the system are determined and it is shown that all of them have the type of direct product of the 2-dimensional base and the 1-dimensional fiber. Non-compact non-critical bifurcations are discovered in the system.

Key words: integrable system, rigid body dynamics, Liouville foliation, pseudo-Euclidean space, Zhukovsky case, topological invariant, singularity.

1. Введение. Топологический подход к изучению гамильтоновых систем был во многом мотивирован идеями С. Смейла [1]. В интегрируемом случае топологическую классификацию интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы и невырожденными особенностями построил А.Т. Фоменко совместно с учениками и соавторами (см., например, [2–4] и монографию [5]).

Фазовое пространство системы при этом расслаивается на совместные поверхности уровня первых интегралов и функций Казимира. Для систем на симплектическом многообразии M^4 это, например, энергия системы H и некоторый первый интеграл K . Если система задавалась на пуассоновом многообразии (например, на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$, изоморфном \mathbb{R}^6), то в качестве $M^4 = M_{a,b}^4$ выбираются симплектические листы скобки Пуассона — совместные уровни ее независимых функций Казимира $f_1 = a$ и $f_2 = b$, являющиеся гладкими 4-мерными симплектическими многообразиями.

¹ Агуреева Екатерина Сергеевна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, email: agureevamath@yandex.ru.

Агуреева Екатерина Сергеевна — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

² Кибкало Владислав Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фонд. и прикл. матем., e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Кибкало Владислав Александрович — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Если все слои слоения Лиувилля компактны, то в прообразе каждого бифуркационного значения набора первых интегралов обязательно есть критические точки этого набора функций. Напомним, что *бифуркационным* называют значение отображения, в прообразе малой окрестности которого слоение не является тривиальным. Из компактности также следует полнота потоков гамильтоновых полей первых интегралов, т.е. их продолжаемость для любого времени $t \in \mathbb{R}$.

При условии невырожденности по Морсу–Ботту критических точек отображения момента на неособом уровне энергии $Q^3 = Q_h^3 = Q_{abh}^3$ в M^4 или \mathbb{R}^6 , в частности при отсутствии в Q^3 положений равновесия системы, топологическим инвариантом системы оказывается граф Роба системы с оснащением. Его ребра, напомним, соответствуют семействам регулярных слоев, а вершины — их бифуркациям. Оснатив каждую вершину графа типом его 3-атома, т.е. классом послыонной гомеоморфности слоения в прообразе малой окрестности вершины, получим инвариант Фоменко (грубую молекулу) системы. Классом послыонной гомеоморфности слоения на всем Q^3 является инвариант Фоменко–Цишанга — молекула с числовыми метками, кодирующими диффеоморфизмы склейки Q^3 по граничным торами 3-атомов.

Многие интегрируемые системы механики, изученные к настоящему моменту топологическими методами [5, 6], удовлетворяют этим условиям: совместный уровень их функций Казимира (геометрического интеграла f_1 и интеграла площадей f_2), энергии H и дополнительного интеграла K компактен. Таковы, например, волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, система Жуковского [7]. Эти системы задаются на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства. На пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ вводится следующая скобка Пуассона, где ε_{ijk} есть знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0.$$

Система на этом пространстве \mathbb{R}^6 , задаваемая гамильтоновым векторным полем — косым градиентом $\text{sgrad } H$, определяется уравнениями Эйлера для гладкой функции H :

$$\dot{J}_i = \{J_i, H\}, \quad \dot{x}_i = \{x_i, H\}.$$

Отметим, что для многих систем на $e(3)$ известны аналоги на алгебрах Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$ (см., например, [8]). Их топологические инварианты также ранее вычислялись (см. работы [9–13]).

Ряд работ был направлен на обобщение топологического подхода на некоторые классы систем с более общими слоениями Лиувилля. Например, они могут содержать некомпактные слои, некритические бифуркации или неполные потоки. Обзор известных результатов о слоениях таких систем недавно был сделан А.Т. Фоменко и Д.А. Федосеевым [14]. Также отметим аналог теоремы Лиувилля для интегрируемой системы с коническими особенностями и неполными потоками [15]. Некомпактные слои и перестройки встречались ранее в системах Соколова на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(3, 1)$, изученных Д.В.Новиковым [10, 16].

В недавних работах С.С. Николаенко [17, 18] были классифицированы особенности систем с одной и двумя степенями свободы соответственно в случае выполнения определенных условий. Отметим также работу В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко [19], где некоторые некомпактные слоения моделировались топологическими бильярдами на неограниченных столах.

В работе [20] А.В. Борисов и И.С. Мамаев рассмотрели следующее преобразование на $\mathbb{C}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$. Оно линейно над \mathbb{C} и меняет знаки некоторых структурных констант скобки Ли–Пуассона, переводя алгебру Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 в алгебру Ли $e(2, 1)$ псевдоортогональной группы:

$$J_j \rightarrow i \cdot J_j, \quad x_j \rightarrow i \cdot x_j \quad \text{для } j = 1, 2; \quad J_3 \rightarrow J_3, \quad x_3 \rightarrow x_3.$$

После такого преобразования пространства \mathbb{R}^6 многие известные классические вещественные интегрируемые системы переходят в новые системы, также интегрируемые и вещественные. Далее будем называть получаемые вещественные системы *псевдоевклидовыми аналогами* соответствующих систем, поскольку \mathbb{R}^6 оснащено структурой алгебры Ли $e(2, 1)$ группы движений пространства R_1^3 с псевдоевклидовым скалярным произведением $g = \text{diag}(1, 1, \sigma)$ для отрицательных σ . Функции Казимира f_1 и f_2 полученной скобки Пуассона будем далее называть геометрическим интегралом и интегралом площадей соответственно:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \quad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b.$$

Ранее В.А.Кибкало изучались псевдоевклидовы аналоги классических волчков [21–23]. Для аналога волчка Ковалевской при ненулевом значении интеграла площадей был получен критерий компактности совместного уровня функций Казимира, гамильтониана и первого интеграла K_{kov} (совпадающего с классическим в силу независимости последнего от переменных J_3, x_3). Также был изучен [22] аналог первого класса Аппельрота — слоение Лиувилля на множестве $K_{\text{kov}} = 0$.

Для псевдоевклидова случая Эйлера задача становится проще в силу малой степени (два, а не четыре, как в случае Ковалевской) интеграла по импульсам J_1, J_2, J_3 , а также независимости интеграла и гамильтониана от координат x_1, x_2, x_3 :

$$H = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} - \frac{J_3^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Для случая особых значений функций Казимира [23], т.е. при $f_1 = a, f_2 = b : a \cdot b = 0$ и $(a, b) \neq (0, 0)$, была построена бифуркационная диаграмма отображения $(K, H) \Sigma$ на плоскости Okh значений интеграла $K = k$ и гамильтониана $H = h$. Были определены классы послойной гомеоморфности особенностей слоения, лежащих в прообразе малых отрезков плоскости Okh , трансверсально пересекающих дуги диаграммы Σ . Результат существенно зависит от того, является ли главный момент инерции A_3 , соответствующий третьей оси, средним или наибольшим/наименьшим из A_1, A_2, A_3 . В последнем случае были вычислены аналоги инварианта Фоменко, т.е. базы слоения с его поднятием вблизи каждой конкретной точки.

Набор аналогов 3-атомов Фоменко, обнаруженных в псевдоевклидовом аналоге волчка Эйлера [23], содержит произведения морсовских 2-атомов типов A, B на окружность S^1 или интервал I , 3-атомы с некомпактными базами (морсовское седло), а также некритические бифуркации. В число последних входят, например, произведения окружности S^1 на перестройку эллипса в гиперболу через параболу или через пару параллельных прямых.

