

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ЖУКОВСКОГО В СЛУЧАЕ АЛГЕБРЫ ЛИ $E(2, 1)$

Е. С. Агуреева¹ В. А. Кибкало²

В работе изучается осесимметричный аналог интегрируемого случая Жуковского в случае алгебры Ли $e(2, 1)$. Построены бифуркационные диаграммы, существенно зависящие как от постоянных параметров системы, так и от значений функций Казимира — аналогов геометрического интеграла и интеграла площадей. Описано критическое множество системы, проверена невырожденность его точек. Найдены аналоги 3-атомов Фоменко системы и показано, что все они имеют тип прямого произведения двумерной базы на одномерный слой. В системе обнаружены некомпактные некритические бифуркации.

Ключевые слова: Интегрируемая система, динамика твердого тела, слоение Лиувилля, псевдоевклидово пространство, случай Жуковского, топологический инвариант, особенность.

We study an axisymmetric analog of the Zhukovsky integrable case for the Lie algebra $e(2, 1)$. Bifurcation diagrams are constructed. They essentially depend both on the constant parameters of the system and on the values of the Casimir functions, which are analogues of the geometric integral and the area integral. The critical set of the system is studied, and the nondegeneracy of its points is checked. Analogues of the Fomenko 3-atoms of the system are determined and it is shown that all of them have the type of direct product of the 2-dimensional base and the 1-dimensional fiber. Non-compact non-critical bifurcations are discovered in the system.

Key words: Integrable system, rigid body dynamics, Liouville foliation, pseudo-Euclidean space, Zhukovsky case, topological invariant, singularity.

1. Введение

Топологический подход к изучению гамильтоновых систем был во-многом мотивирован идеями С.Смейла [1]. В интегрируемом случае топологическую классификацию интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы и с невырожденными особенностями построил А.Т.Фоменко, совместно с учениками и соавторами (например, см. [2-4] и монографию [5]).

Фазовое пространство системы при этом расслаивается на совместные поверхности уровни первых интегралов и функций Казимира. Для систем на симплектическом многообразии M^4 это, например, энергия системы H и некоторый первый интеграл K . Если система задавалась на пуассоновом многообразии (например, на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$, изоморфном \mathbb{R}^6), то в качестве $M^4 = M_{a,b}^4$ выбираются симплектические листы скобки Пуассона — совместные уровни ее независимых функций Казимира $f_1 = a$ и $f_2 = b$, являющиеся гладкими 4-мерными симплектическими многообразиями.

¹ Агуреева Екатерина Сергеевна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, email: agureevamath@yandex.ru

Agureeva Ekaterina Sergeevna — student of Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

² Кибкало Владислав Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; Москов. центр фонд. и прикл. матем.; e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Если все слои слоения Лиувилля компактны, то в прообразе каждого бифуркационного значения набора первых интегралов обязательно есть критические точки этого набора функций. Напомним, что *бифуркационным* называют значение отображения, в прообразе малой окрестности которого слоение не является тривиальным. Из компактности также следует полнота потоков гамильтоновых полей первых интегралов, т.е. их продолжаемость для любого времени $t \in \mathbb{R}$.

При условии невырожденности по Морсу–Ботту критических точек отображения момента на неособом уровне энергии $Q^3 = Q_h^3 = Q_{abh}^3$ в M^4 или \mathbb{R}^6 , в частности, при отсутствии в Q^3 положений равновесия системы, топологическим инвариантом системы оказывается граф Роба системы с оснащением. Его ребра, напомним, соответствуют семействам регулярных слоев, а вершины — их бифуркациям. Оснатив каждую вершину графа типом его 3-атома, т.е. классом послыонной гомеоморфности слоения в прообразе малой окрестности вершины, получим инвариант Фоменко (грубую молекулу) системы. Классом послыонной гомеоморфности слоения на всём Q^3 является инвариант Фоменко–Цишанга — молекула с числовыми метками, кодирующими диффеоморфизмы склейки Q^3 по граничным торами 3-атомов.

Многие интегрируемые системы механики, изученные к настоящему моменту топологическими методами [5,6], удовлетворяют этим условиям: совместный уровень их функций Казимира (геометрического интеграла f_1 и интеграла площадей f_2), энергии H и дополнительного интеграла K компактен. Таковы, например, волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, система Жуковского [7]. Эти системы задаются на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства. На пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ вводится следующая скобка Пуассона, где ε_{ijk} есть знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$.

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0.$$

Система на этом \mathbb{R}^6 , задаваемая гамильтоновым векторным полем — косым градиентом $\text{sgrad } H$ — определяется уравнениями Эйлера для гладкой функции H :

$$\dot{J}_i = \{J_i, H\}, \quad \dot{x}_i = \{x_i, H\}$$

Отметим, что для многих систем на $e(3)$ известны аналоги на алгебрах Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$, см. например [8]. Их топологические инварианты также ранее вычислялись, см. работы [9-13].

Ряд недавних работ был направлен на обобщение топологического подхода на некоторые классы систем с более общими слоениями Лиувилля. Например, они могут содержать некомпактные слои, некритические бифуркации или неполные потоки. Обзор известных результатов о слоениях таких систем недавно был сделан А.Т.Фоменко и Д.А.Федосеевым [14]. Также отметим аналог теоремы Лиувилля для интегрируемой системы с коническими особенностями и неполными потоками [15]. Некомпактные слои и перестройки встречались ранее в системах Соколова на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(3, 1)$, изученных Д.В.Новиковым [10, 16].

В недавних работах С.С.Николаенко [17-18] были классифицированы особенности систем с 1 и 2 степенями свободы соответственно, в случае выполнения определенных условий. Отметим также недавнюю работу В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко [19], где некоторые некомпактные слоения моделировались топологическими бильярдами на неограниченных столах.

В работе [20] А.В. Борисов и И.С. Мамаев рассмотрели следующее преобразование на $\mathbb{C}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$. Оно линейно над \mathbb{C} и меняет знаки некоторых структурных констант скобки Ли–Пуассона, переводя алгебру Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 переходит в алгебру Ли $e(2, 1)$ псевдоортогональной группы.

$$J_j \rightarrow i \cdot J_j, \quad x_j \rightarrow i \cdot x_j, \quad \text{для } j = 1, 2, \quad J_3 \rightarrow J_3, \quad x_3 \rightarrow x_3.$$

После такого преобразования \mathbb{R}^6 многие известные классические вещественные интегрируемые системы переходят в новые системы, также интегрируемые и вещественные. Далее будем называть получаемые вещественные системы *псевдоевклидовыми аналогами* соответствующих систем, поскольку \mathbb{R}^6 оснащено структурой алгебры Ли $e(2, 1)$ группы движений пространства R_1^3 с псевдоевклидовым скалярным произведением $g = \text{diag}(1, 1, \sigma)$ для отрицательных σ . Функции Казимира f_1 и f_2 полученной скобки Пуассона будем далее называть геометрическим интегралом и интегралом площадей соответственно:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \quad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b.$$

Ранее В.А.Кибкало изучался псевдоевклидов аналог волчка Эйлера и волчка Ковалевской. Для такого аналога волчка Ковалевской при ненулевом значении интеграла площадей был получен [21] критерий компактности совместного уровня функций Казимира, гамильтониана и первого интеграла K_{kov} (совпадающего с классическим в силу независимости последнего от переменных J_3, x_3). Кроме того, был изучен [22] аналог первого класса Аппельрота: слоение Лиувилля на множестве $K_{kov} = 0$.

