М.М.Вотякова, Д.С.Миненков

Асимптотики собственных функций типа шепчущей галереи для оператора Лапласа в трехмерной области, диффеоморфной тору.

Аннотация. Рассматривается спектральная задача для оператора Лапласа в трехмерной области, диффеоморфной тору и не являющейся фигурой вращения. Для этой задачи ищутся асимптотические функции типа шепчущей галереи. При условии наличия трех масштабов (два характерных радиуса кривизны и область локализации волновых функций) в адиабатическом приближение можно асимптотически разделить переменные (используется метод операторного разделения переменных), после чего задача сводится к трем одномерным.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа с однородными условиями Дирихле на границе в трехмерной области $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, диффеоморфной полноторию.

$$-\Delta u = \lambda^2 u,\ (x,\, y,\, z) \in T, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \lambda \gg 1. \tag{1.1}$$

Эта задача обобщает результаты, полученные в [1] на случай области, не являющейся фигурой вращения. Допустим, что граница области задана с помощью направляющей (гладкой замкнутой кривой $\Gamma = \{x(t)\}$, где $t \in [0, |\Gamma|]$ – натуральный параметр) и гладкой замкнутой кривой $\gamma(t)$ в сечении $\omega(t)$, ортогональном кривой Γ. Пусть толщина области (связанная с характерной длиной d кривой $\gamma(t)$) много меньше минимального радиуса кривизны направляющей $R_0 \sim L = |\Gamma|$: $\varepsilon = d/L \ll 1$. Благодаря наличию трех масштабов (два характерных радиуса кривизны и область локализации волновых функций) в адиабатическом приближение можно асимптотически разделить переменные (используется метод операторного разделения переменных), после чего задача сводится к трем одномерным (см. [2, 3]).

Эффект шепчущих галерей в акустике известен давно и изучался сэром Джорджем Бидделлом Эйри [4], лордом Рэлеем [5] и сэром Чандрасекхарой Венкатой Раманом [6]. Этот эффект возникает, когда волны распространяются внутри ограниченной области, а волны с определенными частотами распространяются вдоль границы. Такое поведение при распространении волн встречается в разных областях и моделях физики. Этот эффект возникает в акустических трехмерных задачах со сложной геометрией [7, 8]. В оптике моды шепчущей галереи возникают в трехмерных микрорезонаторах различных форм [9, 10, 11, 12, 13]. Тороидальные резонаторы играют очень важную роль [10, 11], но из-за трудностей в производстве поперечное сечение в таких резонаторах обычно представляет собой некоторую выпуклую область, которая не обязательно является идеальным круглым диском. С другой стороны, различные формы таких микрорезонаторов приводят к другим важным свойствам; например, резонаторы с клиньями изучались в [12, 13].

Основной подход в изучении эффекта шепчущей галереи приводит к собственным задачам для оператора Лапласа или оператора Гельмгольца [14, 15, 16, 17] внутри некоторой области с гладкой и выпуклой границей. Известно, что собственные функции оператора Лапласа, локализованные вблизи границы, соответствуют большим собственным значениям. Поставленная таким образом задача на собственные для оператора Лапласа может быть изучена с использованием полуклассического подхода. Известно [18, 19, 20], что этот подход позволяет аппроксимировать дискретный спектр оператора. Однако также известно, что в общем случае построенная таким образом полуклассическая функция не аппроксимирует действительную собственную функцию, а аппроксимирует комбинацию действительных собственных функций. По этой причине такие полуклассические асимптотики называются квазимодами [20].

Существует много различных работ, посвященных изучению квазимод для лапласана. Нас особенно интересуют квазимод типа шепчущей галереи, и, как мы уже говорили, такие квазимоды локализованы в окрестности границы. В двумерном случае асимптотика для таких функций достаточно хорошо изучена, см., например, [14, 15, 16, 17, 21].

Трехмерный случай гораздо сложнее по сравнению с двумерной ситуацией, и работ, посвященных изучению квазимод типа шепчущей галереи для лапласиана, немного. Исследование локализованных квазимод для лапласиана было дано в основном в выпуклых областях [14, 22, 23, 24]. С физической точки зрения, как уже было отмечено выше, также очень важно исследование локализованных собственных функций внутри полнотора [10, 11, 12, 13]. В этом случае квазимоды могут быть локализованы не вблизи всей границы, а лишь в окрестности ее части (точнее, в некоторой трубчатой окрестности границы).