Интегрируемое обобщение случая Эйлера, т.е. тела, закрепленного на шарнире в своем центре масс, было открыто Н.Е. Жуковским (см. [7]). Псевдоевклидов аналог случая Жуковского представляется следующим естественным шагом наших исследований. Его гамильтониан и интеграл являются квадратами и не зависят от x_1, x_2, x_3 , причем интеграл K имеет те же коэффициенты (как квадратичная форма на \mathbb{R}^3), что и функция Казимира f_1 , хотя они зависят от разных наборов переменных в \mathbb{R}^6 . В отличие от системы Эйлера центр квадрики $H = h$ уже не совпадает с центром квадрики $K = k$, что существенно усложняет бифуркационную диаграмму:

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Здесь и далее через H, K будут обозначаться данные функции. В настоящей работе мы рассмотрим главным образом осесимметричный случай, т.е. случай, когда равны моменты инерции $A_1 = A_2$, соответствующие положительному подпространству симметричной билинейной формы g . Компоненты $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ и λ_3 , соответствующие проекциям вектора гиросtatического момента $\bar{\lambda}$ на положительное и отрицательное подпространства формы g , предполагаются ненулевыми. Такая система сохраняет многие нетривиальные топологические свойства общего случая, но допускает явные аналитические выражения для своих особенностей, например координат точки возврата бифуркационной кривой. Последнее позволило проверить параболичность и каспидальность [24] локальной и полулокальной особенностей в прообразе этой точки соответственно [25]. Явная проверка последнего для классической осесимметричной системы дала возможность получить аналогичный вывод для особенности произвольной возмущенной системы, уже не осесимметричной, но близкой к таковой.

2. Слоение отображения (K, H) на пространстве скоростей $\mathbb{R}^3(\bar{J})$. Опишем свойства бифуркационной кривой пары функций H и K псевдоевклидова аналога системы Жуковского как двух квадратик в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3(\bar{J})$.

Утверждение 1. Множество критических точек пары функций H, K в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ является замыканием параметрической кривой $\bar{J}_0(t) = (J_{10}(t), J_{20}(t), J_{30}(t))$ для $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, t \neq 1/A_i$ при $i = 1, 2, 3$:

$$J_{i0}(t) = \frac{\lambda_i}{1 + A_i t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{A_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \bar{J}(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{J}(t) = (0, 0, 0).$$

Образ этого множества на плоскости (h, k) состоит из параметрической кривой $h(t), k(t)$ для $t \neq \{A_1, A_2, A_3\}$ и точки $(h_0, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (h(t), k(t)) = (\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 / A_i, 0)$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{t^2}{2} \left(\frac{A_1 \lambda_1^2}{(1 + A_1 t)^2} + \frac{A_2 \lambda_2^2}{(1 + A_2 t)^2} - \frac{A_3 \lambda_3^2}{(1 + A_3 t)^2} \right), \\ k(t) &= \frac{A_1^2 \lambda_1^2}{(1 + A_1 t)^2} + \frac{A_2^2 \lambda_2^2}{(1 + A_2 t)^2} - \frac{A_3^2 \lambda_3^2}{(1 + A_3 t)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

После параметризации $\tau = 1/t$ в точке $\tau = 0$ кривая является гладкой и касается оси Oh .

Отметим, что из зависимости градиентов функций H и K будет следовать и зависимость их косых градиентов.

Доказательство. 1. Если поверхность $K = k$ является гладкой в точке \bar{J} , то линейная зависимость dH и dK в этой точке равносильна наличию в ней условного экстремума функции H в ограничении на поверхность $K = k$. Поверхности $K = k$ являются гладкими в $R^3(\bar{J})$ как обобщенные гиперboloиды, исключая уровень $k = 0$ и точку $(0, 0, 0)$ на нем.

2. Рассмотрим функцию Лагранжа $L = H + t(K - k)/2$ и найдем ее условные экстремумы:

$$\frac{J_1 - \lambda_1}{A_1} + J_1 t, \quad \frac{J_2 - \lambda_2}{A_2} + J_2 t, \quad -\frac{J_3 - \lambda_3}{A_3} - J_3 t, \quad J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 - k.$$

Если $t = 0$, получаем особую точку в случае $J_i = \lambda_i$, т.е. вершину конуса $H = 0$, в которой $K = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2$. При $t \neq 0$ выразим J_1, J_2, J_3 через t и подставим в $H(\bar{J}), K(\bar{J})$:

$$J_{10}(t) = \frac{\lambda_1}{1 + A_1 t}, \quad J_{20}(t) = \frac{\lambda_2}{1 + A_2 t}, \quad J_{30}(t) = \frac{\lambda_3}{1 + A_3 t}.$$

Пределы $h(t), k(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ равны $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 / (2A_i)$ и 0 соответственно. После параметризации, вычислив производную по τ в нуле, получим $h' = 0, k' \neq 0$. Утверждение доказано. \square

С этого момента будем рассматривать случай осесимметричной задачи: $A_1 = A_2 \neq A_3$. Повороты на угол φ вокруг осей OJ_3 и Ox_3 в трехмерных пространствах $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ и $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ сохраняют псевдоевклидово скалярное произведение и первые интегралы f_1, f_2, H, K .

Лемма 1. Путем замены координат, сохраняющей псевдоевклидово скалярное произведение и значения первых интегралов, гамильтониан осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского, задаваемой условиями $A_1 = A_2 \neq A_3, \lambda_3 \neq 0, \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 0$, приводится к виду $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$, а вторая компонента J_{20} параметрической кривой $\bar{J}_0(t)$ становится нулевой.

Явно проверяется, что поворот на угол $\varphi = \arccos[\lambda_1 / \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}]$ координат J_1, J_2 приводит гамильтониан к требуемому виду. Поскольку при одновременном изменении знаков J_1, x_1, λ_1 или J_3, x_3, λ_3 сохраняются первые интегралы и слоение, то можем принять $\lambda_1 > 0, \lambda_3 > 0$.

Замечание 1. Случай $\lambda_1 \lambda_3 = 0$ и $A_1 = A_3$ приводят к существенному вырождению системы и ее особенностей и поэтому нами не рассматриваются. Также исключим случай $A_1 \lambda_3 = A_3 \lambda_1$, при котором расположение кривой $k(t), h(t)$ на плоскости Okh меняется: при этом точка возврата лежит на оси Oh и касательный вектор направлен вертикально, т.е. точка касания оси Oh совпадает с точкой возврата. Отметим, что и у системы на всем пространстве \mathbb{R}^6 особенности будут устроены иначе.

Введем следующие обозначения:

$$t_{\text{cusp}} = \frac{A_1^{1/3} \lambda_1^{2/3} - A_3^{1/3} \lambda_3^{2/3}}{-A_1^{1/3} A_3 \lambda_1^{2/3} + A_1 A_3^{1/3} \lambda_3^{2/3}}, \quad k_{\text{cusp}} = \frac{A_1^{2/3} A_3^{2/3} (A_1^{4/3} \lambda_1^{2/3} - A_3^{4/3} \lambda_3^{2/3}) (A_3^{2/3} \lambda_1^{2/3} - A_1^{2/3} \lambda_3^{2/3})^2}{(A_1 - A_3)^2}.$$

Утверждение 2. Для псевдоевклидова осесимметричного случая Жуковского

- 1) параметрическая кривая $k(t), h(t)$ не имеет самопересечений;
- 2) при $t \rightarrow -\frac{1}{A_1} \pm 0$ имеем $k(t), h(t) \rightarrow \infty$, а при $t \rightarrow -\frac{1}{A_3} \pm 0$ имеем $k(t), h(t) \rightarrow -\infty$;

3) кривая $k(1/\tau), h(1/\tau)$ пересекает ось Oh в двух точках с координатами $k = 0, h = (\lambda \pm \lambda_3)^2 / (2A_1 - 2A_3)$ и касается ее при $\tau = 0$;

4) кривая $k(t), h(t)$ вблизи точки касания находится по ту же сторону от оси Oh , что и точка возврата $k(t_{\text{cusp}}), h(t_{\text{cusp}})$.

Доказательство. 1) Пусть кривая $(k(t), h(t))$ имеет самопересечение, т.е. для пары значений t и \tilde{t} имеем $k(t) = k(\tilde{t})$ и $h(t) = h(\tilde{t})$. Тогда

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \cdot \frac{A_1}{A_3} = \frac{(2 + A_3\tilde{t} + A_3t)}{(2 + A_1\tilde{t} + A_1t)} \cdot \frac{(1 + A_1t)^2(1 + A_1\tilde{t})^2}{(1 + A_3t)^2(1 + A_3\tilde{t})^2},$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \cdot \frac{A_1}{A_3} = \frac{(1 + A_1t)^2(1 + A_1\tilde{t})^2}{(1 + A_3t)^2(1 + A_3\tilde{t})^2} \cdot \frac{t + \tilde{t} + 2A_3t\tilde{t}}{t + \tilde{t} + 2A_1t\tilde{t}}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $(A_1 - A_3)(t - \tilde{t})^2 = 0$, отсюда следует, что при $A_1 \neq A_3$ точки самопересечения отсутствуют.