Для псевдоевклидова случая Эйлера задача становится проще в силу малой степени (два, а не четыре как в случае Ковалевской) интеграла по импульсам J_1, J_2, J_3 и в силу независимости интеграла и гамильтониана от координат x_1, x_2, x_3 .

$$H = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} - \frac{J_3^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Для случая особых значений функций Казимира [23], т.е. при $f_1 = a, f_2 = b : a \cdot b = 0$ и $(a, b) \neq (0, 0)$ была построена бифуркационная диаграмма отображения (K, H) Σ на плоскости Okh значений интеграла $K = k$ и гамильтониана $H = h$. Были определены классы послойной гомеоморфности особенностей слоения, лежащих в прообразе малых отрезков плоскости Okh , трансверсально пересекающих дуги диаграммы Σ . Ответ существенно зависит от того, является ли главный момент инерции A_3 , соответствующий третьей оси, средним или наибольшим/наименьшим среди A_1, A_2, A_3 . В последнем случае были вычислены аналоги инварианта Фоменко, т.е. базы слоения с его поднятием вблизи каждой конкретной точки.

Среди полученных аналогов 3-атомов Фоменко встретились как произведения морсовских 2-атомов типов A, B на окружность S^1 или интервал I , так и 3-атомы с некомпактными базами (морсовское седло) и некритические бифуркации, например, произведение S^1 на перестройку эллипса в гиперболу через параболу или пару пересекающихся прямых.

Интегрируемое обобщение случая Эйлера, т.е. тела, закрепленного на шарнире в своем центре масс, было открыто Н.Е. Жуковским, см. [77]. Псевдоевклидов аналог случая Жуковского представляется естественным следующим шагом наших исследований. С одной стороны, его гамильтониан и интеграл являются квадратиками и не зависят от x_1, x_2, x_3 , причем интеграл K имеет те же коэффициенты (как квадратичная форма на \mathbb{R}^3 , как и функция Казимира f_1 , пусть они зависят от разных наборов переменных R . В отличие от системы Эйлера, центр квадрики $H = h$ уже не совпадает с центром квадрики $K = k$, что существенно усложняет бифуркационную диаграмму.

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Здесь и далее через H, K будут обозначаться данные функции. В настоящей работе мы рассмотрим, главным образом, осесимметричный случай, т.е. случай, когда равны моменты инерции $A_1 = A_2$, соответствующие положительному подпространству симметричной билинейной формы g . Компоненты $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ и λ_3 , соответствующие проекциям вектора гиростатического момента $\bar{\lambda}$ на положительное и отрицательное подпространства формы g , предполагаются ненулевыми. Такая система сохраняет многие нетривиальные топологические свойства общего случая, но допускает явные аналитические выражения для своих особенностей, например, координат точки возврата бифуркационной кривой. Последнее позволило проверить параболичность и каспидальность [24] локальной и полулокальной особенностей в прообразе этой точки соответственно [25]. Явная проверка последнего для классической осесимметричной системы позволила получить аналогичный вывод для особенности произвольной возмущенной системы, уже не осесимметричной, но близкой к таковой.

2. Слоение отображения (K, H) на пространстве скоростей $\mathbb{R}^3(\vec{J})$.

В настоящем разделе опишем свойства бифуркационной кривой пары функций H и K псевдоевклидова аналога системы Жуковского как двух квадратиков в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{J})$.

Утверждение 1. Множество критических точек пары функций H, K в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ является замыканием параметрической кривой $\vec{J}_0(t) = (J_{10}(t), J_{20}(t), J_{30}(t))$ для $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $t \neq 1/A_i$ для $i = 1, 2, 3$:

$$J_{i0}(t) = \frac{\lambda_i}{1 + A_i t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{A_i^{-1}\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \vec{J}(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{J}(t) = (0, 0, 0). \quad (1)$$

Образ этого множества на плоскости (h, k) состоит из параметрической кривой $h(t), k(t)$ для $t \neq \{A_1, A_2, A_3\}$ и точки $(h_0, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (h(t), k(t)) = (\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 / A_i, 0)$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{t^2}{2} \left(\frac{A_1 \lambda_1^2}{(1 + A_1 t)^2} + \frac{A_2 \lambda_2^2}{(1 + A_2 t)^2} - \frac{A_3 \lambda_3^2}{(1 + A_3 t)^2} \right), \\ k(t) &= \frac{A_1^2 \lambda_1^2}{(1 + A_1 t)^2} + \frac{A_2^2 \lambda_2^2}{(1 + A_2 t)^2} - \frac{A_3^2 \lambda_3^2}{(1 + A_3 t)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

После параметризации $\tau = 1/t$ в точке $\tau = 0$ кривая является гладкой и касается оси Oh .

Отметим, что из зависимости градиентов функций H и K будет следовать и зависимость их косых градиентов.

Доказательство. 1. Если поверхность $K = k$ является гладкой в точке \vec{J} , то линейная зависимость dH и dK в этой точке равносильна наличию в ней условного экстремума функции H в ограничении на поверхность $K = k$. Поверхности $K = k$ являются гладкими в $R^3(\vec{J})$ как обобщенные гиперboloиды, исключая уровень $k = 0$ и точку $(0, 0, 0)$ на нем.

2. Рассмотрим функцию Лагранжа $L = H + \frac{t}{2}(K - k)$ и найдем ее условные экстремумы:

$$\frac{J_1 - \lambda_1}{A_1} + J_1 t, \quad \frac{J_2 - \lambda_2}{A_2} + J_2 t, \quad -\frac{J_3 - \lambda_3}{A_3} - J_3 t, \quad J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 - k.$$

Если $t = 0$, получаем особую точку в случае $J_i = \lambda_i$, т.е. вершину конуса $H = 0$, в которой $K = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2$. При $t \neq 0$, то выразим J_1, J_2, J_3 через t и подставим в $H(\vec{J}), K(\vec{J})$:

$$J_{10}(t) = \frac{\lambda_1}{1 + A_1 t}, \quad J_{20}(t) = \frac{\lambda_2}{1 + A_2 t}, \quad J_{30}(t) = \frac{\lambda_3}{1 + A_3 t}.$$

Пределы $h(t), k(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ равны $\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 / (2A_i)$ и 0 соответственно. После параметризации вычислим производную по τ в нуле, получим $h' = 0, k' \neq 0$. Утверждение доказано.

С этого момента будем рассматривать случай осесимметричной задачи: $A_1 = A_2 \neq A_3$. Повороты на угол φ вокруг осей OJ_3 и Ox_3 в трехмерных пространствах $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ и $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ сохраняют псевдоевклидово скалярное произведение и первые интегралы f_1, f_2, H, K .

Лемма 1. Для осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского $A_1 = A_2 \neq A_3$ можно считать, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0$. Отсюда, в частности, $\vec{J}_{20} = 0$.

Явно проверяется, что поворот на угол $\varphi = \arccos[\lambda_1 / \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}]$ координат J_1, J_2 приводит гамильтониан к требуемому виду. Поскольку одновременное изменение знаков J_1, x_1, λ_1 или J_3, x_3, λ_3 сохраняет первые интегралы и слоение, то можем принять $\lambda_1 > 0, \lambda_3 > 0$.

