Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов с проскальзыванием

В.Н. Завьялов, Москва

МГУ имени М.В.Ломоносова

1 Введение

Задача об описании движения материальной точки внутри компактной области с абсолютно упругим отражением от границы (угол падения равен углу отражения) называется математическим биллиардом. Интегрируемость биллиарда в эллипсе была замечена в работе Дж. Д. Биркгофа [1]. Все звенья траектории-ломаной биллиарда внутри эллипса лежат на касательных к некоторой квадрике, софокусной с граничным эллипсом. Из этого можно сделать вывод о том, что помимо длины вектора скорости сохраняется также параметр софокусной квадрики, поэтому биллиард внутри эллипса является интегрируемой системой. В книге [2] В.В. Козлова и Д.В. Трещёва было доказано, что интегрируемость биллиарда сохранится, если биллиардная граница будет представлять замкнутую кусочно-гладкую кривую, состоящую из дуг эллипсов и гипербол из одного софокусного семейства, с углами излома равными $\frac{\pi}{2}$.

Далее В.В. Ведюшкиной в работе [4] была предложена конструкция топологического биллиарда. Суть топологических биллиадов состоит в том, чтобы склеивать плоские биллиардные столы по граничным сегментам. Частица, попадая на границу какого-то "листа" после отражения продолжает движение по другому листу. В работе [5] В.В. Ведюшкиной были классифицированы все топологические биллиарды.

В данной работе мы будем работать в рамках теории топологической классификации интегрируемых систем, построенной А.Т. Фоменко и его научной школы (подробнее в работе А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [3]). Инвариант Фоменко-Цишанга, то есть граф-молекула с числовыми метками, классифицирует интегрируемые гамильтоновы системы с невырожденными особенностями на трехмерных уровнях энергии относительно лиувиллевой эквивалентности. Напомним, что две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы.

В той же работе В.В. Ведюшкиной [5] для всех топологических биллиардов был вычислен инвариант Фоменко-Цишанга.

В работе [9] А.Т. Фоменко был предложен новый класс биллиардов, названных биллиардами с проскальзыванием. Частица, попадая на границу такого биллиарда, отражается и выходит из другой точки, полученной посредством изометрии границы. Например, для биллиарда в эллипсе, частица будет выходит из точки граничного эллипса диаметрально противоположной точке, в которую частица попала на границе. С помощью биллиардов с проскальзыванием удалось развить результаты работы [10], где биллиардами на столах-комплексах были промоделированы интегрируемые геодезические потоки на двумерных сфере S^2 и торе T^2, на случай неориентируемых двумерных многообразий. Напомним, что в аналитической категории, согласно знаменитому результату В.В.Козлова [6], интегрируемые геодезические потоки на двумерном многообразии M^2 существуют только если это многообразие есть сфера S^2, тор T^2, проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ и бутылка Клейна Kl^2.

В настоящей работе будут рассмотрены топологические биллиарды с проскальзыванием, а также вычислены, соответствующие им, инварианты Фоменко-Цишанга.

2 Топологические биллиарды с проскальзыванием

Стандартные биллиардные системы описывают движение точки внутри области с естественным отражением на границе, допускающей конечное число изломов с углом $\frac{\pi}{2}$. Фиксируем координаты (x, y) на проскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство софокусных квадрик с центром в начале координат

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda), \qquad \lambda \leq a.$$

Биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик, является интегрируемым, поскольку траектории касаются некоторой софокусной квадрики, одной и той же для всех отрезков траектории.

Напомним конструкцию склейки двух биллиардов вдоль общей границы, введенную В. В. Ведюшкиной в работе [11]. Пусть два биллиарда имеют общую границу и на плоскости располагаются относительно этой границы с одной стороны. Склеим области биллиардов вдоль дуг их границ по их изометриям. Материальная точка при движении по одному листу биллиарда после удара о границу склейки продолжит двигаться в области другого биллиарда. В случае, если склеиваемые биллиарды – плоские биллиардные области, а результат склейки – ориентируемое многообразие, то это определение склейки топологического биллиарда, введенное В.В. Ведюшкиной.