2) При замене параметра $\tau = 1/t$ получим

$$k(\tau) = \tau^2 \left(\frac{\lambda^2}{(A_1 + \tau)^2} - \frac{\lambda_3^2}{(A_3 + \tau)^2} \right), \quad h(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1\lambda^2}{(A_1 + \tau)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(A_3 + \tau)^2} \right),$$

причем вектор $(k'(0), h'(0)) = (0, -A_1^2/\lambda_1^2 + A_3^2/\lambda_3^2)$ ненулевой, а значит, параметризация регулярна в окрестности $t = \infty$. Остальные свойства также проверяются явно. \square

Далее считаем, что точка возврата параметрической кривой $k(t), h(t)$ не лежит на оси Ok , также являющейся бифуркационной кривой системы. Множество значений параметров $\lambda_3, \lambda, A_1, A_3$, при которых $k_{\text{cusp}} = 0$, образует пару гиперповерхностей в пространстве параметров \mathbb{R}^4 , т.е. имеет меру нуль в нем. Бифуркация в прообразе общей точки более чем двух гладких дуг бифуркационных кривых зачастую [5] оказывается более вырожденной, чем в случае общего положения. В настоящей работе мы изучим топологию псевдоевклидовой системы Жуковского в случае $k_{\text{cusp}} \neq 0$. Аналогично считаем $A_1 \neq A_3$.

Утверждение 3. 1) Для осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского при условии $\lambda_1 A_3 \neq \lambda_3 A_1, A_1 \neq A_3, \lambda_1 \neq \lambda_3$ слоение пары функций (H, K) на пространстве $\mathbb{R}^3(J)$ в случаях $A_1 > A_3$ и $A_1 < A_3$ устроено одним из четырех способов, различаемых знаком координаты $k = k_{\text{cusp}}$ точки возврата параметрической кривой и знаком разности $A_1 - A_3$, задающим взаимное расположение (выше или ниже по координате h) двух связанных компонент параметрической кривой, одна из которых содержит точку возврата.

2) Пары (h, k) из дополнения к бифуркационной кривой $h(t), k(t)$ являются регулярными, и связным компонентам сопоставлен класс гомеоморфности слоя. Точке гладкой дуги бифуркационной кривой $h(t), k(t)$, отличной от точки возврата при $t = t_{\text{cusp}}$, соответствует морсовский 2-атом A или B , лежащий в прообразе малого отрезка, трансверсально пересекающего кривую в данной точке.

Примеры расположения параметрической кривой на плоскости Okh изображены на рис. 1).

Доказательство. 1. Докажем, что пересечение квадрик $H = h$ и $K = k$ компактно либо пусто. Предположим, что пересечение $H = h$ и $K = k$ некомпактно и непусто. Тогда вне любой окрестности нуля две эти квадрики имеют общую точку. Рассмотрим их как квадрики в $\mathbb{R}P^3$ с однородными координатами $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$, где $J_i = y_i/y_0$ в исходной аффинной карте:

$$\frac{(y_1 - \lambda_1 y_0)^2}{2A_1} + \frac{(y_2 - 0 \cdot y_0)^2}{2A_1} - \frac{(y_3 - \lambda_3 y_0)^2}{2A_3} - h y_0^2 = 0, \quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - k y_0^2 = 0.$$

В точках пересечения какой-то из двух этих квадрик с проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$, задаваемой условием $y_0 = 0$, имеем $y_3 \neq 0$. Иначе в данной точке $y_1^2/A_1 + y_2^2/A_1 = 0$ или $y_1^2 + y_2^2 = 0$, т.е. четверка однородных координат была бы нулевой. Рассмотрим в $\mathbb{R}P^3$ другую аффинную карту $y_3 \neq 0$ с координатами $z_i = y_i/y_3$ для $i = 0, 1, 2$. В окрестности ее точек с координатой $z_0 = 0$ имеем

$$(z_1^2 + z_2^2)/A_1 = 1/A_3, \quad z_1^2 + z_2^2 = 1.$$

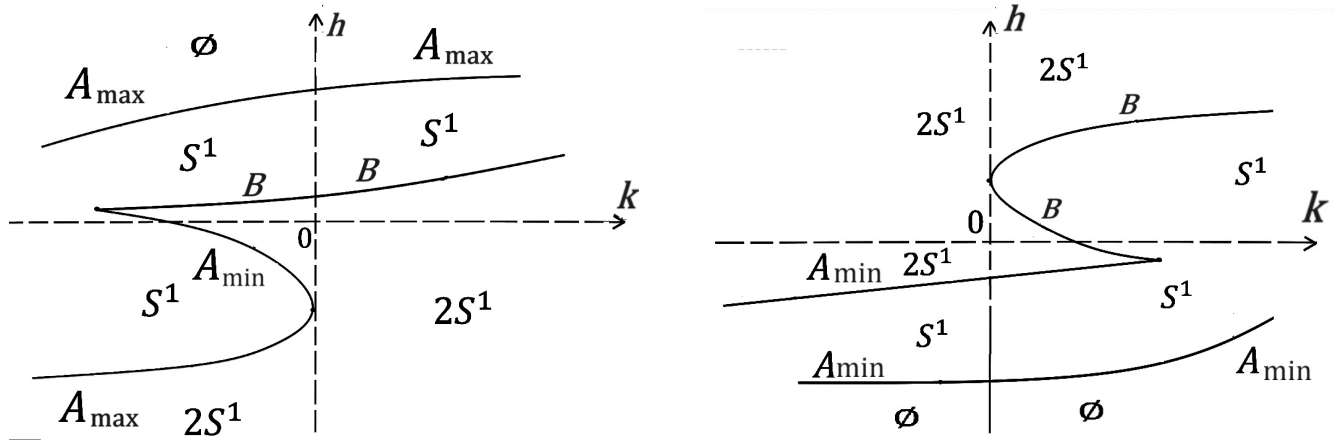


Рис. 1: Бифуркационная кривая $k(t), h(t)$ осесимметричной системы Жуковского на плоскости Okh значений интеграла K и гамильтониана H в случае $A_1 > A_3, k_{\text{cusp}} < 0$ (слева) и $A_1 < A_3, k_{\text{cusp}} > 0$ (справа) с оснащением дуг кривой $k(t), h(t)$ типами 2-атомов B, A_{\min} и A_{\max} .

Данная точка лежит одновременно в аффинной карте с координатами z_i и в проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, задаваемой условием $y_0 = 0$. Тем самым в окрестности проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, дополняющей $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ до $\mathbb{R}P^3$, два обобщенных гиперboloида, отвечающие интегралу и гамильтониану, либо пересекаются по окружности, лежащей в $\mathbb{R}P^2$, либо не имеют общих точек.

Тем самым все перестройки слоения происходят в окрестности слоев, содержащих точки линейной зависимости градиентов H и K .

2. Зафиксируем некоторый уровень $K = k$ и плоскость OJ_1J_3 . В пересечении с ней асимптотические конусы обобщенных гиперboloидов $K = k$ и $H = h$ образуют пару прямых $J_3 = \pm J_1$ для $K = k$ и пару прямых, параллельных $J_3 = \pm J_1 A_3^{1/2} / A_1^{1/2}$, для $H = h$. Отсюда при больших по модулю $h > |h_0|$ и фиксированном k два обобщенных гиперboloида пересекаются (по двум окружностям) тогда и только тогда, когда либо $A_1 > A_3 > 0$ и $h < -|h_0|$, либо $0 < A_1 < A_3$ и $h > |h_0|$. Поскольку все бифуркации слоев возможны только в точках кривой $k(t), h(t)$, то количество связных компонент выше и ниже обеих ветвей этой кривой постоянно.

3. Для проверки невырожденности явно вычислим второй дифференциал функции H при условии $K = k$ в критической точке. Выбрав знак $\delta = 1$ для $J_3 = \delta \sqrt{J_1^2 + J_2^2 - k_{\text{cusp}}}$, получим собственные значения матрицы второго дифференциала, равные $t + 1/A_1$ и $P(t)/(A_1 A_3 \lambda_3^2 (1 + A_1 t)^2)$ для многочлена

$$P(t) = A_1 A_3 (A_3^2 \lambda_1^2 - A_1^2 \lambda_3^2) t^3 + 3A_1 A_3 (A_3 \lambda_1^2 - 3A_1 \lambda_3^2) t^2 + 3A_1 A_3 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) t + A_1 \lambda_1^2 - A_3 \lambda_3^2. \quad (2)$$

Значение $t = t_{\text{cusp}}$ является корнем этого многочлена. Нетрудно проверить, что его значения в нулях его производной имеют одинаковый знак. Отсюда следует, что при $\lambda_1 A_3 \neq \lambda_3 A_1$ он имеет ровно один корень как многочлен третьей степени. Утверждение доказано. \square

3. Слоение Лиувилля системы на $\mathbb{R}^6(\bar{J}, \bar{x})$. Невырожденность критических точек.