Замечание 1. Случаи $\lambda_1 \lambda_3 = 0$ и $A_1 = A_3$ приводят к существенному вырождению системы и ее особенностей, а потому нами не рассматриваются. Также исключим случай $A_1 \lambda_3 = A_3 \lambda_1$, при котором расположение кривой $k(t), h(t)$ на плоскости Okh меняется: при этом точка возврата лежит на оси Oh и касательный вектор направлен вертикально, т.е. точка касания оси Oh совпадает с точкой возврата. Отметим, что и у системы на всем \mathbb{R}^6 особенности будут устроены иначе.

Введем следующие обозначения:

$$t_{cusp} = \frac{A_1^{1/3} \lambda_1^{2/3} - A_3^{1/3} \lambda_3^{2/3}}{-A_1^{1/3} A_3 \lambda_1^{2/3} + A_1 A_3^{1/3} \lambda_3^{2/3}}, \quad k_{cusp} = \frac{A_1^{2/3} A_3^{2/3} (A_1^{4/3} \lambda_1^{2/3} - A_3^{4/3} \lambda_3^{2/3}) (A_3^{2/3} \lambda_1^{2/3} - A_1^{2/3} \lambda_3^{2/3})^2}{(A_1 - A_3)^2}.$$

Утверждение 2. Для псевдоевклидова осесимметричного случая Жуковского

- параметрическая кривая $k(t), h(t)$ не имеет самопересечений,

- при $t \rightarrow -\frac{1}{A_1} \pm 0$ имеем $k(t), h(t) \rightarrow \infty$, а при $t \rightarrow -\frac{1}{A_3} \pm 0$ имеем $k(t), h(t) \rightarrow -\infty$
- кривая $k(t), h(t)$ пересекает ось Oh в двух точках $h = (\lambda \pm \lambda_3)^2 / (2A_1 - 2A_3)$ и касается при $\tau = 1/t = 0$,
- кривая $k(t), h(t)$ вблизи точки касания находится по ту же сторону от оси Oh , что и точка возврата $k(t_{cusp}), h(t_{cusp})$.

Доказательство. 1) Пусть при t и \tilde{t} имеется самопересечение: $k(t) = k(\tilde{t})$ и $h(t) = h(\tilde{t})$. Тогда следует

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \cdot \frac{A_1}{A_3} = \frac{(2 + A_3\tilde{t} + A_3t)}{(2 + A_1\tilde{t} + A_1t)} \cdot \frac{(1 + A_1t)^2(1 + A_1\tilde{t})^2}{(1 + A_3t)^2(1 + A_3\tilde{t})^2}$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \cdot \frac{A_1}{A_3} = \frac{(1 + A_1t)^2(1 + A_1\tilde{t})^2}{(1 + A_3t)^2(1 + A_3\tilde{t})^2} \cdot \frac{t + \tilde{t} + 2A_3t\tilde{t}}{t + \tilde{t} + 2A_1t\tilde{t}}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $(A_1 - A_3)(t - \tilde{t})^2 = 0$, тогда при $A_1 \neq A_3$ точки самопересечения отсутствуют.

2) При замене параметра $\tau = 1/t$ получим

$$k(\tau) = \tau^2 \left(\frac{\lambda^2}{(A_1 + \tau)^2} - \frac{\lambda_3^2}{(A_3 + \tau)^2} \right), \quad h(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1\lambda^2}{(A_1 + \tau)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(A_3 + \tau)^2} \right)$$

Причем вектор $(k'(0), h'(0)) = (0, -A_1^2/\lambda_1^2 + A_3^2/\lambda_3^2)$ ненулевой, а значит параметризация регулярна в окрестности $t = \infty$.

Остальные свойства также проверяются явно.

Утверждение 3. 1) Для осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского при условии $\lambda_1 A_3 \neq \lambda_3 A_1, A_1 \neq A_3, \lambda_1 \neq \lambda_3$ слоение пары функций (H, K) на пространстве $\mathbb{R}^3(J)$ в случаях $A_1 > A_3$ и $A_1 < A_3$ устроено одним из четырех способов: дуга, содержащая точку возврата, находится либо ниже (по координате h), чем вторая, или наоборот. Координата $k = k_{cusp}$ точки возврата может быть либо отрицательной, либо положительной. Примеры показаны на рис. 1.

2) Пары (h, k) из дополнения к бифуркационной кривой $h(t), k(t)$ являются регулярными и связных компонентам сопоставлен класс гооморфности слоя. Точке гладкой дуги бифуркационной кривой $h(t), k(t)$, отличной от точки возврата при $t = t_{cusp}$, соответствует морсовский 2-атом A или B , лежащий в прообразе малого отрезка, трансверсально пересекающего кривую в данной точке. Эти отрезки отмечены черным на рисунке.

Доказательство. 1. Докажем, что пересечение квадрик $H = h$ и $K = k$ компактно либо пусто. Предположим, что пересечение $H = h$ и $K = k$ некомпактно и непусто. Тогда вне любой окрестности нуля две эти квадрики имеют общую точку. Рассмотрим их как квадрики в $\mathbb{R}P^3$ с однородными координатами $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$, где $J_i y_i/y_0$ в исходной аффинной карте:

$$\frac{(y_1 - \lambda_1 y_0)^2}{2A_1} + \frac{(y_2 - 0 \cdot y_0)^2}{2A_1} - \frac{(y_3 - \lambda_3 y_0)^2}{2A_3} - h y_0^2 = 0, \quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - k y_0^2 = 0.$$

В точках пересечения какой-то из двух этих квадрик с $\mathbb{R}P^2 : y_0 = 0$ имеем, что $y_3 \neq 0$. Иначе в данной точке имеем $y_1^2/A_1 + y_2^2/A_1 = 0$ или $y_1^2 + y_2^2 = 0$, т.е. четверка однородных координат нулевая. Введем координаты z_0, z_1, z_2 как $z_i = y_i/y_3, i = 0, 1, 2$ в окрестности точек $\mathbb{R}P^2$, в которых $y_0 = 0, y_3 \neq 0$. Тогда в точках $\mathbb{R}P^2 : z_0 = 0$ имеем

$$(z_1^2 + z_2^2)/A_1 = 1/A_3, \quad z_1^2 + z_2^2 = 1.$$

Иными словами, в окрестности бесконечно удаленной $\mathbb{R}P^2$, дополняющего $\mathbb{R}^3(\bar{J})$ до $\mathbb{R}P^3$, два данных обобщенных гиперболоида либо пересекаются по окружности, лежащей в $\mathbb{R}P^2$, либо не имеют общих точек.

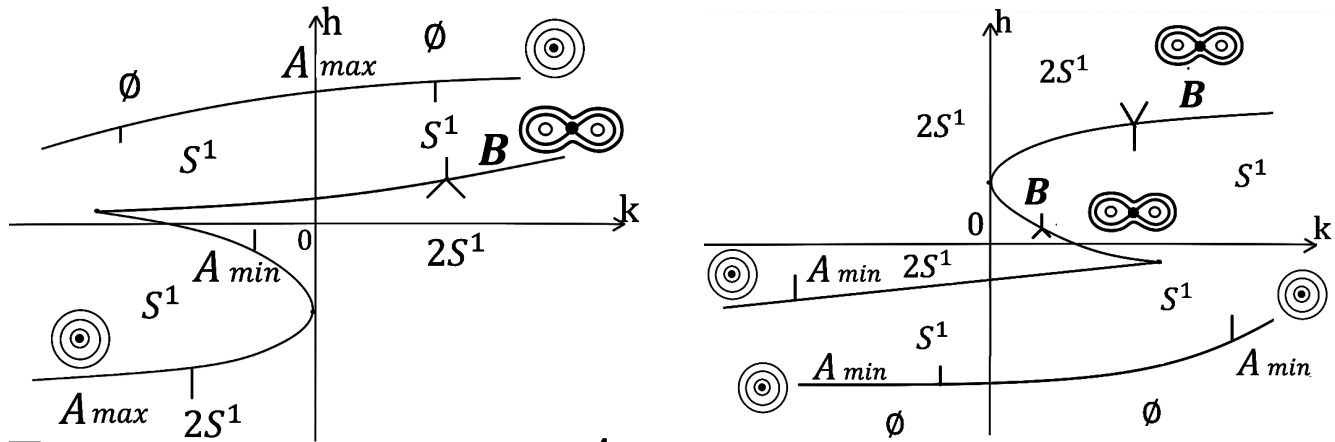


Рис. 1: Бифуркационная кривая осесимметричной системы Жуковского на плоскости Okh значений интеграла K и гамильтониана H в случае $A_1 > A_3, k_{cusp} < 0$ слева и $A_1 < A_3, k_{cusp} > 0$ справа.