Перейдем в задаче (1.1) к ортонормированным координатам (см. [БеловДоброхотовТудоровский, п.4.6]) $x \to (t, y_1, y_2)$: $x = Lx(t) + y, y = d(y_1 n_1(x) + y_2 n_2(x))$, компоненты метрического тензора будут $g_{00} = G^2 = (1 - K(t)\langle y, n\rangle)^2; g_{11} = g_{22} = 1; g_{ij} = 0, i \neq j$, так что оператор Лапласа принимает вид:

$$-\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial t}G\frac{\partial}{\partial t}u - \Delta_y u = Eu. \tag{1.2}$$

Будем рассматривать состояния с большой энергией $E = \tilde{E}\lambda^2 \gg 1$ типа шепчущей галереи, т.е. локализованные в малой окрестности границы $\partial\Omega$. В этом случае естественно перейти к координатам s, r – натуральный параметр вдоль γ и расстояние от границы внутрь области. Получится $\tilde{g}_{00} = (1 - K(t)\langle y, n\rangle)^2 = H_t^2, g_{rr} = 1 = H_r^2, g_{ss} = (1 - rk(s))^2 = H_s^2, J = (1 - K(t)\langle y, n\rangle)(1 - rk(s))$:

$$-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial t}\frac{J}{G}\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial r}J\frac{\partial}{\partial r}u - \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial s}\frac{J}{(1-rk(s))^2}\frac{\partial}{\partial s}u = \tilde{E}\lambda^2 u. \tag{1.3}$$

Перейдем к безразмерным переменным: $t = L\tilde{t}, \tilde{t} \in [0,1]; s = d\tilde{s}, \tilde{s} \in [0, S(\tilde{t}) \asymp 1]; r = d\tilde{r}, \tilde{r} = O(h^\alpha)$ тогда функции кривизны пересчитаются так $K(t) = (1/L)\tilde{K}(t), \tilde{K}(\tilde{t}) = LK(L\tilde{t}) = O(1), \tilde{K}^{(n)}(\tilde{t}) = O(1)$; $k(s) = (1/d)\tilde{k}(\tilde{s}), \tilde{k}(\tilde{s}) = dk(d\tilde{s}) = O(1), \tilde{k}^{(n)}(\tilde{s}) = O(1)$. Считая отношение масштабов $d/L = \varepsilon \ll 1$ малым и вводя малый (безразмерный) квазиклассический параметр h: $d\lambda = h \ll 1$, получим (опуская "тильды") безразмерное уравнение (где все характерные масштабы изменения независимых переменных и коэффициентов, а также производные, все порядка единицы при $\varepsilon, h \to 0$, при этом зависимые переменные – быстро меняющиеся функции):

$$-h^2\varepsilon^2\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial t}\frac{J}{G^2}\frac{\partial}{\partial t}u - h^2\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial r}J\frac{\partial}{\partial r}u - h^2\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial s}\frac{J}{(1-rk(s))^2}\frac{\partial}{\partial s}u = Eu, \tag{1.4}$$

$$G = 1 - \varepsilon K(t)\langle y, n\rangle, \quad J = (1 - \varepsilon K(t)\langle y, n\rangle)(1 - rk(s)). \tag{1.5}$$

С учетом быстрой зависимости u от координат (т.е., $(-ih\partial_{t,s,r})^n u = O(1), n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$) и медленной зависимости якобиана J, замена зависимой переменной $u = v/\sqrt{J}$ позволит избавиться от коэффициентов J:

$$-h^2\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{G^2}\frac{\partial}{\partial t}v - h^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v - h^2\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{(1-rk(s))^2}\frac{\partial}{\partial s}v = Ev + O(h^2). \tag{1.6}$$

Будем искать решения, локализованные у границы: $r = h^\alpha\rho$:

$$-h^2\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{G^2}\frac{\partial}{\partial t}v - h^2\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{(1-h^\alpha\rho k(s))^2}\frac{\partial}{\partial s}v - h^{2-2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}v = Ev + O(h^2), \tag{1.7}$$

$$G = 1 - \varepsilon K(t)\langle\gamma(s), n\rangle - \varepsilon h^\alpha\rho K(t)\langle\gamma''(s)/k(s), n\rangle = 1 - \varepsilon K(t)\langle\gamma(s), n\rangle - \varepsilon h^\alpha\rho K(t)\langle n_\gamma(s), n_\Gamma(t)\rangle. \tag{1.8}$$

$$G = 1 - \varepsilon\varkappa_1(s,t) - \varepsilon h^\alpha\rho\varkappa_2(s,t), \quad \varkappa_1(s,t) := K(t)\langle\gamma(s), n(t)\rangle, \quad \varkappa_2(s,t) = K(t)\langle\gamma''(s)/k(s), n(t)\rangle. \tag{1.9}$$

Теперь хорошо видно, что в задаче присутствуют три разных масштаба: длины волн вдоль переменных $\rho, s, t = O(1)$ – соответственно $h^{1-\alpha}, h, h\varepsilon$. Можно применить каскадное разделение переменных и построить асимптотику, решая три одномерные задачи. Именно, сначала $v = \hat{\chi}(\rho)w(s,t,h)$, потом $w = \hat{\eta}(s)\psi(t,\varepsilon)$.