Утверждение 4. При фиксированных $(a, b) \neq (0, 0)$ и векторе $\bar{J} = (J_1, J_2, J_3)$ совместный уровень обобщенного гиперboloида $f_1(\bar{x}) = a$ и плоскости $f_2(\bar{x}, \bar{J}) = b$ в $\mathbb{R}^3(\bar{x})$ является плоской квадрикой, тип которой зависит от знаков $f_1 = a, f_2 = b$ и взаимного расположения значений $k, b^2/a$ и 0 при $ab \neq 0$ или знака k при $ab = 0$. Указанная зависимость типа квадрики от значений интегралов приведена в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Совместный уровень функций $f_1(\bar{x}) = a$ и $f_2(\bar{x}) = b$ при фиксированном векторе \bar{J} для разных знаков значений функций Казимира a, b и первого интеграла $K = k$.

a, b	$k_0 \vee k_1$	$k < k_i$	$\min k_i$	$k_i < k < k_i$	$\max k_i$	$k > k_i$
$a > 0, b \neq 0$	$0 < b^2/a$	эллипс	парабола	гипербола	X	гипербола
$a < 0, b \neq 0$	$b^2/a < 0$	мнимый эллипс	пара мнимых пересекающихся прямых	эллипс	парабола	гипербола
$a > 0, b = 0$	$k_i = 0$	эллипс	пара действительных параллельных прямых			гипербола
$a < 0, b = 0$	$k_i = 0$	мнимый эллипс	пара мнимых параллельных прямых			гипербола
$a = 0, b \neq 0$	$k_i = 0$	эллипс	парабола			гипербола

В табл. 1. $\{k_i | i = 0, 1\} = \{0, b^2/a\}$ при $ab \neq 0$. В случае $ab = 0$ считаем $k_0 = k_1 = 0$.

Доказательство. Значению $k = 0$ соответствует плоскость $f_2 = b$, параллельная одной из образующих асимптотического конуса $f_1 = 0$ и содержащая ее при $b = 0$. При $k > 0$ евклидова нормаль к плоскости лежит вне конуса $f_1 = 0$, а при $k < 0$ — внутри его.

Отсюда легко выводятся случаи $a \cdot b = 0$. При $a = 0, b \neq 0$ имеем пересечение конуса и плоскости, не проходящей через его вершину, — знаменитые конические сечения (эллипс, парабола и гипербола). В случаях $b = 0, a \neq 0$ плоскость проходит через вершину конуса. При бифуркационном значении $k_0 = 0$ она содержит образующую конуса и с точностью до поворота вокруг Ox_3 задается уравнением $x_3 = \pm x_1$. Ограничение $f_2 = a$ тогда примет вид $x_2^2 = a$.

В остальных случаях явно вычислим инварианты одномерного пересечения плоскости $f_2 = b$ и обобщенного гиперboloида $f_1 = a$ как квадратики, лежащей в этой плоскости (след и определитель квадратичной формы, определитель расширенной матрицы), и определим тип этой квадратики по вычисленным значениям инвариантов, опираясь на известную аффинную классификацию квадратик. Утверждение доказано. □

Найдем критические точки пары функций K, H на неособых $M_{a,b}^4$ и проверим их невырожденность. Псевдоевклидову и классическому случаям отвечают $\sigma = -1$ и $\sigma = 1$ соответственно. Запишем компоненты $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$:

$$\begin{aligned} \text{sgrad } H : \quad & \frac{\sigma J_3 J_2}{A_1} + \frac{\sigma J_2(\lambda_3 - J_3)}{A_3}, \frac{\sigma J_3(\lambda_1 - J_1)}{A_1} + \frac{\sigma J_1(J_3 - \lambda_3)}{A_3}, \frac{-J_2 \lambda_1}{A_1}, \\ & \frac{\sigma J_2 x_3}{A_1} + \frac{\sigma x_2(\lambda_3 - J_3)}{A_3}, \frac{\sigma x_3(\lambda_1 - J_1)}{A_1} + \frac{\sigma x_1(J_3 - \lambda_3)}{A_3}, \frac{x_2(J_1 - \lambda_1) - J_2 x_1}{A_1}, \\ \text{sgrad } K : \quad & 0, 0, 0, -2J_3 x_2 \sigma + 2J_2 x_3 \sigma, 2(J_3 x_1 - J_1 x_3) \sigma, -2J_2 x_1 + 2J_1 x_2. \end{aligned}$$

Утверждение 5. 1) Множество критических точек отображения момента (K, H) псевдоевклидовой осесимметричной системы Жуковского лежит в объединении следующих семейств:

- (1.1): $\bar{J} = \bar{J}_0(t)$ для $t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$;
- (1.2): $J_3 x_1 = J_1 x_3, J_2 x_1 = 2J_1 x_2$, где $\bar{J} \neq 0$;
- (1.3): $\bar{J} = 0, \bar{x} \in \mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$.

2) Множество точек ранга 0 (равновесий) системы состоит из следующих точек:

- (0.1): $\bar{J} = \bar{J}_0, x_2 = 0, x_3 = x_1 \frac{\lambda_3(1 + A_1 t)}{\lambda_1(1 + A_3 t)}$, где $t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$;
- (0.2): $\bar{J} = 0, x_2 = 0, x_3 = x_1 \frac{\lambda_3 A_1}{\lambda_1 A_3}$.

Доказательство. В критической точке или $\text{sgrad } K = 0$, или существует точка $\mu \in \mathbb{R}$, такая, что $\text{sgrad } H + \mu \text{sgrad } K = 0$.

1) В первом случае получаем семейство (1.2), которое подразбивается на следующие. В случае $J_3 \neq 0$ имеем $x_1 = J_1 x_3 / J_3, x_2 = J_2 x_3 / J_3$. Эти точки принадлежат прямой $k = b^2/a$. Нетривиальные собственные значения линеаризации A_K поля $\text{sgrad } K$ равны $\pm i \sqrt{\sigma(J_1^2 + J_2^2 \sigma J_3^2)}$, т.е. при $\sigma = -1$ они отличны от нуля, если $k \neq 0$, и соответствуют боттовской эллиптической или седловой орбите в случаях $k = b^2/a < 0$ и $k = b^2/a > 0$.

В случае $J_3 = 0, (J_1, J_2) \neq (0, 0)$ имеем $\text{sgrad } K = 0$ при $x_3 = 0, x_1 = \mu J_1, x_2 = \mu J_2$. Тогда $k \geq 0, a \geq 0, b \geq 0$, причем равенство нулю достигается одновременно, т.е. точка попадает на вырожденный уровень $a = b = 0$. Нетривиальные собственные значения A_K равны $\pm \sqrt{(-\sigma)(J_1^2 + J_2^2)}$. При $\sigma = -1$ они действительны и отвечают боттовской седловой орбите.

Точки семейства (1.3), где $\bar{J} = (0, 0, 0)$, попадают на особые слои слоения Лиувилля: при $b = 0$ они лежат в прообразе точки касания бифуркационной кривой и оси Oh . Этот прообраз устроен "сложно": над точкой $\bar{J} = (0, 0, 0)$ в $\mathbb{R}^3(\bar{x})$ находится двумерное множество $f_1 = a$, а над остальными точками пересечения конуса $K = 0$ и гиперboloида $H = h_0$ (проходящего через вершину конуса) лежат пересечения гиперboloида $f_1(\bar{x}) = a$ и плоскости $f_2(\bar{x}) = 0$.

Если при этом $x_2 = 0, x_3 = x_1 \lambda_1^{-1} \lambda_3 A_1 A_3^{-1}$, то точка имеет ранг 0, т.е. $\text{sgrad } H = 0$. Эти точки вырождены: при произвольных ψ, φ оператор линеаризации $\psi A_H + \varphi A_K$ имеет две пары одинаковых собственных значений $\pm \sqrt{-A_3^2 \lambda_1^2 \sigma - A_1^2 \lambda_3^2 \sigma^2} / (A_1 A_3)$, а не четыре попарно различных.