Тем самым, все перестройки слоения происходят в окрестности слоев, содержащих точки линейной зависимости градиентов H и K .

2. Зафиксируем некоторый уровень $K = k$ и плоскость OJ_1J_3 . В пересечении с ней асимптотические конуса обобщенных гиперboloидов $K = k$ и $H = h$ образуют пару прямых $J_3 = \pm J_1$ для $K = k$ и пару прямых, параллельных $J_3 = \pm J_1 A_3^{1/2} / A_1^{1/2}$, для $H = h$. Отсюда при больших по модулю $h > |h_0|$ и фиксированном k два обобщенных гиперboloида пересекаются (по двум окружностям) тогда и только тогда, когда либо $A_1 > A_3 > 0$ и $h < -|h_0|$, либо $0 < A_1 < A_3$ и $h > |h_0|$. Поскольку все бифуркации слоев возможны только в точках кривой $k(t), h(t)$, то количество связанных компонент выше и ниже обеих ветвей этой кривой постоянно.

3. Для проверки невырожденности явно вычислим второй дифференциал функции H при условии $K = k$ в критической точке. Подставив критическую точку $J_0(t)$, получаем два значения:

Выбрав знак $\delta = 1$ для $J_3 = \delta \sqrt{J_1^2 + J_2^2 - k_{cusp}}$, получим собственные значения матрицы второго дифференциала, равные $t + 1/A_1$ и $P(t)/(A_1 A_3 \lambda_3^2 (1 + A_1 t)^2)$ для многочлена

$$P(t) = A_1 A_3 (A_3^2 \lambda_1^2 - A_1^2 \lambda_3^2) t^3 + 3A_1 A_3 (A_3 \lambda_1^2 - 3A_1 \lambda_3^2) t^2 + 3A_1 A_3 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) t + A_1 \lambda_1^2 - A_3 \lambda_3^2. \quad (3)$$

Значение $t = t_{cusp}$ является корнем этого многочлена. Нетрудно проверить, что его значения в нулях его производной имеют одинаковый знак. Отсюда при $\lambda_1 A_3 \neq \lambda_3 A_1$ он имеет ровно один корень как многочлен третьей степени. Утверждение доказано.

3. Слоение Лиувилля системы на $\mathbb{R}^6(\vec{J}, \vec{x})$. Невырожденность критических точек.

Утверждение 4. При фиксированных $(a, b) \neq (0, 0)$ совместный уровень обобщенного гиперboloида $f_1(\vec{x}) = a$ и плоскости $f_2(\vec{x}, \vec{J}) = b$ в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ является плоской квадрикой и следующим образом меняется при увеличении значения $k = K(\vec{J})$ и его переходе через бифуркационное значение $k_0 = k_0(a, b)$.

Доказательство. Значению $k = 0$ соответствует плоскость $f_2 = b$, параллельная одной из образующих асимптотического конуса $f_1 = 0$ и содержащая ее при $b = 0$. При $k > 0$ евклидова нормаль к плоскости лежит вне конуса $f_1 = 0$, а при $k < 0$ — внутри него.

Отсюда легко выводятся случаи $a \cdot b = 0$. При $a = 0, b \neq 0$ имеем пересечение конуса и плоскости, не проходящей через его вершину — знаменитые конические сечения (эллипс, парабола и гипербола). В случаях $b = 0, a \neq 0$ плоскость проходит через вершину конуса. При бифуркационном значении $k_0 = 0$ она содержит образующую конуса и с точностью до поворота вокруг Ox_3 задается уравнением $x_3 = \pm x_1$. Ограничение $f_2 = a$ тогда примет вид $x_2^2 = a$.

В остальных случаях явно вычислим инварианты одномерного пересечения плоскости $f_2 = b$ и обобщенного гиперboloида $f_1 = a$ как квадрики, лежащей в этой плоскости (след, определитель квадратичной формы и определитель расширенной матрицы) и используем аффинную классификацию квадрик по ним. Утверждение доказано.

a, b	k_0	$k < k_0$	$k = k_0$	$k > k_0$
$a > 0, b \neq 0$	$b^2/a > 0$	гипербола	пара действит. пересек. прямых	гипербола
$a < 0, b \neq 0$	$b^2/a < 0$	мнимый эллипс	пара мнимых пересек. прямых	эллипс
$a > 0, b = 0$	0	эллипс	пара действит. паралл. прямых	гипербола
$a < 0, b = 0$	0	мнимый эллипс	пара мнимых паралл. прямых	гипербола
$a = 0, b \neq 0$	0	эллипс	парабола	гипербола

Таблица 1: Совместный уровень функций $f_1 = a$ и $f_2 = 0$ (при фиксированном векторе $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$) в зависимости от знаков a функции f_1 и знака интеграла $K = k$ на векторе \vec{J} .

Найдем критические точки пары функций K, H на неособых $M_{a,b}^4$ и проверим их невырожденность. Псевдоевклидову и классическому случаям соответствует $\sigma = -1$ и $\sigma = 1$. Запишем компоненты $sgrad H$ и $sgrad K$.

$$sgrad H : \begin{aligned} & \frac{\sigma J_3 J_2}{A_1} + \frac{\sigma J_2(\lambda_3 - J_3)}{A_3}, \frac{\sigma J_3(\lambda_1 - J_1)}{A_1} + \frac{\sigma J_1(J_3 - \lambda_3)}{A_3}, \frac{-J_2 \lambda_1}{A_1}, \\ & \frac{\sigma J_2 x_3}{A_1} + \frac{\sigma x_2(\lambda_3 - J_3)}{A_3}, \frac{\sigma x_3(\lambda_1 - J_1)}{A_1} + \frac{\sigma x_1(J_3 - \lambda_3)}{A_3}, \frac{x_2(J_1 - \lambda_1) - J_2 x_1}{A_1}. \end{aligned} \tag{4}$$

$$sgrad K : \quad 0, 0, 0, -2J_3 x_2 \sigma + 2J_2 x_3 \sigma, 2(J_3 x_1 - J_1 x_3) \sigma, -2J_2 x_1 + 2J_1 x_2. \tag{5}$$

Утверждение 5. 1) Множество критических точек отображения момента (K, H) псевдоевклидовой осесимметричной системы Жуковского лежит в объединении следующих семейств:

- (1): $\vec{J} = \vec{J}_0(t)$ для $t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$
- (2): $J_3 x_1 = J_1 x_3, J_2 x_1 = 2J_1 x_2$, где $\vec{J} \neq 0$,
- (3): $\vec{J} = 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$.