Рассмотрим плоские области, ограниченные дугами квадрик софокусного семейства. Параметры дуг внешнего эллипса, которые ограничивают нашу область, всегда будем считать $\lambda = 0$. Также введем обозначение для граничных дуг. Дуги большего эллипса будем называть "внешними эллиптическими", а меньшего — "внутренними эллиптическими". Дуги большей гиперболы будем называть "внешними гиперболическими", а меньшей — "внутренними гиперболическими".

Под эллиптической частью фазового многообразия назовем слои фазового многообразия, которые соответствуют значениям дополнительного интеграла $\Lambda < b$. Под гиперболической частью, соответственно, слои фазового многообразия, которые соответствуют значениям $\Lambda > b$. А соответствующий значению интеграла $\Lambda = b$ слой назовем фокальным уровнем.

Рассмотрим график непрерывной неотрицательной функции w на отрезке $[a, b]$, принимающей на концах отрезка одинаковые значения. Дополнительно положим, что нулевые значения могут приниматься функцией только на концах того же отрезка. Расслоим область под графиком функции на отрезки, образованные пересечением $y = const$ с областью под графиком функции. Стянем каждый отрезок в точку. В результате область, расположенная между графиком и прямой $y = 0$, превратится в дерево.

Сопоставим вершинам полученного графа следующие атомы. Точкам, прообразы при стягивании которых были максимумами функции w, сопоставим атомы A. Всем вершинам, за исключением вершины, которая принимает наименьшее значение, сопоставим атомы B_k, где k – это количество минимумов, через которые проходит соответствующий горизонтальный отрезок (см. рис. 1 для произвольной положительной функции f). В вершину, соответствующую наименьшему значению функции по оси y, сопоставим атом C_k, если в концах отрезка функция принимает ненулевые значения. Назовем такой граф W_2. Иначе сопоставим атом B_k. Такой граф назовем W_1. На всех ребрах таких графов, содержащих атом A, поставим метки $r = 0, \varepsilon = 1$. На остальных поставим метки $r = \infty, \varepsilon = 1$. Метку n на таких графах поставим равной нулю.

Если функция имеет ось симметрии, то построим графы $\widetilde{W_1}$ и $\widetilde{W_2}$, профакторизовав полученные молекулы по имеющейся симметрии. Сместим функцию так, чтобы осью симметрии являлась ось Oy. Склеим два ребра графов, если они симметричны относительно оси. Опишем факторизацию атома B_k.

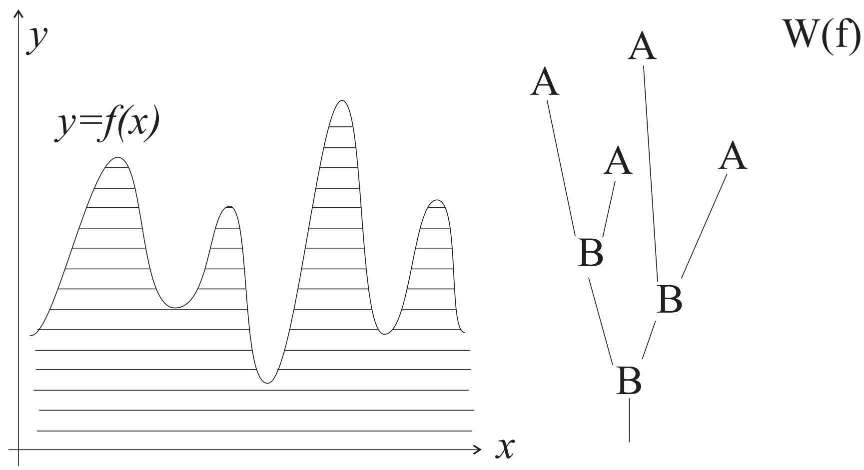


Рис. 1: Построение молекулы по графу функции.

1. Пусть на оси симметрии или на концах отрезка функция имеет локальный максимум или не принимает значение, соответствующее данному атому B_k. В этом случае имеем атом B_{2m}, так как минимум не лежит на оси симметрии, следовательно, число минимумов четно. При факторизации число минимумов уменьшится вдвое, и атом при факторизации перейдет в атом B_m (рис. 2 под буквой a).