Необходимым условием для $\text{sgrad } H + \mu \text{sgrad } K = 0$ является равенство нулю трех первых компонент $\text{sgrad } H$, соответствующих J_1, J_2, J_3 . Нетрудно видеть, что тогда либо $\bar{J} = (0, 0, 0)$, либо $\bar{J} = \bar{J}_0(t)$ для произвольного $t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$. Первый случай разобран выше, а другому отвечает семейство (1.1). В его точках пара собственных значений линеаризации векторного поля $\text{sgrad } H + (t/2) \text{sgrad } K = 0$ обращается в нуль при тех же значениях параметра t , что и многочлен (2), который встречался ранее при проверке морсовости критических точек функции H на поверхности уровня $K = k$. Найденные собственные значения противоположны по знаку и имеют вид: $\pm \sqrt{P(t)} / (A_1(1 + A_3 t) \sqrt{A_3(1 + A_1 t)})$, где многочлен $P(t)$ имеет вид (2). При $t = t_{\text{cusp}}$ или $t = \pm \infty$ (если $A_1 \lambda_3 = A_3 \lambda_1$) $P(t)$ обращается в нуль. Если $A_3 \lambda_1 \neq A_1 \lambda_3$, то степень многочлена равна трем, и он имеет ровно один корень $t = t_{\text{cusp}}$, поскольку принимает значения одного знака в нулях своей производной.

2) Точки ранга 0 возникают при $x_2 = 0, x_3 = x_1 \lambda_1^{-1} \lambda_3 (1 + A_1 t)(1 + A_3 t)^{-1}$ для $t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$. Одна из пар собственных значений линеаризации $\text{sgrad } H + \varphi \text{sgrad } K$ совпадает с описанной выше в этом же пункте, а вторая пара имеет вид дроби со знаменателем $(1 + A_1 t)(1 + A_3 t)$ и числителем $\pm (t - 2\varphi) \sqrt{\lambda_1^2 (1 + A_3 t)^2 + \lambda_3^2 (1 + A_1 t)^2 \sigma}$. При $\sigma = -1$ подкоренное выражение обращается в нуль только в точках, лежащих на уровне $a = b = 0$. \square

4. Основные результаты: бифуркационные диаграммы и аналоги 3-атомов. Основным результатом настоящей работы является описание бифуркационных диаграмм $\Sigma = \Sigma_{a,b}$ отображения $(K, H) : M_{a,b}^4 \rightarrow Okh$ при различных $(a, b) \neq (0, 0)$, а также нахождение аналогов 3-атомов для данной системы, т.е. изучение типов бифуркаций слоения Лиувилля, отвечающих прообразам гладких дуг Σ . Бифуркационные диаграммы $\Sigma_{a,b}$ приедены на рис. 2 и 3 в случаях $a \cdot b \neq 0$ и $a \cdot b = 0$ соответственно.

Бифуркационная диаграмма $\Sigma = \Sigma_{a,b}$ содержится в объединении бифуркационных кривых: параметрической кривой $k(t), h(t)$ и двух прямых $k = 0, k = b^2/a$ при $ab \neq 0$ или одной прямой $k = 0$ при $ab = 0$. Дуги бифуркационных кривых, входящие в $\Sigma_{a,b}$, отмечены сплошными линиями, а не входящие — штриховыми. Прообраз окрестности точки штриховой линии пуст. При зафиксированных (a, b) бифуркационные кривые делят образ отображения (K, H) на несколько открытых камер (в их прообразах слоение регулярно), занумерованных числами от 1 до 13. На рис. 2 и рис. 3 номер каждой камеры с непустым слоем слоения Лиувилля обведен кружком.

Будем говорить о семействе дуг при разных a, b и обозначать эти дуги диаграмм $\Sigma_{a,b}$ одинаково, если дуги лежат на одной и той же кривой, разделяют одни и те же камеры и получаются друг из друга при непрерывном изменении $a(s), b(s)$ параметров системы. Семейства дуг бифуркационной диаграммы, лежащие на одной и той же (максимальной по включению) гладкой дуге бифуркационной кривой, обозначены одинаковыми буквами $\gamma, \delta, \varphi, \rho, \psi$. Внутри каждого класса семейства дуг различаются числовым индексом.

При $ab \neq 0$ возникают шесть разных случаев, отличающихся взаимным расположением чисел $0, a, a_0 = b^2/k_{\text{cusp}}$ на числовой прямой и знаком k_{cusp} . При $ab = 0$ также возникает шесть случаев, различаемых выбором знака $k_{\text{cusp}} \neq 0$ и возможными парами знаков значений функций Казимира $b \neq 0, a = 0$ и два случая $b = 0$, различающиеся знаком a . Напомним, что случай $a = 0, b = 0$ не рассматривается.

В табл. 2 перечислим дуги, в каждом из шести типов пар a, b входящие в диаграмму независимо от знака $k_{\text{cusp}} \in \mathbb{R}$. В табл. 3 перечислим остальные дуги, возникающие для систем с $k_{\text{cusp}} > 0$, а в табл. 4 — для систем $k_{\text{cusp}} < 0$. Для каждой дуги укажем обозначение, номера пары разде-