Обозначим импульсы $\hat{p}_t = -ih\varepsilon\partial_t = -ih^2\partial_t, \hat{p}_s = -ih\partial_s, \hat{p}_\rho = -i\partial_\rho$ и разложим коэффициенты в ряд по малым параметрам:

$$\hat{H} = \hat{p}_t(1 + \varepsilon K(t)\langle\gamma(s), n(t)\rangle + \varepsilon h^\alpha\rho K(t)\langle\frac{\gamma''(s)}{k(s)}, n(t)\rangle + \varepsilon^2(K(t)\langle\gamma(s), n(t)\rangle)^2)\hat{p}_t + \tag{1.10}$$

$$+ \hat{p}_s(1 + 2h^\alpha\rho k(s) + 6h^{2\alpha}\rho^2 k(s)^2 + 24h^{3\alpha}\rho^3 k(s)^3)\hat{p}_s + h^{2-2\alpha}\hat{p}_\rho^2 + O(\varepsilon^2 h^{2\alpha} + h^{4\alpha}) \tag{1.11}$$

$$\hat{H} = \left(1 + \varepsilon K(t)\langle\gamma(s), n(t)\rangle + \varepsilon h^\alpha\rho K(t)\langle\frac{\gamma''(s)}{k(s)}, n(t)\rangle + \varepsilon^2(K(t)\langle\gamma(s), n(t)\rangle)^2\right)\hat{p}_t^2 + \tag{1.12}$$

$$+ (1 + 2h^\alpha\rho k(s) + 6h^{2\alpha}\rho^2 k(s)^2 + 24h^{3\alpha}\rho^3 k(s)^3)\hat{p}_s^2 - 2ih^{1+\alpha}\rho k'(s)\hat{p}_s + h^{2-2\alpha}\hat{p}_\rho^2 + O(h^{1+2\alpha}); \tag{1.13}$$

$$\hat{H} = \left(1 + 2\varepsilon\varkappa_1 + 6\varepsilon^2\varkappa_1^2 + 24\varepsilon^3\varkappa_1^3 + 120\varepsilon^4\varkappa_1^4 + 2\varepsilon h^\alpha\rho\varkappa_2 + 12\varepsilon^2 h^\alpha\rho\varkappa_1\varkappa_2\right)\hat{p}_t^2 + \tag{1.14}$$

$$+ (1 + 2h^\alpha\rho k(s) + 6h^{2\alpha}\rho^2 k(s)^2)\hat{p}_s^2 + h^{2-2\alpha}\hat{p}_\rho^2 + O(h^{1+\alpha} + h^\alpha\varepsilon^3 + \varepsilon^5) = \tag{1.15}$$

$$= \left(\frac{1}{(1-\varepsilon\varkappa_1)^2} + 2\varepsilon h^\alpha\rho\varkappa_2 + 12\varepsilon^2 h^\alpha\rho\varkappa_1\varkappa_2\right)\hat{p}_t^2 + (1 + 2h^\alpha\rho k(s) + 6h^{2\alpha}\rho^2 k(s)^2)\hat{p}_s^2 + h^{2-2\alpha}\hat{p}_\rho^2 + O(\ldots). \tag{1.16}$$

Здесь уже видно, что "естественное" значение для $\alpha = 2/3$, когда слагаемые, связанные с ρ имеют одинаковый порядок: $h^\alpha = h^{2-2\alpha} = h^{2/3}$. Положим также для простоты $\varepsilon = h^{1/3}$ (чем больше ε, тем меньше поправок потребуется для определения главного члена). Будем квантовать символ оператора $\hat{H}$ по правилу:

$$\hat{H} = \hat{H}(\rho, \frac{\partial}{\partial\rho}, \overset{2}{s}, \overset{1}{\hat{p}_s}, \overset{2}{t}, \overset{1}{\hat{p}_t}, h), \quad H = H_0 + h^{2/3}H_{2/3} + hH_1 + h^{4/3}H_{4/3} + O(h^{5/3}). \tag{1.17}$$

Символы равны:

$$H_0 = \frac{1}{(1-\varepsilon\varkappa_1(s,t))^2}p_t^2 + p_s^2, \quad H_{1/3} = 0, \tag{1.18}$$

$$H_{2/3} = -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + 2\rho\big(k(s)p_s^2 + (\varepsilon\varkappa_2(s,t) + 6\varepsilon^2\varkappa_1(s,t)\varkappa_2(s,t))p_t^2\big), \tag{1.19}$$

$$H_1 = 0, \tag{1.20}$$

$$H_{4/3} = 6\rho^2 k(s)^2 p_s^2. \tag{1.21}$$

Воспользуемся адиабатическим приближением (в форме операторного разделения переменных), будем искать асимптотику в виде: $v(\rho,s,t,h) = \hat\chi(\rho,h)w(s,t,h)$, где быстроменяющаяся функция ψ определяется из уравнения $\hat L w(s,t,h) = Ew(s,t,h)$, а операторы $\hat\chi$ и $\hat L$ определяются из уравнения на операторы, которое сводится к уравнению на символы:

$$\hat H\hat\chi = \hat\chi\hat L, \tag{1.22}$$

$$H(\rho,\frac{\partial}{\partial\rho},s,p_s - ih\frac{\partial}{\partial s},t,\hat p_t - ih\varepsilon\frac{\partial}{\partial t})\chi(\rho;s,p_s,t,p_t) = \chi(\rho;s,p_s - ih\frac{\partial}{\partial s},t,p_t - ih\varepsilon\frac{\partial}{\partial t})L(s,p_s,t,p_t). \tag{1.23}$$