2. Пусть либо на оси симметрии либо на концах отрезка функция имеет минимум и принимает ненулевое значение, соответствующее данному атому B_k. Исходя из четности числа минимумов вне оси, получаем, что ось проходит через атом B_{2m+1}. При факторизации атом факторизуется в атом B_m^* (рис. 2 под буквой b).

Нам остается описать факторизацию атомов C_k.

3. Если на оси симметрии и на концах отрезка функция не принимает значение, соответствующее атому C_k, то общее количесто минимумов четно. Количество минимумов уменьшается вдвое, а атом C_{2m} факторизуется в B_m. Далее возможны только случаи 1 или 2 (рис. 2 под буквой c).

4. Если либо на оси симметрии, либо на концах отрезка функция принимает значение, соответствующее атому C_k, то общее количество минимумов на этом уровне нечетно. Тогда на этом уровне будет атом C_{2m+1}, переходящий в B_m^* (рис. 2 под буквой d).

5. Пусть на оси симметрии и на концах отрезка функция принимает значение, соответствующее атому C_k. Следовательно, на этом уровне будет стоять атом C_{2m}. Атом C_{2m} факторизуется в B_m^{**} (рис. 2 под буквой e).

На ребре, которое соответствует максимуму на оси симметрии или конце отрезка, поставим метки $r = \dfrac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Во всех остальных ребрах, соответствующим максимумам, поставим метки $r = 0, \varepsilon = 1$. На остальных поставим метки $r = \infty, \varepsilon = 1$. Метку n на таких графах поставим равной -1.

Биллиарды, используемые в данной работе, представлены на рисунке. Биллиарды серии представляют собой m-листное накрытие над кольцом, которое ограничено двумя софокусными эллипсами. Биллиарды серии B представляют собой биллиарды серии C с вырезом связной области между ветвями двух каких-то гипербол 3. Биллиард $\widetilde{A_0}$ представляет собой несколько биллиардов A_0, склееных последовательно по эллиптическим дугам так, чтобы у двух столов A_0 имелось по эллиптической дуге, не учавствующей в склейке. Биллиард $\widetilde{B}$ определяется аналогично по склейка гиперболических дуг.

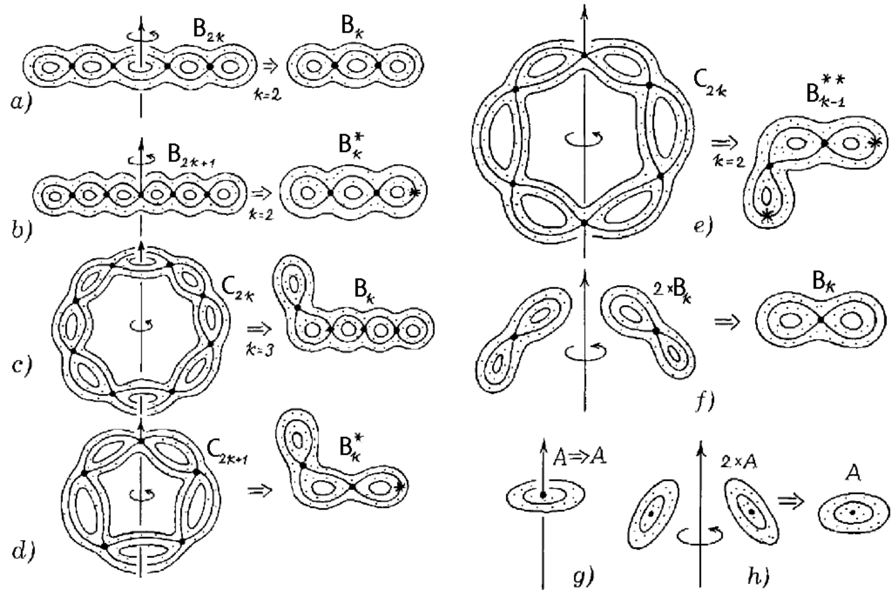


Рис. 2: Факторизация атомов.