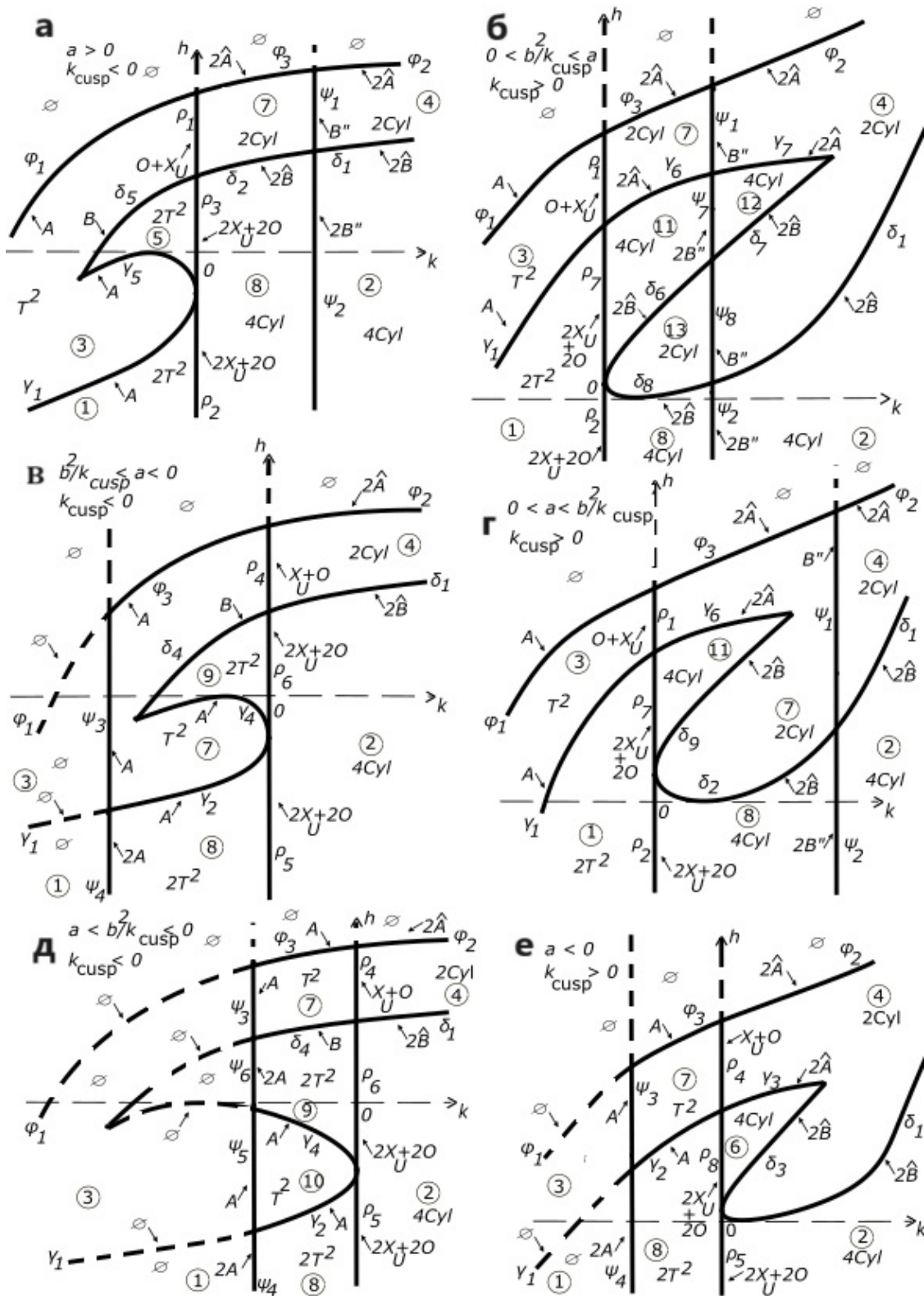


Рис. 2: Бифуркационные диаграммы отображения (K, H) в случае $ab \neq 0, k_{\text{cusp}} \neq 0$ и $k_{\text{cusp}} \neq b^2/a$: а — $k_{\text{cusp}} < 0, a > 0$, б — $k_{\text{cusp}} > 0, b^2/k_{\text{cusp}} < a < 0$, в — $k_{\text{cusp}} < 0, b^2/k_{\text{cusp}} < a < 0$, г — $k_{\text{cusp}} > 0, 0 < a < b^2/k_{\text{cusp}}$, д — $k_{\text{cusp}} < 0, a < b^2/k_{\text{cusp}} < 0$, е — $k_{\text{cusp}} > 0, a < 0$

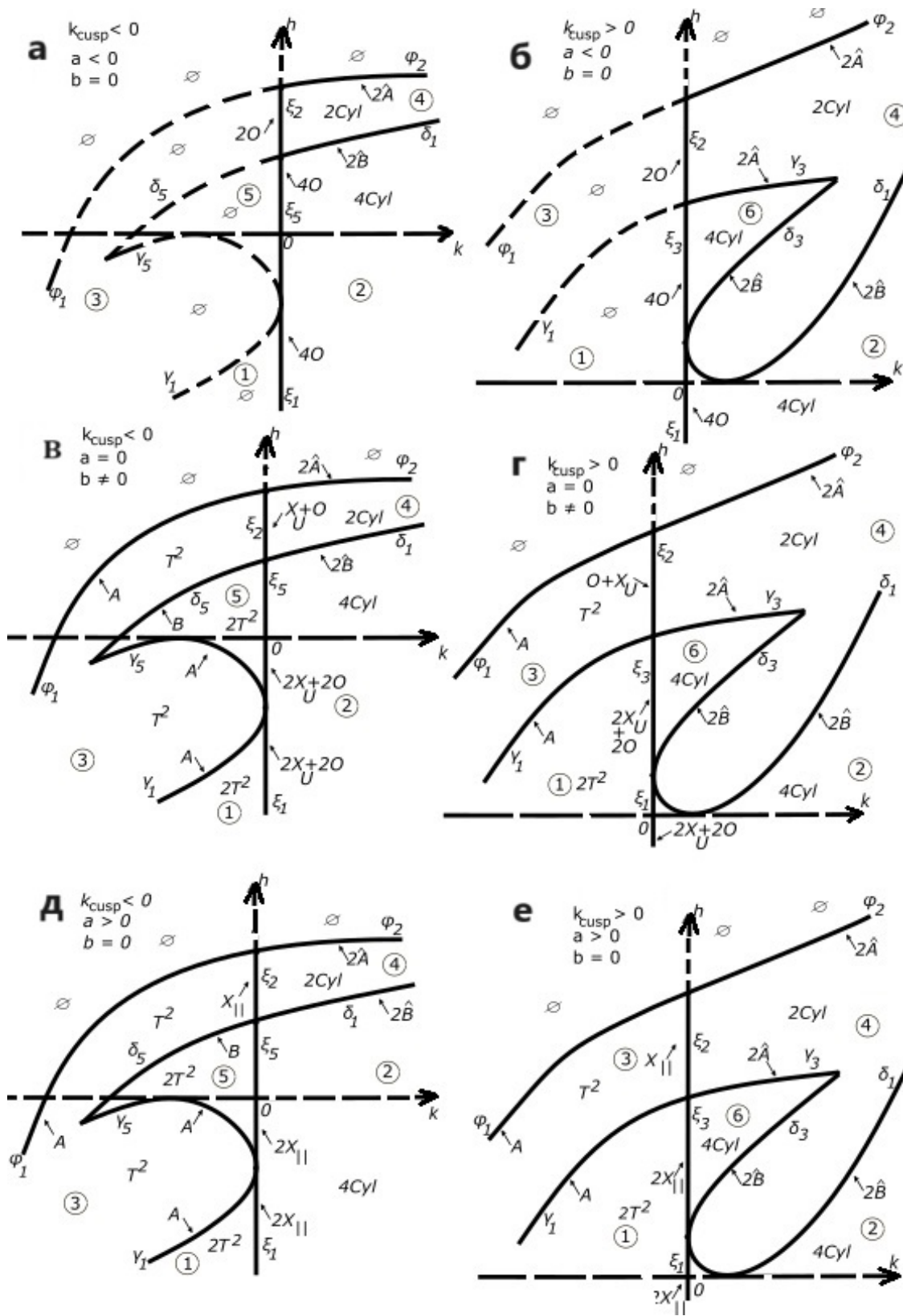


Рис. 3: Бифуркационные диаграммы отображения (K, H) в случае $ab = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$ и $k_{cusp} \neq 0$: а — $k_{cusp} < 0, a < 0, b = 0$, б — $k_{cusp} > 0, a < 0, b = 0$, в — $k_{cusp} < 0, a = 0, b \neq 0$, г — $k_{cusp} > 0, a = 0, b \neq 0$, д — $k_{cusp} < 0, a > 0, b = 0$, е — $k_{cusp} > 0, a > 0, b = 0$

ляемых ею камер и типы особенностей в прообразе малого отрезка, трансверсального этой дуге. Последний считаем вертикальным для дуг параметрической кривой $k(t, h(t))$ и горизонтальным для дуг прямой $k = b^2/a$ или $k = 0$. Функция H или функция K вдоль него возрастает. Отметим разницу в обозначении гиперболы — пересечения гиперboloида $f_1 = a$ и плоскости $f_2 = b$. Символ \asymp обозначает гиперболу, обе асимптоты которой имеют вдали от центра одинаковый знак J_3 , а символом $)$ — гиперболу, у которой обе ветви однозначно проецируются на ось OJ_3 .

Мы подробно опишем случай $A_1 > A_3$. В случае $A_1 < A_3$ бифуркационная диаграмма и типы особенностей находятся аналогично. Напомним, что при $A_1 \neq A_3$ и $A_1\lambda_3 \neq A_3\lambda_1$ знак $k_{\text{cusp}} = k(t_{\text{cusp}})$ совпадает со знаком $A_1^{4/3}\lambda_1^{2/3} - A_3^{4/3}\lambda_3^{2/3}$.

Теорема 1. Пусть $A_1 > A_3 > 0$, $\lambda_1\lambda_3 \neq 0$ и $\lambda_1A_3 \neq \lambda_3A_1$, т.е. $k_{\text{cusp}} \neq 0$. Зафиксируем совместный уровень функций Казимира $M_{a,b}^4 : f_1 = a, f_2 = b$, где $(a, b) \neq (0, 0)$ и $b^2/a \neq k_{\text{cusp}}$.

1) Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{a,b}$ отображения момента $(K, H) : M_{a,b}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h)$ содержится в объединении кривой $k(t), h(t)$ с прямыми $k = b^2/a$ и $k = 0$ в случае $ab \neq 0$ или с прямой $k = 0$ иначе.

2) В зависимости от знака k_{cusp} и значений a, b имеется 12 разных типов совместных уровней $M_{a,b}^4$, а именно для двух уровней (a, b) и (a', b') разных типов нельзя построить отображение плоскости Okh в себя, переводящее гладкие дуги диаграммы $\Sigma_{a,b}$ в гладкие дуги $\Sigma_{a',b'}$ и сохраняющее оснащение дуг 3-атомами. На рис. 2 и 3 изображены бифуркационные диаграммы и типы особенностей в шести случаях $ab \neq 0$ и шести случаях $ab = 0$ соответственно, а на рис. 4 — базы (2-атомы) для 3-атомов, отвечающих дугам Σ .