2) Множество точек ранга 0 (равновесий) системы состоит из следующих точек:

$$(0.1) \vec{J} = \vec{J}_0, x_2 = 0, x_3 = x_1 \frac{\lambda_3(1 + A_1 t)}{\lambda_1(1 + A_3 t)}, \text{ где } t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$$

$$(0.2) \vec{J} = 0, x_2 = 0, x_3 = x_1 \frac{\lambda_3 A_1}{\lambda_1 A_3}$$

Доказательство. В критической точке или $sgrad K = 0$, или $\exists \mu \in \mathbb{R} : sgrad H + \mu sgrad K = 0$.

1) Во первом случае получаем семейство (2), которое подразбивается на следующие. В случае $J_3 \neq 0$ имеем $x_1 = J_1 x_3 / J_3, x_2 = J_2 x_3 / J_3$. Эти точки принадлежат прямой $k = b^2/a$. Нетривиальные собственные значения линеаризации A_K поля $sgrad K$ равны $\pm i \sqrt{\sigma(J_1^2 + J_2^2 \sigma J_3^2)}$, т.е. при $\sigma = -1$ они отличны от нуля, если $k \neq 0$ и соответствуют боттовской эллиптической или седловой орбите в случаях $k = b^2/a < 0$ и $k = b^2/a > 0$.

В случае $J_3 = 0, (J_1, J_2) \neq (0, 0)$ имеем $sgrad K = 0$ при $x_3 = 0, x_1 = \mu J_1, x_2 = \mu J_2$. Тогда $k \geq 0, a \geq 0, b \geq 0$, причем равенство нулю достигается одновременно, т.е. точка попадает на вырожденный уровень $a = b = 0$. Нетривиальные собственные значения A_K равны $\pm \sqrt{(-\sigma)(J_1^2 + J_2^2)}$, т.е. при $\sigma = -1$ они будут действительными, т.е. отвечают боттовской седловой орбите.

2) Точки, где $\vec{J} = (0, 0, 0)$, попадают на особые слои слоения Лиувилля: при $b = 0$ они лежат в прообразе точки касания бифуркационной кривой и оси Oh . Этот прообраз устроен "сложно": над точкой $\vec{J} = (0, 0, 0)$ в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ находится двумерное множество $f_1 = a$, а над остальными точками пересечения конуса $K = 0$ и гиперboloида $H = h_0$ (проходящего через вершину конуса) лежат пересечения гиперboloида $f_1(\vec{x}) = a$ и плоскости $f_2(\vec{x}) = 0$.

Если при этом $x_2 = 0, x_3 = x_1 \frac{\lambda_3 A_1}{\lambda_1 A_3}$, то точка имеет ранг 0, т.е. $sgrad H = 0$. Эти точки вырождены: у произвольной линейризации $\psi A_H + \phi A_K$ имеется две пары одинаковых собственных значений $\pm \sqrt{-A_3^2 \lambda_1^2 \sigma - A_1^2 \lambda_3^2 \sigma^2} / (A_1 A_3)$, а не четыре разных.

3) Необходимым условием для $sgrad H, + \mu sgrad K = 0$ является равенство нулю трех первых компонент $sgrad H$, соответствующих J_1, J_2, J_3 . Нетрудно видеть, что тогда либо $\bar{J} = (0, 0, 0)$, либо $\bar{J} = \bar{J}_0(t)$ для произвольного $t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$. Первый случай разобран выше, а последнему соответствует линейная комбинация векторных полей $sgrad H + (t/2) sgrad K = 0$ и пара собственных значений ее линейризации, обращающихся в ноль только при $t = t_{cusp}$ или $t = \pm\infty$ (если $A_1 \lambda_3 = A_3 \lambda_1$). Это есть корень из многочлена (3), деленный на $A_1(1 + A_3 t) \sqrt{A_3(1 + A_1 t)}$. Знак “минус” в формуле отвечает $\sigma = -1$. Многочлен $P(t)$ встречался ранее при проверке морсовости критических точек функции H на поверхности уровня $K = k$. Если $A_3 \lambda_1 \neq A_1 \lambda_3$, то его степень равна трем, и он имеет ровно один корень $t = t_{cusp}$, поскольку принимает значения одного знака в нулях своей производной.

Точки ранга 0 возникают при $x_2 = 0, x_3 = x_1 \frac{\lambda_3(1 + A_1 t)}{\lambda_1(1 + A_3 t)}$ для $t \in \mathbb{R} \setminus \{A_1, A_3\}$. Одна из пар собственных значений линейризации $sgrad H + \varphi sgrad K$ совпадает с описанной выше в этом же пункте, а вторая пара имеет вид дроби с числителем $\pm(t - 2\varphi) \sqrt{\lambda_1^2(1 + A_3 t)^2 + \lambda_3^2(1 + A_1 t)^2 \sigma}$ и знаменателем $(1 + A_1 t)(1 + A_3 t)$. Корень обращается в ноль при $\sigma = -1$ только в точках, лежащих на уровне $a = b = 0$.

4. Основные результаты: бифуркационные диаграммы и аналоги 3-атомов

Основным результатом настоящей работы станет описание бифуркационных диаграмм $\Sigma = \Sigma_{a,b}$ отображения $(K, H) : M_{a,b}^4 \rightarrow Okh$ при условии $(a, b) \neq (0, 0)$, а также нахождение аналогов 3-атомов для данной системы, т.е. изучение типов особенностей в прообразах гладких дуг Σ . Диаграмма содержится в объединении параметрической кривой $k(t), h(t)$ и прямой. Если $ab \neq 0$, то это прямая $k = b^2/a$, а если $ab = 0$, то прямая $k = 0$. При $ab \neq 0$ возникает три различных случая, различаемые взаимным расположением чисел $0, a, a_0 = b^2/k_{cusp}$. Случай $ab = 0$ также разделяется на три: $b \neq 0, a = 0$ и два при $b = 0$, различаемые знаком a .

Кривые делят образ отображения (K, H) на несколько камер 1-6. Будем говорить о семействе дуг при разных a, b и обозначать эти дуги диаграмм $\Sigma_{a,b}$ одинаково, если дуги лежат на одной и той же кривой, разделяют одни и те же камеры и получаются друг из друга при непрерывном изменении $a(s), b(s)$ параметров системы. В таблице 2 перечислим дуги, при каждом из шести типов пар a, b входящие в диаграмму независимо от знака $k_{cusp} \in \mathbb{R}$. В таблице 3 перечислим остальные дуги, возникающие для систем с $k_{cusp} > 0$, а в таблице 4 — для систем $k_{cusp} < 0$. Для каждой дуги укажем обозначение, пару разделяемых ею камер и типы особенностей в прообразе малого трансверсального отрезка. Последний считаем вертикальным для дуг параметрической кривой $k(t, h(t))$ и горизонтальным для дуг прямых $k = b^2/a$ или $k = 0$. Функция H или функция K вдоль него возрастает. Отметим разницу в обозначении гиперболы — пересечения гиперболоида $f_1 = a$ и плоскости $f_2 = b$. Значок \asymp обозначает гиперболу, обе асимптоты которой имеют вдали от центра одинаковый знак J_3 , а значком \succ — гиперболу, у которой обе ветви однозначно проецируются на ось OJ_3 .

Мы подробно опишем случай $A_1 > A_3$. В случае $A_1 < A_3$ бифуркационная диаграмма и типы особенностей находятся аналогично. Напомним, что при $A_1 \neq A_3$ и $A_1 \lambda_3 \neq A_3 \lambda_1$ знак $k_{cusp} = k(t_{cusp})$ совпадает со знаком $A_1^{4/3} \lambda_1^{2/3} - A_3^{4/3} \lambda_3^{2/3}$.