Разложим символы $\chi = \sum_{n=0}^\infty h^{n/3}\chi_{n/3}, L = \sum_{n=0}^\infty h^{n/3}L_{n/3}$, получим цепочку уравнений (при "замороженных" s,p_s,t,p_t):

$$h^0: \qquad (H_0(s,p_s,t,p_t) - L_0(s,p_s,t,p_t))\chi_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad L_0 = H_0, \tag{1.24}$$

$$h^{1/3}: \qquad (H_{1/3} - L_{1/3})\chi_0 + (H_0 - L_0)\chi_{1/3} = 0, \quad \Rightarrow \quad L_{1/3} = 0, \tag{1.25}$$

$$h^{2/3}: \qquad (H_{2/3} - L_{2/3})\chi_0 \equiv -\chi_0''(\rho) + \rho\chi_0(\rho)A^3 - L_{2/3}\chi_0(\rho) = 0, \tag{1.26}$$

$$A^3 = A(s,p_s,t,p_t)^3 \equiv 2k(s)p_s^2 + 2\varepsilon\varkappa_2(s,t)p_t^2 + 12\varepsilon^2\varkappa_1(s,t)\varkappa_2(s,t)p_t^2,$$

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + O(\varepsilon^3) = \sqrt[3]{2kp_s^2} + \varepsilon\sqrt[3]{2kp_s^2}\frac{1}{2}\frac{\varkappa_2 p_t^2}{kp_s^2} + O(\varepsilon^2).$$

$$\Longrightarrow \qquad \chi_0(\rho,s,p_s,t,p_t) = c_0\mathbf{Ai}(A\rho - \theta_n), \qquad \mathbf{Ai}(-\theta_n) = 0,\ n\in\mathbb{N}, \tag{1.27}$$

$$L_{2/3}(s,p_s,t,p_t) = \theta_n A^2 = \theta_n(2k(s)p_s^2 + 2\varepsilon\varkappa_2(s,t)p_t^2 + 12\varepsilon^2\varkappa_1(s,t)\varkappa_2(s,t)p_t^2)^{2/3} = \tag{1.28}$$

$$= \theta_n 2^{2/3}k^{2/3}p_s^{4/3}(1 + \frac{2}{3}\varepsilon\frac{\varkappa_2 p_t^2}{k^2p_s^2} + \frac{2}{3}\varepsilon^2\frac{6\varkappa_1\varkappa_2 p_t^2}{k^2p_s^2} - \frac{2}{9}\varepsilon^2\frac{\varkappa_2^2 p_t^4}{k^4p_s^4}) + O(\varepsilon^3), \tag{1.29}$$

"Константа" $c_0 = c_0(s,p_s,t,p_t)$ определяется из условия нормировки:

$$\hat\chi^*\hat\chi = \mathbf{Id}, \tag{1.30}$$

$$h^0: \qquad \langle\chi_0,\chi_0\rangle_\rho \equiv \int_0^\infty |\chi_0|^2 d\rho = 1, \quad \Rightarrow \quad c_0(s,p_s,t,p_t) = \frac{\sqrt{A}}{\mathbf{Ai}'(-\theta_n)}, \tag{1.31}$$

$$h^{1/3}: \qquad \langle\chi_{1/3},\chi_0\rangle_\rho \equiv \int_0^\infty \chi_{1/3}\chi_0 d\rho = 0. \tag{1.32}$$

Обозначим $\hat D_\rho \equiv H_{2/3} - L_{2/3} \equiv -\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (\rho A^3 - L_{2/3})$, чтобы построить главный член асимптотики, нужно найти χ_0 и вычислить символ L с точностью до $O(h^{5/3})$; поправки $L_1, L_{4/3}$ (и последующие) определяются из условий совместности неоднородных уравнений на $\chi_{1/3}, \chi_{2/3}$ (и так далее) для оператора $\hat D_\rho$:

$$h^1: \qquad \hat D_\rho\chi_{1/3} = -(H_1 - L_1)\chi_0 + i(H_{0p_s}\chi_{0s} - L_{0s}\chi_{0p_s}) = \tag{1.33}$$

$$= L_1\chi_0 + iB(s,p_s,t,p_t)(\frac{1}{A}\rho\chi_{0\rho} + \frac{1}{2A}\chi_0), \quad B = 2A_sp_s - 2\varepsilon\varkappa_{1s}A_{p_s}p_t^2 + O(\varepsilon^2); \tag{1.34}$$

$$h^{4/3}: \qquad \hat D_\rho\chi_{2/3} \equiv -(H_{4/3} - L_{4/3})\chi_0 - (H_1 - L_1)\chi_{1/3} + i(H_{0p_s}\chi_{1/3,s} - \chi_{1/3,p_s}L_{0s}), \tag{1.35}$$