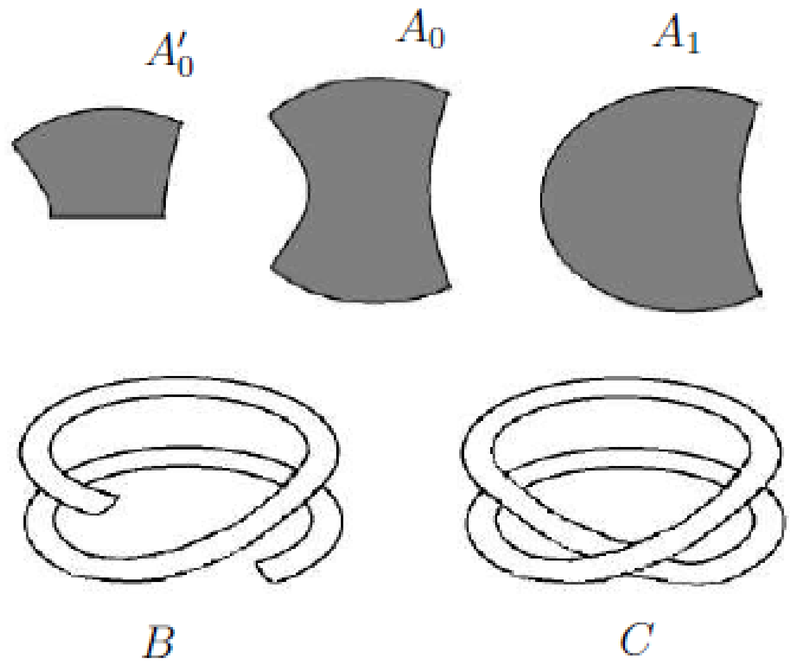


Рис. 3: Биллиардные столы без склеек.

Пусть F - изометрия эллипса, переводящая точку x в диаметрально противоположную ей точку y. С точки зрения самого эллипса это означает поворот радиус-вектора точки x на угол π. Биллиард внутри эллипса с введенной изометрией на границе будем называть *биллиардом с проскальзыванием.*

Как показано в статье [?], такая биллиардная система будет также интегрируема с тем же дополнительным интегралом: поворот на угол π сохранит касание траектории софокусной квадрики, отвечающей данному значению интеграла. Заметим, что точки на дугах эллипса, ко-

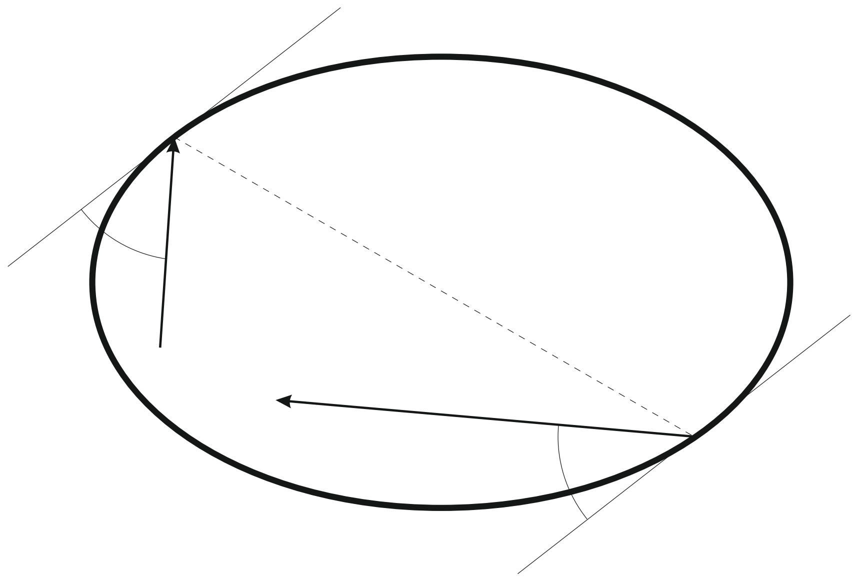


Рис. 4: Движение материальной точки внутри эллипса с проскальзыванием.