Теорема 1. Пусть $A_1 > A_3 > 0, \lambda_1 \lambda_3 \neq 0$ и $\lambda_1 A_3 \neq \lambda_3 A_1$, т.е. $k_{cusp} \neq 0$. Зафиксируем симплектический лист $M_{a,b}^4$, где $(a, b) \neq (0, 0)$ и $b^2/a \neq k_{cusp}$. 1) Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{a,b}$ отображения момента $(K, H) : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h)$ содержится в объединении кривой $k(t), h(t)$ с прямой $k = b^2/a$ в случае $ab \neq 0$ или с прямой $k = 0$ иначе.

2) В зависимости от знака k_{cusp} и значений a, b , имеется 12 разных типов симплектических листов. А именно, для двух разных листов нельзя построить отображение плоскости Okh в себя, переводящее гладкие дуги диаграммы в гладкие дуги, и сохраняющее оснащение дуг 3-атомами. На рис. 3 и 4 изображены бифуркационные диаграммы и типы особенностей в шести случаях $ab \neq 0$ и шести случаях $ab = 0$ соответственно.

Сформулируем отдельно, какие бифуркации возникают в данной системе:

Теорема 2. В псевдоевклидовой осесимметричной системе Жуковского следующие бифуркации (аналоги 3-атомов Фоменко) являются типичными в изоэнергетических или изоинтегральных поверхностях при фиксированных значениях функций Казимира $f_1 = a, f_2 = b$, принадлежащих одному из 12 перечисленных выше классов:

- 1) компактные боттовские 3-атомы $A = A \times S^1$ и $B = B \times S^1$, базы которых — морсовские 2-атомы A, B , а слой — окружность S^1 ;
- 2) некомпактные боттовские 3-атомы с компактной базой 2-атомом и слоем \mathbb{R} : $\hat{A} = A \times \mathbb{R}$, $\hat{B} = B \times \mathbb{R}$;
- 3) некомпактные боттовские 3-атомы с некомпактной базой B'' (морсовское седло) и компактным слоем: $B'' = B'' \times S^1$;
- 4) некритические перестройки с компактным слоем S^1 : перестройка эллипса в ветвь гиперболы через параболу $X_U = X_U \times S^1$, перестройка эллипса в две ветви гиперболы через пару параллельных прямых $X_{||} = X_{||} \times S^1$ и перестройка пустого множества в ветвь гиперболы, имеющая пустой бифуркационный слой $O_2 = O_2 \times S^1$.

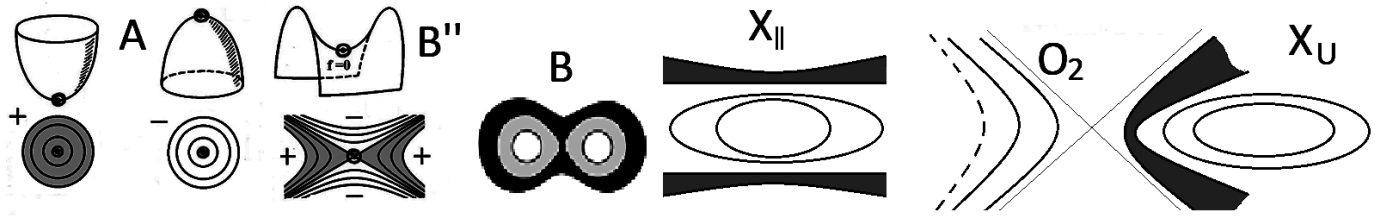


Рис. 2: Типы баз слоений: морсовские 2-атомы A, B , морсовское седло B'' (окрестность вершины 2-атома B) и некомпактные некритические перестройки $X_U, X_{||}$ и O_2 плоских сечений квадратик. Последняя при этом имеет пустой прообраз бифуркационного значения.

Как и для псевдоевклидова аналога случая Эйлера, в осесимметричной псевдоевклидовой системе Жуковского все аналоги 3-атомов имеет тип прямого произведения. В отличие от псевдоевклидова аналога волчка Эйлера, здесь не могут возникать бифуркации с некомпактной 2-базой и некомпактным 1-слоем, поскольку совместный уровень $H = h, K = k$ в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ компактен.

Доказательство. 1. Из информации о k_{cusp}, a, b имеем вид бифуркационной кривой, расположение прямой $k = b^2/a$ относительно ее особых точек и классы гомеоморфности совместных уровней $K = k, H = h$ и $f_1 = a, f_2 = b$.

Остается проверить, что для каждого слоя и прообраза вертикального или горизонтального отрезка произведение действительно прямое.

2) Для регулярных слоев это следует из их ориентируемости как неособых совместных уровней четырех гладких функций в \mathbb{R}^6 .

Для боттовских атомов $A \times S^1$ и $\hat{A} = A \times \mathbb{R}$ имеем тривиальность расслоения над диском.

3) Для ветвей, содержащих седловые боттовские точки, это следует из двух соображений.

Во-первых, в прообразе точки возврата имеется вырожденная особенность: тор с критической неботтовской окружностью на нем. Тогда на близких уровнях интеграла $k = k_{cusp}(1 + \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ слои являются торами Лиувилля или цилиндрами, и гомеоморфны данному особому слою. С другой стороны, на близких уровнях $k = k_{cusp}(1 - \varepsilon)$ имеем в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ диск — 2-атом A — который стянется в точку при $\varepsilon \rightarrow +0$. Тем самым, слоение над 2-атомом B не может быть нетривиальным: одна из двух его “ленточек” гомотопна окружности — базе (в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$) регулярного тора или цилиндра как произведения кривой из $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ и кривой из $\mathbb{R}^3(\vec{x})$, а другая стягивается в точку вместе с 2-атомом A .

Второе соображение основано на наличии точек центр-седло и седло-седло (т.е. известных невырожденных локальных особенностей ранга 0) в прообразах точек пересечения прямой $k = b^2/a$ и параметрической кривой. Следовательно, на каждом седловом сомножителе прямого произведения определены входящие и выходящие дуги, и при прохождении вдоль слоя входящая сепаратриса должна перейти во входящую, т.е. противоположную.

Для седлового 3-атома с базой в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ и слоем S^1 в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$, т.е. для прообраза отрезка, пересе-

кающего прямую $k = b^2/a$ при $a > 0$, это невозможно, т.к. указанные сепаратрисы имеют разный знак в пределе $x_3 \rightarrow \pm\infty$. Аналогично для вертикального отрезка (2-атом в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$, слой в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$).

Если точки ранга 0 вырождены (как в случае $b = 0, a > 0$), то данное соображение проверяется явно: в случае компактной базы и компактного слоя работает классическая теория, а в случае некомпактного пересечения $f_1 = a > 0$ и $f_2 = b = 0$ имеем, что плоскость никогда не бывает параллельна горизонтальной оси. Теоремы доказаны.