Заметим, что слагаемые вроде $H_{0p_t}\chi_{0t}$ и $H_{0,p_t,t}$ имеют порядок $O(h^{5/3})$ и не влияют на главный член. Решение $\chi_{1/3}$ легко подбирается и поправка L_1, получаемая из условия совместности ($\chi_{1/3} \in \mathcal{D}_\rho = \{\chi_{1/3}(\rho), \rho\in[0,\infty)$:

$\chi_{1/3}(0)=0, \lim_{\rho\to\infty}\chi_{1/3}(\rho)=0\}$, именно, правая часть $F_1(\rho)$ должна быть ортогональна $\langle F_1(\rho),\chi_0(\rho)\rangle_\rho=0)$, можно также выписать явно:

$$\hat{D}_\rho\chi_0 \equiv -\chi_0''(\rho)+(\rho A^3-L_{2/3})\chi_0(\rho)=0, \quad L_{2/3}(s,p_s)=\theta_n A(s,p_s)^2, \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\hat{D}_\rho\chi_0)\equiv\hat{D}_\rho(\chi_0')+A^3\chi_0=0, \quad \chi_0'\notin\mathcal{D}_\rho; \tag{1.37}$$

$$\hat{D}_\rho(\rho\chi_0)\equiv\rho\hat{D}_\rho\chi_0-2\chi_0'=-2\chi_0', \quad \rho\chi_0\in\mathcal{D}_\rho; \tag{1.38}$$

$$\hat{D}_\rho(b_1\rho^2\chi_0)\equiv b_1(\rho^2\hat{D}_\rho\chi_0-2\chi_0-4\rho\chi_0')=-2b_1\chi_0-4b_1\rho\chi_0', \quad \rho^2\chi_0\in\mathcal{D}_\rho; \tag{1.39}$$

$$\chi_{1/3}=b_1\rho^2\chi_0+c_1\chi_0, \quad c_1=-b_1\frac{8\theta_n^2}{15A^2}. \tag{1.40}$$

(Константа $c_{1/3}$ определяется из вышеуказанного условия нормировки $\langle\chi_{1/3},\chi_0\rangle_\rho=0$.) Учитывая эти соотношения, получаем

$$L_1=H_1+O(\varepsilon^2)=O(\varepsilon^2), \quad b_1=-i\frac{B}{4A}, \quad \chi_{1/3}=-i\frac{B}{4A}\big(\rho^2-\frac{8\theta_n^2}{15A^2}\big)\chi_0. \tag{1.41}$$

Теперь $L_{4/3}$ определяется из условия совместности (сама функция $\chi_{2/3}$ для главного члена не нужна и даже $\chi_{1/3}$ мы нашли лишь для определения $L_{4/3}$):

$$\|\chi_0\|_\rho^2=1, \quad \langle\chi_{1/3},\chi_0\rangle_\rho=0, \quad \langle\rho^2\chi_0,\chi_0\rangle_\rho=\frac{8\theta_n^2}{15A^2}, \quad \langle\rho\chi_{0\rho},\chi_0\rangle_\rho=-\frac{1}{2}, \quad \langle(\rho^2-\frac{8\theta_n^2}{15A^2})\rho\chi_{0\rho},\chi_0\rangle_\rho=-\frac{8\theta_n^2}{15A^2};$$

$$L_{4/3}=\langle H_{4/3}\chi_0\ ,\ \chi_0\rangle_\rho-i\langle(H_{0p_s}\chi_{1/3,s}-\chi_{1/3,p_s}L_{0s})\ ,\ \chi_0\rangle_\rho=6k(s)^2p_s^2\langle\rho^2\chi_0,\chi_0\rangle_\rho-2ip_s\langle\chi_{1/3,s},\chi_0\rangle_\rho= \tag{1.42}$$

$$=6k(s)^2p_s^2\langle\rho^2\chi_0,\chi_0\rangle_\rho-2p_sA_s\frac{4B\theta_n^2}{15A^4}\|\chi_0\|_\rho^2-2p_s\frac{A_s}{A}\frac{B}{4A}\langle(\rho^2-\frac{8\theta_n^2}{15A^2})\rho\chi_{0,\rho},\chi_0\rangle_\rho+O(\varepsilon)= \tag{1.43}$$

$$=6k(s)^2p_s^2\frac{8\theta_n^2}{15A^2}-2p_sA_s\frac{4B\theta_n^2}{15A^4}+2p_s\frac{A_s}{A}\frac{B}{4A}\frac{8\theta_n^2}{15A^2}+O(\varepsilon)=6k(s)^2p_s^2\frac{8\theta_n^2}{15A^2}-p_sA_s\frac{4B\theta_n^2}{15A^4}+O(\varepsilon)= \tag{1.44}$$

$$=\frac{8\theta_n^2}{5(2k)^{2/3}}(2k^2-\frac{1}{27k^2})p_s^{2/3}+O(\varepsilon). \tag{1.45}$$