торые ограничены одной гиперболой из софокусного семейства, склеены друг с другом данной изометрией. Поэтому у элементарных биллиардов, которые ограничены симметричными относительно центра эллиптическими дугами, можно ввести проскальзывание, как было замечено выше. Также на гиперболе из софокусного семейства проскальзывание можно ввести аналогичным образом путем изометрии гиперболы поворотом на угол π относительно центра.

Если некоторые области, граница которых состоит из 4 дуг софокусных квадрик, склеены последовательно, то приставим одной из них номер 1,а другой $2n$. Далее поставим номер 2 области, которая склеена с областью под номером 1 границе. Продолжим далее расставлять номера областям, пока не дойдем до области с номером $2n$. Это возможно, так как склейка проводилась последовательно. Берем два таких экземпляра. Рассмотрим границы данных областей, которые склеиваются в связную кривую, при данной последовательной склейке. На таких кривых вводим проскальзывание следующим образом: точка, попадая на границу области с номером k, выходит из другого листа с номером $2n-k$ с поворотом на π. Склейка показана наглядно на рис. 5. Черным выделена граница, по которой вводится проскальзывание.

Проскальзывание на дугах будем показывать припиской буквой сверху справа для кодового слова из классификации топологических биллиардов В.В. Ведюшкиной буквой e для проскальзывания на эллиптических дугах, буквой h для проскальзывания на гиперболических дугах и буквой f для проскальзывания на дугах, лежащих на фокальной прямой.

3 Основной результат

Из 52 серий топологических биллиардов в классификации В.В. Ведюшкиной [13] непосредственной проверкой можно убедится, что всего 8 столов имеет достаточную симметрию для введения проскальзывания: $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0}), \Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0}), \Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0}), \Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))_{cc}, \Delta_\alpha(nC_m), \Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1), \Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B}), \Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})_{yy}$. В этих 8 столах всего 12 вариантов вве-