Т а б л и ц а 2

Аналоги 3-атомов для дуг, входящих в Σ при $ab = 0$.

Дуга	Пара камер и знак k_{cusp}	Компонента в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$	$a > 0$ $b \neq 0$	$a < 0$ $b \neq 0$	$a > 0$ $b = 0$	$a < 0$ $b = 0$	$a = 0$ $b \neq 0$
ϕ_1	$3 \rightarrow \emptyset$	A	$A \times)$	\emptyset	$A \times S^1$	\emptyset	$A \times S^1$
ϕ_2	$4 \rightarrow \emptyset$	A	$A \times \asymp$	$A \times S^1$	$A \times \asymp$	$A \times \asymp$	$A \times \asymp$
δ_1	$2 \rightarrow 4$	B	$B \times \asymp$	$B \times S^1$	$B \times \asymp$	$B \times \asymp$	$B \times \asymp$
γ_1	$1 \rightarrow 3$	A	$A \times)$	\emptyset	$A \times S^1$	\emptyset	$A \times S^1$
γ_3	$k_{\text{cusp}} > 0,$ $6 \rightarrow 4$	A	\emptyset	$A \times \asymp$	$A \times)$	$A \times)$	$A \times)$
γ_5	$k_{\text{cusp}} < 0,$ $3 \rightarrow 5$	A	$A \times S^1$	\emptyset	$A \times S^1$	\emptyset	$A \times S^1$
δ_3	$k_{\text{cusp}} > 0,$ $4 \rightarrow 6,$	B	$B \times)$	\emptyset	$B \times)$	$B \times)$	$B \times)$
δ_5	$k_{\text{cusp}} < 0,$ $5 \rightarrow 3$	B	$B \times S^1$	\emptyset	$B \times S^1$	$B \times S^1$	$B \times S^1$
ξ_1	$1 \rightarrow 2$	S^1	\emptyset	\emptyset	$2S^1 \times X_{ }$	$2S^1 \times 2O$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$
ξ_2	$3 \rightarrow 4$	S^1	\emptyset	\emptyset	$S^1 \times X_{ }$	$S^1 \times 2O$	$S^1 \times (X_U + O_2)$
ξ_3	$k_{\text{cusp}} > 0,$ $1 \rightarrow 6$	$2S^1$	\emptyset	\emptyset	$2S^1 \times X_{ }$	$2S^1 \times 2O_2$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$
ξ_5	$k_{\text{cusp}} < 0,$ $5 \rightarrow 2$	$2S^1$	\emptyset	\emptyset	$2S^1 \times X_{ }$	$2S^1 \times 2O_2$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$

Т а б л и ц а 3

Случай $k_{\text{cusp}} > 0$: аналоги 3-атомов для дуг, входящих в бифуркационную диаграмму Σ при некоторых значениях $(a, b) \neq (0, 0)$.

Дуга	Пара камер	Компонента в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$	$a < 0, b \neq 0$	$a > a_0, b \neq 0$	$0 < a < a_0, b \neq 0$
γ_2	$8 \rightarrow 7$	A	$A \times S^1$	\emptyset	\emptyset
γ_6	$11 \rightarrow 7$	A	\emptyset	$A \times \asymp$	$A \times \asymp$
γ_7	$12 \rightarrow 4$	A	\emptyset	$A \times)$	\emptyset
δ_2	$8 \rightarrow 7$	B	\emptyset	\emptyset	$B \times \asymp$
δ_6	$13 \rightarrow 11$	B	\emptyset	$B \times \asymp$	\emptyset
δ_7	$4 \rightarrow 12$	B	\emptyset	$B \times)$	\emptyset
δ_8	$8 \rightarrow 13$	B	\emptyset	$B \times \asymp$	\emptyset
δ_9	$7 \rightarrow 11$	B	\emptyset	\emptyset	$B \times \asymp$
ρ_1	$3 \rightarrow 7$	S^1	\emptyset	$S^1 \times (X_U + O_2)$	$S^1 \times (X_U + O_2)$
ρ_2	$1 \rightarrow 8$	$2S^1$	\emptyset	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$
ρ_4	$7 \rightarrow 4$	S^1	$S^1 \times (X_U + O_2)$	\emptyset	\emptyset
ρ_5	$8 \rightarrow 2$	$2S^1$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	\emptyset	\emptyset
ρ_7	$1 \rightarrow 11$	$2S^1$	\emptyset	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$
ρ_8	$8 \rightarrow 6$	$2S^1$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	\emptyset	\emptyset
ϕ_3	$7 \rightarrow \emptyset$	A	$A \times S^1$	$A \times \asymp$	$A \times \asymp$
ψ_1	$7 \rightarrow 4$	S^1	\emptyset	$S^1 \times B''$	$S^1 \times B''$
ψ_2	$8 \rightarrow 2$	$2S^1$	\emptyset	$2S^1 \times B$	$2S^1 \times B$
ψ_3	$3 \rightarrow 7$	S^1	$S^1 \times A$	\emptyset	\emptyset
ψ_4	$1 \rightarrow 8$	$2S^1$	$2S^1 \times A$	\emptyset	\emptyset
ψ_7	$11 \rightarrow 12$	$2S^1$	\emptyset	$2S^1 \times B$	\emptyset
ψ_8	$13 \rightarrow 4$	S^1	\emptyset	$S^1 \times B$	\emptyset

Т а б л и ц а 4

Случай $k_{\text{cusp}} < 0$: аналоги 3-атомов для дуг, входящих в бифуркационную диаграмму Σ при некоторых значениях $(a, b) \neq (0, 0)$.

Дуга	Пара камер	Компонента в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$	$a_0 < a < 0, b \neq 0$	$a < a_0, b \neq 0$	$a > 0, b \neq 0$
γ_2	$8 \rightarrow 7$	A	$A \times S^1$	\emptyset	\emptyset
γ_4	$7 \rightarrow 9$	A	$A \times S^1$	\emptyset	\emptyset
δ_2	$8 \rightarrow 7$	B	\emptyset	\emptyset	$B \times \asymp$
δ_4	$9 \rightarrow 7$	B	$B \times S^1$	$B \times S^1$	\emptyset
ρ_1	$3 \rightarrow 7$	S^1	\emptyset	\emptyset	$S^1 \times (X_U + O_2)$
ρ_2	$1 \rightarrow 8$	$2S^1$	\emptyset	\emptyset	$2S^1 \times (X_U + O_2)$
ρ_3	$5 \rightarrow 8$	$2S^1$	\emptyset	\emptyset	$2S^1 \times (X_U + O_2)$
ρ_4	$7 \rightarrow 4$	S^1	$S^1 \times (X_U + O_2)$	$S^1 \times (X_U + O_2)$	\emptyset
ρ_5	$8 \rightarrow 2$	$2S^1$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	\emptyset
ρ_6	$9 \rightarrow 2$	$2S^1$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	$2S^1 \times (X_U + O_2)$	\emptyset
ϕ_3	$7 \rightarrow \emptyset$	A	$A \times S^1$	$A \times S^1$	$A \times \asymp$
ψ_1	$7 \rightarrow 4$	S^1	\emptyset	\emptyset	$S^1 \times B$
ψ_2	$8 \rightarrow 2$	$2S^1$	\emptyset	\emptyset	$2S^1 \times B$
ψ_3	$3 \rightarrow 7$	S^1	$S^1 \times A$	$S^1 \times A$	\emptyset
ψ_4	$1 \rightarrow 8$	$2S^1$	$2S^1 \times A$	$2S^1 \times A$	\emptyset
ψ_5	$3 \rightarrow 10$	S^1	\emptyset	$S^1 \times A$	\emptyset
ψ_6	$\emptyset \rightarrow 9$	$2S^1$	\emptyset	$2S^1 \times A$	\emptyset

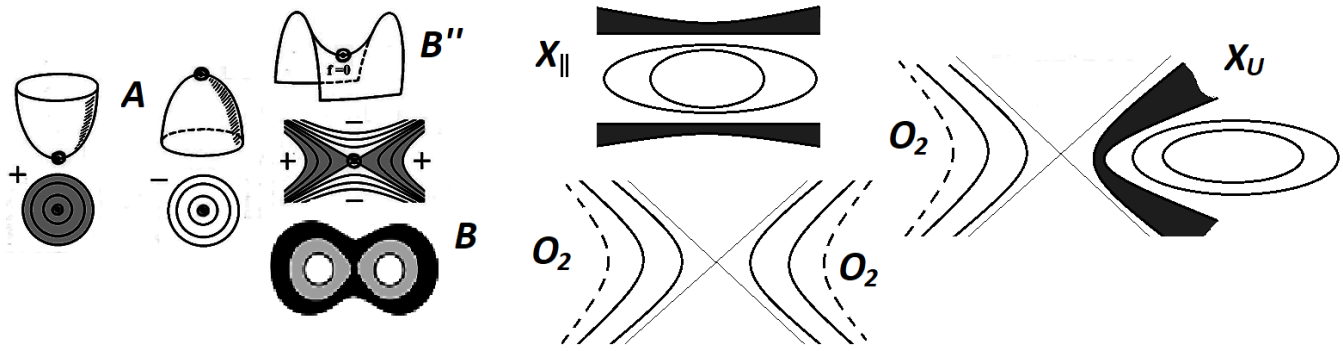


Рис. 4: Типы баз слоений: морсовские 2-атомы A, B , морсовское седло B'' (окрестность вершины 2-атома B) и некомпактные не критические перестройки $X_U, X_{||}$ и O_2 плоских сечений квадрик

Сформулируем подробнее, какие атомы-бифуркации возникают в данной системе. Отвечающие им 2-атомы, напомним, приведены на рис. 2.