Окончательно для редуцированного двумерного уравнения (по s,t) получаем:

$$L(s,p_s,t,p_t,h)=\frac{1}{(1-\varepsilon\varkappa_1(s,t))^2}p_t^2+p_s^2+h^{2/3}\theta_n2^{2/3}k^{2/3}p_s^{4/3}(1+\frac{2}{3}\varepsilon\frac{\varkappa_2p_t^2}{k^2p_s^2}+\frac{2}{3}\varepsilon^2\frac{6\varkappa_1\varkappa_2p_t^2}{k^2p_s^2}-\frac{2}{9}\varepsilon^2\frac{\varkappa_2^2p_t^4}{k^4p_s^4})+ \tag{1.46}$$

$$+h^{4/3}\frac{8\theta_n^2}{5(2k)^{2/3}}(2k^2-\frac{1}{27k^2})p_s^{2/3}+O(h^{5/3}); \tag{1.47}$$

$$L_0=p_t^2+\hat{p}_s^2, \tag{1.48}$$

$$L_{1/3}=\frac{1}{\varepsilon}(\frac{1}{(1-\varepsilon\varkappa_1)^2}-1)p_t^2=\varkappa_1\frac{2-\varepsilon\varkappa_1}{(1-\varepsilon\varkappa_1)^2}p_t^2; \tag{1.49}$$

$$L_{2/3}=\theta_n2^{2/3}k^{2/3}p_s^{4/3}(1+\frac{2}{3}\varepsilon\frac{\varkappa_2p_t^2}{k^2p_s^2}+\frac{2}{3}\varepsilon^2\frac{6\varkappa_1\varkappa_2p_t^2}{k^2p_s^2}-\frac{2}{9}\varepsilon^2\frac{\varkappa_2^2p_t^4}{k^4p_s^4}); \tag{1.50}$$

$$L_1=0, \tag{1.51}$$

$$L_{4/3}=\frac{8\theta_n^2}{5(2k)^{2/3}}(2k^2-\frac{1}{27k^2})p_s^{2/3}. \tag{1.52}$$

К уравнениям $\hat{L}^nw^n=E^nw^n$ (для каждой моды n отдельно, так что индекс n можно не указывать) можно также применить операторное разделение $w(s,t,h)=\hat{\eta}(s,h)\psi(t,h\varepsilon)$, где оператор $\hat{\eta}(s,h):=\eta(\overset{2}{t},\overset{1}{\hat{p}_t};s,h)$ будет быстро зависеть от s $((-ih\frac{\partial}{\partial s})^k\eta=O(1))$, а функция ψ будет "очень быстро" зависеть от t $((-ih\varepsilon\frac{\partial}{\partial t})^kw=O(1))$ и определяется из уравнения $\hat{M}\psi:=M(\overset{2}{t},\overset{1}{\hat{p}_t},h)\psi=E\psi$.

Повторяя процедуру, аналогичную определению символов χ, L, получаем цепочку уравнений для символов $\eta(t,p_t,s,h)=\eta_0(t,p_t)+h^{1/3}\eta_{1/3}+...,M(t,p_t,h)=M_0(t,p_t)+h^{1/3}M_{1/3}+...$ $(\eta\in\mathcal{D}_s:=\{\eta\in C^\infty([0,S(t)]),\eta(s)=$

$\eta(s+S(t))\}$):