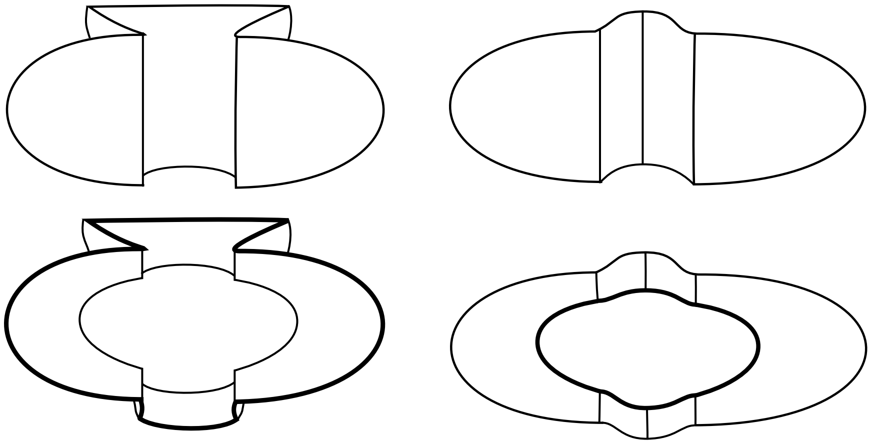
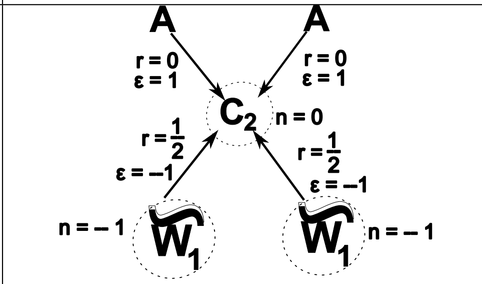
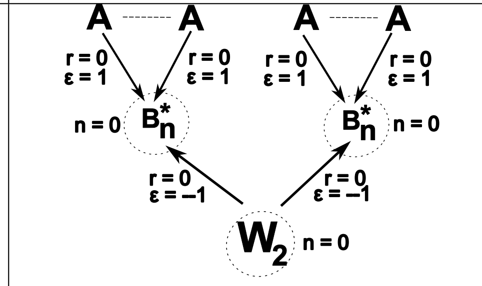
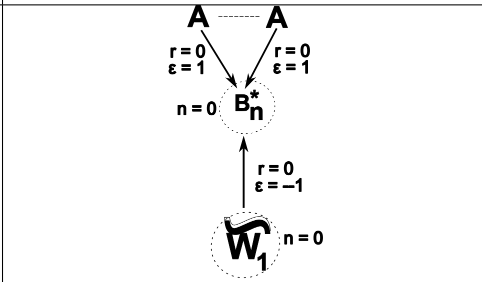
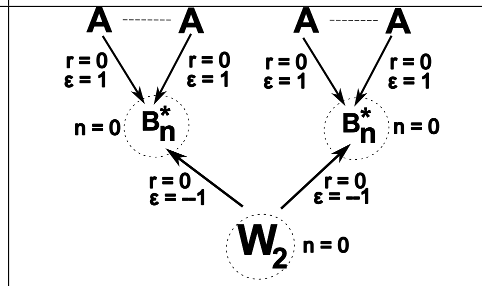
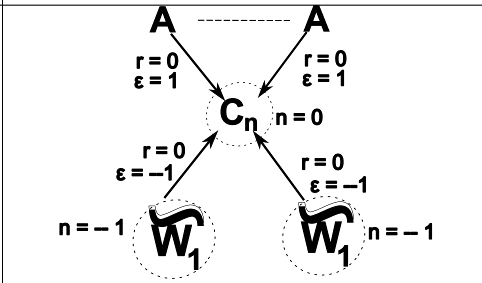
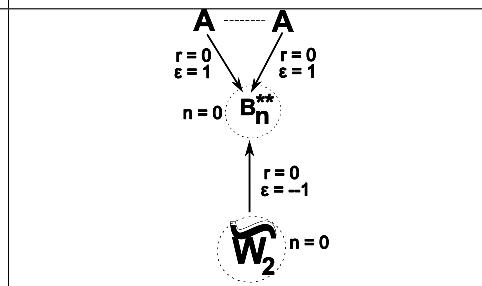
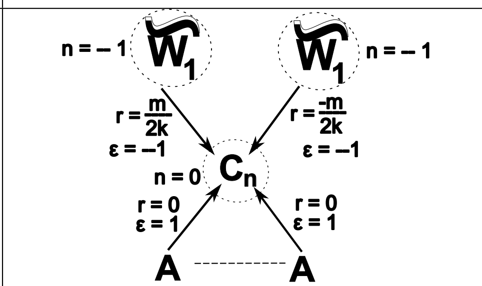
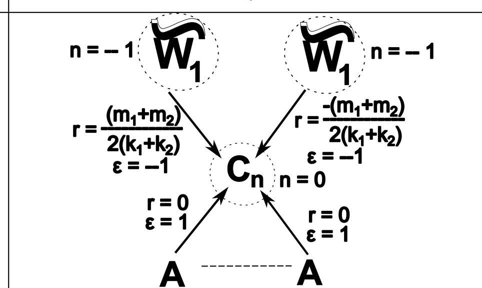
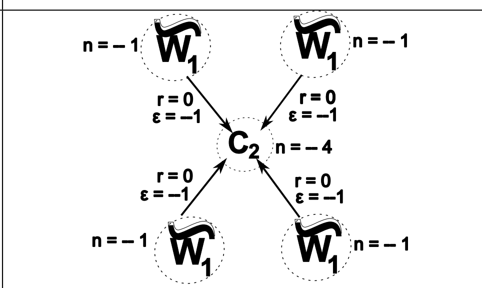
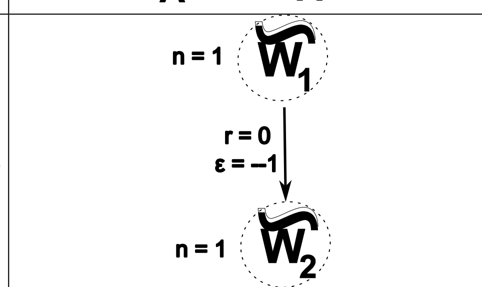
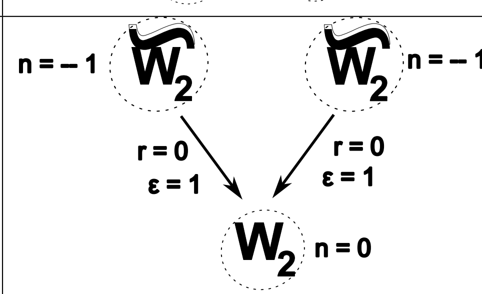
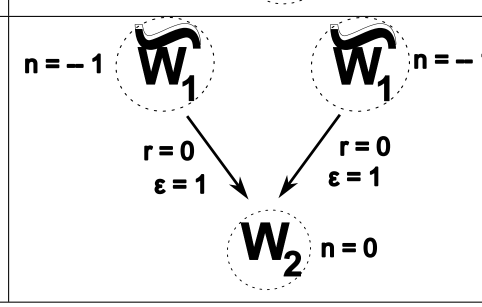