Теорема 2. В псевдоевклидовой осесимметричной системе Жуковского следующие бифуркации (аналоги 3-атомов Фоменко) являются типичными в изоэнергетических или изоинтегральных поверхностях при фиксированных значениях функций Казимира $f_1 = a, f_2 = b$, принадлежащих одному из 12 перечисленных выше классов:

1) компактные боттовские 3-атомы $A = A \times S^1$ и $B = B \times S^1$, базы которых — морсовские 2-атомы A, B , а слой — окружность S^1 ;

2) некомпактные боттовские 3-атомы с компактной базой — 2-атомом и слоем \mathbb{R} : $\hat{A} = A \times \mathbb{R}$, $\hat{B} = B \times \mathbb{R}$;

3) некомпактные боттовские 3-атомы с некомпактной базой B'' (морсовское седло) и компактным слоем: $B'' = B'' \times S^1$;

4) не критические перестройки с компактным слоем S^1 : перестройка эллипса в ветвь гиперболы через параболу $X_U = X_U \times S^1$, перестройка эллипса в две ветви гиперболы через пару параллельных прямых $X_{||} = X_{||} \times S^1$ и перестройка пустого множества через пустой бифуркационный слой в ветвь гиперболы: $O = O_2 \times S^1$.

Как и для псевдоевклидова аналога случая Эйлера, в осесимметричной псевдоевклидовой системе Жуковского все аналоги 3-атомов имеют тип прямого произведения. В отличие от псевдоевклидова аналога волчка Эйлера здесь не могут возникать бифуркации с некомпактной 2-базой и некомпактным 1-слоем, поскольку совместный уровень $H = h, K = k$ в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ компактен.

Доказательство. 1. Из информации о k_{cusp}, a, b имеем вид бифуркационной кривой, расположение прямой $k = b^2/a$ относительно ее особых точек и классы гомеоморфности совместных уровней $K = k, H = h$ и $f_1 = a, f_2 = b$.

Остается проверить, что для каждого слоя и прообраза вертикального или горизонтального отрезка произведение действительно прямое.

2. Для регулярных слоев это следует из их ориентируемости как неособых совместных уровней четырех гладких функций в \mathbb{R}^6 .

Для боттовских атомов $A \times S^1$ и $\hat{A} = A \times \mathbb{R}$ имеем тривиальность расслоения над диском.

3. Для ветвей, содержащих седловые боттовские точки, это следует из двух соображений.

В прообразе точки возврата имеется вырожденная особенность — тор с критической неботтовской окружностью на нем. Тогда на близких уровнях интеграла $k = k_{\text{cusp}}(1 + \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ слои являются торами Лиувилля или цилиндрами и гомеоморфны данному особому слою. На близких уровнях $k = k_{\text{cusp}}(1 - \varepsilon)$ имеем в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ диск — 2-атом A , который стянется в точку при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тем самым слоение над 2-атомом B не может быть нетривиальным: одна из двух его “ленточек” гомотопна окружности — базе (в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$) регулярного тора или цилиндра как произведения кривой из $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ и кривой из $\mathbb{R}^3(\bar{x})$, а другая стягивается в точку вместе с 2-атомом A .

Следующее соображение основано на наличии точек центр-седло и седло-седло (т.е. известных невырожденных локальных особенностей ранга 0) в прообразах точек пересечения прямой $k = b^2/a$ и параметрической кривой. Следовательно, на каждом седловом сомножителе прямого

произведения определены входящие и выходящие дуги и при прохождении вдоль слоя входящая сепаратриса должна перейти во входящую, т.е. в противоположную.

Для седлового 3-атома с базой (2-атомом) в $\mathbb{R}^3(\bar{x})$ и слоем S^1 в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$, т.е. для прообраза отрезка, пересекающего прямую $k = b^2/a$ при $a > 0$, это невозможно, так как указанные сепаратрисы имеют разный знак в пределе $x_3 \rightarrow \pm\infty$. Аналогично для вертикального отрезка (2-атом в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$, слой в $\mathbb{R}^3(\bar{x})$).

Если точки ранга 0 вырождены (как в случае $b = 0, a > 0$), то данное соображение проверяется явно: в случае компактной базы и компактного слоя работает классическая теория, а в случае некомпактного пересечения $f_1 = a > 0$ и $f_2 = b = 0$ плоскость никогда не бывает параллельна горизонтальной оси. Теорема доказана. \square

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 22-71-00111) в МГУ имени М.В.Ломоносова. Е.С.Агуреева является стипендиатом фонда “Базис”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смейл С.* Топология и механика // Успехи матем. наук. 1972. **27**, №2. 77–133.
2. *Фоменко А.Т.* Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функци. анализ и его прил. 1988. **22**, №4. 38–51.
3. *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44**, №1. 145–173.
4. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. 1990. **54**, №3. 546–575.
5. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
6. *Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. **191**, №2. 3–42.
7. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. Т. 2 М.; Л., 1949. 152–309.
8. *Комаров И.В.* Базис Ковалевской для атома водорода // Теор. матем. физ. 1981. **47**, №1. 67–72.
9. *Хагигатдуст Г., Ошешков А.А.* Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ // Матем. сб. 2009. **200**, №6. 119–142.
10. *Новиков Д.В.* Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3,1)$ // Матем. сб. 2014. **205**, №8. 41–66.
11. *Kozlov I.K.* The topology of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ // Sb. Math. 2014. **205**, N 4. 532–572.
12. *Kibkalo V.A.* Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$ // Sb. Math. 2019. **210**, N 5. 625–662.
13. *Kibkalo V.* Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ // Topol. and its Appl. 2020. **275**. 107028.
14. *Fedoseev D.A., Fomenko A.T.* Noncompact bifurcations of integrable dynamic systems // J. Math. Sci. 2020. **248**. 810–827.
15. *Кудрявцева Е.А.* Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // Докл. РАН. 2012. **445**, №4. 383–385.
16. *Новиков Д.В.* Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $\mathfrak{e}(3)$ // Матем. сб. 2011. **202**, №5. 127–160.
17. *Николаенко С.С.* Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сб. 2020. **211**, №8. 68–101.
18. *Николаенко С.С.* Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности // Чебышёвский сб. 2021. **22**, №5. 185–197.
19. *Ведюшкина В.В. (Фокичева), Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, №4. 20–67.
20. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. Math. Phys. 2016. **23**,

- №4. 431–454.
21. *Kibkalo V.A.* Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras // Moscow Univ. Math. Bull. 2020. **75**, N6. 263–267
 22. *Кибкало В.А.* Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской // Чебышёвский сб. 2023. **24**, №1. 69–88
 23. *Алтуев М.К., Кибкало В.А.* Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров // Матем. сб. 2023. **214**, №3. 54–70
 24. *Bolsinov A. V., Guglielmi L., Kudryavtseva E.A.* Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom // Phil. Trans. Roy. Soc. A: Math., Phys. Eng. Sci. 2018. **376**, N2131. 20170424.
 25. *Кибкало В.А.* Параболичность вырожденных особенностей в осесимметричных системах Эйлера с гироскопом // Вестн. Моск. ун-та. Матем. механ. 2023., №1. 25–32

Поступила в редакцию
28.04.2023