$$L(s,-ih\frac{\partial}{\partial s},t,p_t-ih\varepsilon\frac{\partial}{\partial t},h)\eta(s;t,p_t,h)=\eta(s;t,p_t-ih\varepsilon\frac{\partial}{\partial t},h)M(t,p_t,h);$$
$$\hat{p}_s^2\eta_0(s,h)=(M_0(t,p_t)-p_t^2)\eta_0(s,h)=0,\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad M_0=p_t^2+\mu_m^2,\quad \mu_m=h\frac{2\pi}{S(t)}m,\quad m\in\mathbb{N},\quad 2\pi mh=a\asymp 1;\quad \eta_0(s;t,h)=S(t)^{-1/2}e^{\frac{i}{h}\mu_m(t)s};$$
$$\hat{D}_s\eta_{1/3}:=(\hat{p}_s^2-\mu_m^2)\eta_{1/3}(s,h)=(M_{1/3}-L_{1/3})\eta_0,\quad L_{1/3}(s)\eta_0(s)=\sum_{j\in\mathbb{N}}f_je^{\frac{i}{h}\mu_js},\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \frac{M_{1/3}(t,p_t)}{S(t)}=\oint L_{1/3}(s)|\eta_0(s)|^2ds=f_m(t,p_t),\quad \eta_{1/3}(s,t,p_t)=-\sum_{j\neq m}\frac{f_j(t,p_t)}{\mu_j^2(t)-\mu_m^2(t)}e^{\frac{i}{h}\mu_j(t)s};$$
$$\hat{D}_s\eta_{2/3}=(M_{2/3}-L_{2/3})\eta_0+(M_{1/3}-L_{1/3})\eta_{1/3}=\sum_{j\neq m}g_je^{\frac{i}{h}\mu_js},\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \frac{M_{2/3}(t,p_t)}{S(t)}=\oint L_{2/3}(s)|\eta_0(s)|^2+(M_{1/3}-L_{1/3}(s))\eta_{1/3}(s)\overline{\eta_0(s)}ds,\quad \eta_{2/3}(s)=-\sum_{j\neq m}\frac{g_j}{\mu_j^2-\mu_m^2}e^{\frac{i}{h}\mu_js};$$
$$\hat{D}_s\eta_1=M_1\eta_0+(M_{2/3}-L_{2/3})\eta_{1/3}+(M_{1/3}-L_{1/3})\eta_{2/3}=\sum_{j\neq m}h_je^{\frac{i}{h}\mu_js},\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \frac{M_1(t,p_t)}{S(t)}=h_m,\quad \eta_1(s)=-\sum_{j\neq m}\frac{h_j}{\mu_j^2-\mu_m^2}e^{\frac{i}{h}\mu_js};$$
$$\hat{D}_s\eta_{4/3}=(M_{4/3}-L_{4/3})\eta_0+(M_1-L_1)\eta_{1/3}+...+iL_{0p_t}\eta_{0t}=\sum_{j\neq m}l_je^{\frac{i}{h}\mu_js}\quad\Rightarrow\quad\frac{M_{4/3}(t,p_t)}{S(t)}=l_m.$$

Уравнение на $\psi(t)$ имеет вид:

$$\hat{M}\psi\equiv\big(\hat{p}_t^2+\varepsilon M_{1/3}(\overset{2}{t},\overset{1}{\hat{p}_t})+...+\varepsilon^4M_{4/3}(\overset{2}{t},\overset{1}{\hat{p}_t})\big)\psi=E\psi,\quad \psi(t)\in\mathcal{D}_t=C^\infty([0,T])\bigcup\{\psi(t)=\psi(t+T)\},\tag{1.53}$$

его асимптотика ищется в виде

$$\psi(t)=(\varphi(t)+O(\varepsilon))\exp\{\frac{i}{\varepsilon h}(\Phi_0(t,E)+\varepsilon\Phi_{1/3}(t,E)+\varepsilon^2\Phi_{2/3}(t,E)+\varepsilon^3\Phi_1(t,E)\},\tag{1.54}$$

а асимптотические собственные числа ищутся из условий квантования

$$\Phi(T,E,\varepsilon)=\Phi_0(T,E)+...+\varepsilon^3\Phi_1(T,E)=2\pi hl,\quad l\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}.\tag{1.55}$$

Theorem 1. *Найденные пары* (E_{nml},v_{nml}), *где*

$$v_{nml}=\hat{\chi}_0\hat{\eta}_0\psi(t)=\chi_0(\rho,\overset{6}{s},\overset{5}{\hat{p}_s},\overset{4}{t},\overset{3}{\hat{p}_t})\eta_0(s,\overset{2}{t},\overset{1}{\hat{p}_t})\psi(t)=\chi_0(\rho,s,\mu_{nm}(t),\overset{2}{t},\overset{1}{\hat{p}_t})\big[\frac{1}{\sqrt{S(t)}}e^{\frac{i}{h}\mu_{nm}(t)s}\psi(t)\big]=\tag{1.56}$$

$$=\frac{\sqrt{A}}{\mathbf{Ai}'(-\theta_n)}\mathbf{Ai}(A\rho-\theta_n)|_{A=A(s,\mu_{nm}(t))}e^{\frac{i}{h}\mu_{nm}(t)s}\psi(t)(1+O(\varepsilon)).\tag{1.57}$$

являются квазимодами задачи (1.6), *т.е. при подстановке дают малую невязку.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны С.Ю. Доброхотову, В.А. Кибкало и С.А. Сергееву за ценные замечания. Работа выполнена в рамках гранта РНФ 22-71-10106.