дуга	пара камер	в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$	$a > 0$ $b \neq 0$	$a < 0$ $b \neq 0$	$a > 0$ $b = 0$	$a < 0$ $b = 0$	$a = 0$ $b \neq 0$
ϕ_1	$3 \rightarrow \emptyset$	A	$A \times)$ (\emptyset	$A \times S^1$	\emptyset	$A \times S^1$
ϕ_2	$4 \rightarrow \emptyset$	A	$A \times \asymp$	$A \times S^1$	$A \times \asymp$	$A \times \asymp$	$A \times \asymp$.
δ_1	$2 \rightarrow 4$	B	$B \times \asymp$	$B \times S^1$	$B \times \asymp$	$B \times \asymp$	$B \times \asymp$.
γ_1	$1 \rightarrow 3$	A	$A \times)$ (\emptyset	$A \times S^1$	\emptyset	$A \times S^1$
ξ_1	$1 \rightarrow 3$	S^1	$2S^1 \times B''$	$2S^1 \times A$	$2S^1 \times X_{ }$	$2S^1 \times 2O$	$2S^1 \times 2X_U$
ξ_2	$3 \rightarrow 4$	S^1	$S^1 \times B''$	$S^1 \times A$	$S^1 \times X_{ }$	$S^1 \times 2O$	$S^1 \times X_U$

Таблица 2: Аналоги 3-атомов для дуг, входящих или не входящих в Σ при каждом из значений $(a, b) \neq (0, 0)$ независимо от знака $k_{cusp} \in \mathbb{R}$.

дуга	пара камер	в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$	$a < 0$ $b \neq 0$	$a > a_0$ $b \neq 0$	$0 < a < a_0$ $b \neq 0$	$a > 0$ $b = 0$	$a < 0$ $b = 0$	$a = 0$ $b \neq 0$
γ_2	$2 \rightarrow 4$	A	$A \times S^1$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
δ_2	$4 \rightarrow 2$	B	$B \times S^1$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
γ_3	$6 \rightarrow 4$	A	\emptyset	$A \times \asymp$	\emptyset	$A \times)$ ($A \times)$ ($A \times)$ (
δ_3	$4 \rightarrow 6$	B	\emptyset	$B \times \asymp$	\emptyset	$B \times)$ ($B \times)$ ($B \times)$ (
δ_4	$1 \rightarrow 3$	B	\emptyset	$B \times)$ ($B \times)$ (\emptyset	\emptyset	\emptyset
δ_6	$3 \rightarrow 1$	B	\emptyset	$B \times)$ ($B \times)$ (\emptyset	\emptyset	\emptyset
ξ_3	$1 \rightarrow 6$	S^1	\emptyset	$2S^1 \times B''$	\emptyset	$2S^1 \times X_{ }$	$2S^1 \times A$	$2S^1 \times X_U$
ξ_4	$3 \rightarrow 4$	S^1	$S^1 \times B''$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Таблица 3: Случай $k_{cusp} > 0$: аналоги 3-атомов для дуг $\Sigma_{a,b}$ при некоторых значениях $(a, b) \neq (0, 0)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 22-71-00111 в МГУ имени М.В.Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Смейл Топология и механика // УМН. 1972. **27**, №2. 77–133
20. Ведышклина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, №4. 20–67.
21. Fomenko A. T., Vedyushkina V. V. Billiards and Integrability in Geometry and Physics. New Scope and New Potential // Mosc. Univ. Math. Bull. 2019. **74**, №3. 98–107.
2. А.Т.Фоменко Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его приложения 1988. **22**, №4. 38–51.
3. А.Т.Фоменко Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи математических наук 1989. **44**, №1. 145–173.
4. А.Т.Фоменко, Х.Цишанг Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Известия АН СССР. 1990. **54**, №3. 546–575.
5. А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2. (Монография). // Издательский дом "Удмуртский университет Ижевск 1999.

дуга	пара камер	в $\mathbb{R}^3(\bar{J})$	$a_0 < a < 0$ $b \neq 0$	$a < a_0$ $b \neq 0$	$a > 0$ $b \neq 0$	$a > 0$ $b = 0$	$a < 0$ $b = 0$	$a = 0$ $b \neq 0$
γ_2	$2 \rightarrow 4$	A	$A \times S^1$	$A \times S^1$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
γ_4	$4 \rightarrow 2$	A	$A \times S^1$	$A \times S^1$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
γ_5	$3 \rightarrow 5$	A	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$A \times S^1$	\emptyset	$A \times S^1$
δ_5	$5 \rightarrow 3$	B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$B \times S^1$	\emptyset	$B \times S^1$
ξ_5	$5 \rightarrow 2$	S^1	\emptyset	$2S^1 \times A$	\emptyset	$2S^1 \times X_{\parallel}$	$2S^1 \times A$	$2S^1 \times X_U$
ξ_6	$3 \rightarrow 4$	S^1	\emptyset	$S^1 \times A$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
γ_6	$3 \rightarrow 1$	A	\emptyset	\emptyset	$A \times$	\emptyset	\emptyset	\emptyset
δ_4	$1 \rightarrow 3$	B	\emptyset	\emptyset	$B \times$	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Таблица 4: Случай $k_{cusp} < 0$: аналоги 3-атомов для дуг, входящих в Σ при некоторых значениях $(a, b) \neq (0, 0)$.

6. Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. **191**, №2. 3–42.
7. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.-Л. 1949. **2**. 152–309.
8. Комаров И.В. Базис Ковалевской для атома водорода // ТМФ 1981. **47**, №1. 67–72
9. Хагигатдуст Г., Ошемков А.А. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ // Матем. сб. 2009. **200**, №6. 119–142.
10. Д.В. Новиков Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ // Матем. сб. 2014. **205**, №8. 41–66.
11. I.K. Kozlov The topology of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // Sb. Math. 2014. **205**, №4. 532–572.
12. Kibkalo V.A. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // Sb. Math. 2019. **210**, №5. 625–662.
13. Kibkalo V. Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(3, 1)$ // Topol. and its Appl. 2020. **275**. 107028.
14. Fedoseev D.A., Fomenko A.T. Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // J. Math. Sc. 2020. **248**. 810–827.
15. Е.А. Кудрявцева Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // ДАН 2012. **445**, №4. 383–385.
16. Новиков Д.В. Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ // Матем. сб. 2011. **202**, №5. 127–160.
17. Николаенко С.С Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сб. 2020. **211**, №8. 68–101.
18. Николаенко С.С Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности // Чебышевский сб. 2021. Т. **22**, №5. 185–197.
19. В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, №4. 20–67.
20. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. of Math. Phys. 2016. **23**, №4. 431–454.
21. Kibkalo V.A. Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras, Moscow University Mathematics Bulletin // Moscow University Mechanics Bulletin 2020. **75**, №6. 263–267
22. Кибкало В.А. Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской // Чебышевский Сборник 2023. **24**, в печати.
23. Алтуев М.К., Кибкало В.А. Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых зна-