Список литературы

[1] D. Minenkov, S. Sergeev,, “Asymptotics of the Whispering Gallery-Type in the Eigenproblem for the Laplacian in a Domain of Revolution Diffeomorphic To a Solid Torus”, *Russ. J. Math. Phys.*, **30** (2023), 599–620.

[2] Маслов В.П., *Операторные методы (введение в функ. анализ)*, Наука, М., 1973.

[3] S. Yu. Dobrokhotov, "Maslov's Methods in the Linearized Theory of Gravitational Waves on a Liquid Surface", *Sov. Phys. Dokl.*, **28** (1983), 229–231; *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **269**:1 (1983), 76–80.

[4] Sir George Biddell Airy, *On Sound and Atmospheric Vibrations with the Mathematical Elements of Music*, London Cambridge, Macmillan, 1871.

[5] Lord Rayleigh, "The Problem of the Whispering Gallery", *Philos. Mag.*, **20** (1910), 1001-1004.

[6] C. V. Raman, G. A. Sutherland, *On the Whispering-Gallery Phenomenon*, **100**, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1922.

[7] B. G. Katsnelson, P. S. Petrov, "Whispering Gallery Waves Localized Near Circular Isobaths in Shallow Water", *JASA*, **146** (2019), 1965–1978.

[8] P. S. Petrov, X. Antoine, "Pseudodifferential Adiabatic Mode Parabolic Equations in Curvilinear Coordinates and Their Numerical Solutions", *J. Of Computational Physics*, **410** (2020), 109392.

[9] M. Sumetsky, "Lasing Microbottles", *Light Sci Appl*, **6** (2017).

[10] M. Foreman, J. Swaim, F. Vollmer, "Whispering Gallery Mode Sensors", *Adv. Opt. Photon.*, **7** (2015), 168–240.

[11] S. Suebka, E. McLeod, J. Su, "Ultra-High-Q Free Space Coupling to Microtoroid Resonators", *arXiv:2308.00726v1 [physics.optics], https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.00726*, 2023.

[12] H. Lee, T. Chen, J. Li, et al., "Chemically Etched Ultrahigh-Q Wedge-Resonator on a Silicon Chip", *Nature Photonics*, **6** (2012), 369–373.

[13] T. J. Kippenberg, J. Kalkman, A. Polman, K. J. Vahala, "Demonstration of an Erbium-Doped Microdisk Laser on a Silicon Chip", *Phys. Rev. A*, **74**:5 (2006), 051802.

[14] J. B. Keller, S. I. Rubinow, "Asymptotic Solution of Eigenvalue Problems", *Annals of Physics*, **9** (1960), 24–75.

[15] V. M. Babich, V. S. Buldyrev, "Asymptotic Methods in Short-wavelength Diffraction Theory", *Softcover reprint of the original 1st ed. 1972 edition*, 2011.

[16] N. Ya. Kirpichnikova, "Uniform Asymptotics of Eigenfunctions of Whispering Gallery Type", *J. Math Sci*, **19** (1982), 1366–1372.

[17] V. F. Lazutkin, "The Asymptotics of the Eigenfunctions of the Laplace Operator, Concentrated Near the Boundary of a Region", *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **7**:6 (1967), 37–52.

[18] V. F. Lazutkin, *KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions*, Springer-Verlag, 1993.

[19] V. F. Lazutkin, "Semiclassical Asymptotics Eigenfunctions", *Partial Differ. Eq. V. Asymptotic Methods for Partial Differential Equations*, 1999.

[20] V. I. Arnold, "Modes and Quasimodes", *Func. Anal. Its Appl.*, **6** (1972), 94–101.

[21] B.-T. Nguyen, D. S. Grebenkov, "Localization of Laplacian Eigenfunctions in Circular, Spherical, and Elliptical Domains", *SIAM J. Appl. Math.*, **73**:2 (2013), 780–803.

[22] G. S. Popov, "Quasimodes for the Laplace Operator and Glancing Hypersurfaces", *Microlocal Analysis and Nonlinear Waves, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Volume 30, Ed. Michael Beals, R. Melrose and J. Rauch*, 1991.

[23] M. M. Popov, "A New Concept of Interference-Type Surface Waves for Smooth Strictly Convex Surfaces Embedded in Three-Dimensional Space", *Scientific seminar Notes of St.-Petersburg Math. Institute*, **493** (2020), 301–313.

[24] M. M. Popov, "On the Coordination of the Integral Asymptotics of Surface Waves of the Interference Type with the Wave Field of Their Source", *Scientific seminar Notes of St.-Petersburg Math. Institute*, **493** (2020), 314–322.

[25] V. P. Maslov, M. V. Fedoriuk, *Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics*, Springer, Softcover reprint of the original 1st ed. 1981 edition, 2001.

[26] R. E. Peierls, *Quantum theory of Solids*, Clarendon Press, Oxford, 2001.

[27] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, "Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках. I. Редукция к пространственно-одномерным уравнениям", *ТМФ*, **141:2** (2004), 267–303.