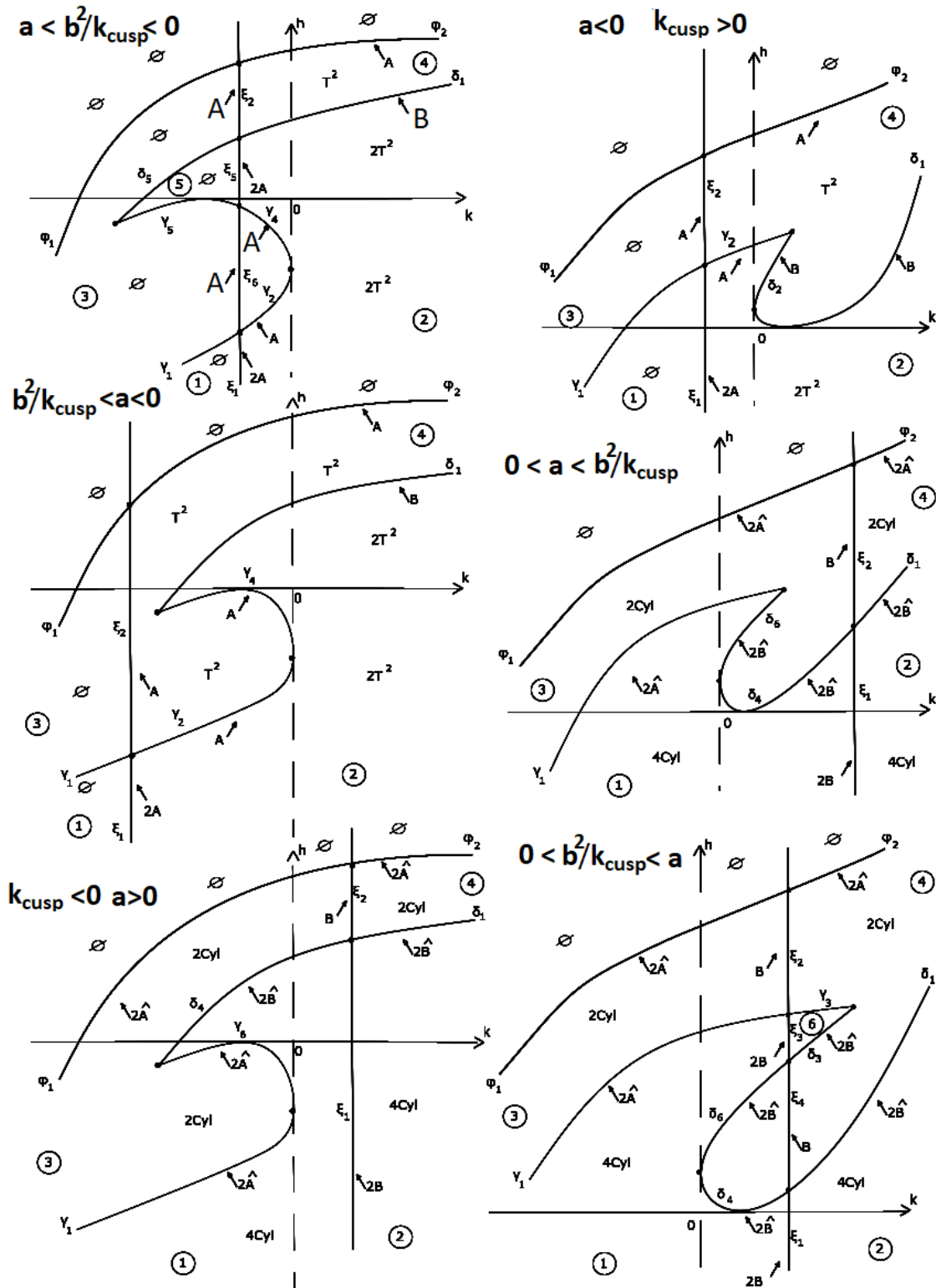


Рис. 3: Бифуркационные диаграммы отображения (K, H) для различных значений $ab \neq 0$, и $k_{cusp} \neq 0$.

чениях параметров // Матем. сб. 2023. **214**, №3. 54–70

24. *Bolsinov A. V., Guglielmi L., Kudryavtseva E. A.* Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom // *Phil. Trans. Royal Soc. A: Math., Phys. Engin. Sc.* 2018. **376**, №2131. 20170424.

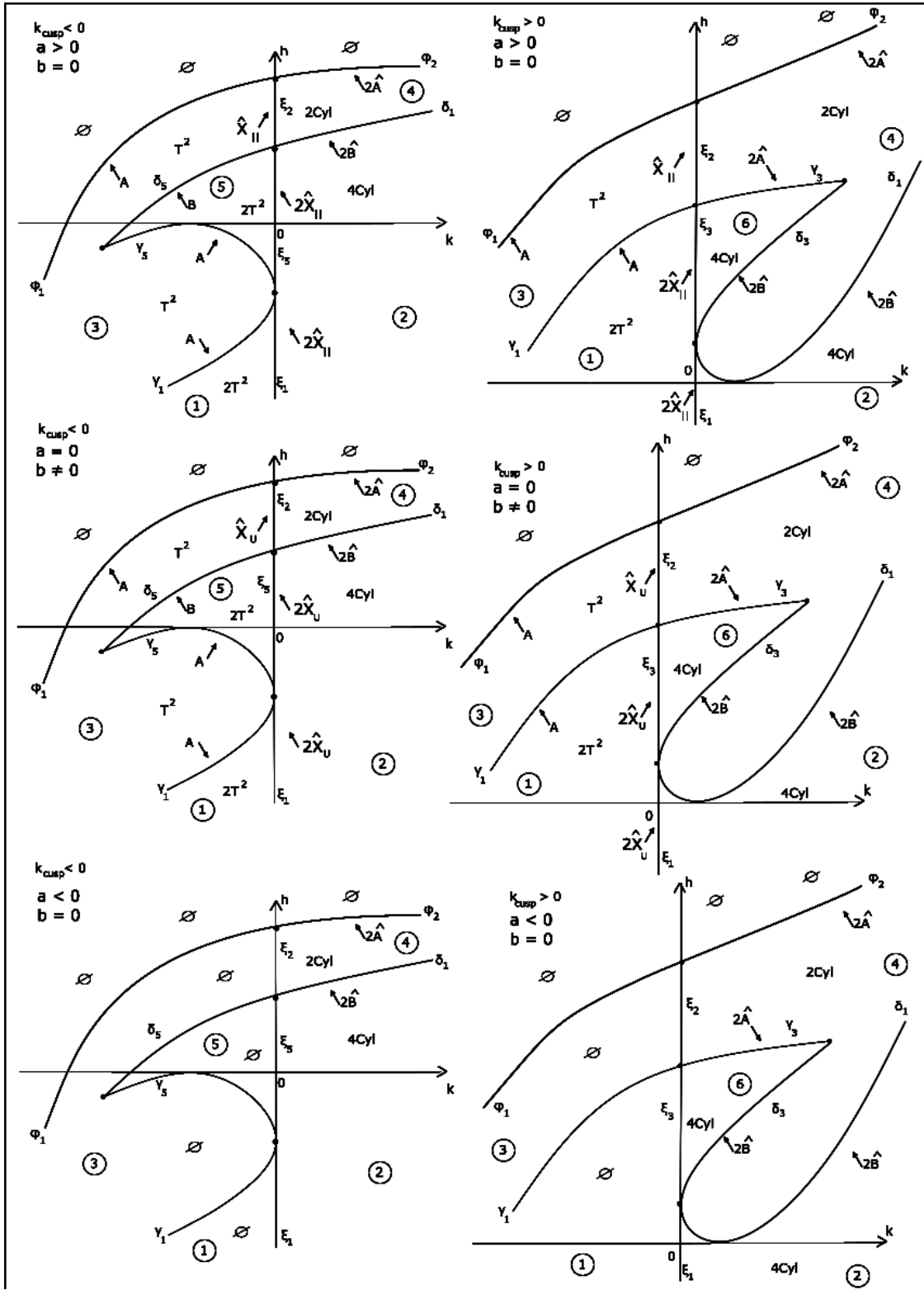


Рис. 4: Бифуркационные диаграммы отображения (K, H) для различных значений $ab = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$ и $k_{cusp} \neq 0$.

25. Кибкало В.А. Параболичность вырожденных особенностей в осесимметричных системах Эйлера с гироскатом // Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех., 2023. 1, №1. 25–32