Рис. 5: Наглядная склейка биллиардного стола с проскальзыванием. Черным указаны эллиптические дуги, на которых введено проскальзывание.

дения проскальзывания:$\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^e, \Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^h, \Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^{eh}, \Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})^h, \Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})^e, \Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))^h_{cc}, \Delta_\alpha(nC_m)^e, \Delta_\alpha(nC_m)^{ee}, \Delta_\alpha(A_1+nA_0+2mB_1+2mnB_0+A_1)^e, \Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^e, \Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^{ee}, \Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})^e_{yy}$.

Теорема 1 *Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов с проскальзыванием имеют вид, изображенный в таблице 3.*

Случай	Молекула	Случай	Молекула
$\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^e$		$\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^h$	
$\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^{eh}$		$\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})^h$	
$\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})^e$		$\Delta_{\beta h}(n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))^h_{cc}$	
$\Delta_\alpha(nC_m)^e$		$\Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$	
$\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$		$\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})^e_{yy}$	
$\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^e$		$\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^{ee}$	

Доказательство. Рассмотрим столы, содержащие столы $\widetilde{A_0}$: $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^e$, $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^h$, $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^{eh}$, $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})^h$, $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})^e$, $\Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))^h_{cc}$.

Утверждение 1 *Трехмерный прообраз $\Lambda^{-1}([b-\delta, b+\delta])$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для топологических биллиардов с проскальзыванием, содержащих $\widetilde{A_0}$, гомеоморфен следующим трехмерным многообразиям:*

- *атому C_k для биллиардов $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^e$ и $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})^e$;*
- *двум атомам B_k^* для биллиардов $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^h$ и $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})^h$;*
- *атому B_k^* для биллиарда $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})^{eh}$;*
- *атому B_k^{**} для биллиарда $\Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))^h_{cc}$;*

Доказательство. Для биллиардов типа $\widetilde{A_0}$ заметим, что эллиптическая часть не зависит от количества склееных $\widetilde{A_0}$ вдоль гиперболических границ, поэтому можно описать все для случая одного биллиарда типа $\widetilde{A_0}$.

На всех биллиардах определена каноническая проекция с фазового многообразия на точки биллиардного стола. При выборе циклов на граничных торах 3-атомов мы будем изображать их с помощью проекции на биллиард.

Напомним правила выбора циклов. На граничных торах атомов A в качестве однозначно выбиранного цикла λ выбирается цикл, который стягивается в точку внутри полнотория A. В качестве цикла μ выбирается любой цикл дополняющий его до базиса. При стремлении к особому слою цикл μ переходит в критическую окружность. Это позволяет однозначно определить на нём ориентацию (она должна совпасть с ориентацией критической окружности). На граничных торах седловых атомов циклы λ выбираются гомологичными слоям расслоения Зейферта. Для атомов без звездочек это означает, что они должны быть гомологичны (и сонаправлены) критическим окружностям при достижении торами особого слоя. Циклы μ для атомов без звездочек выбираются как граничные окружности двумерного атома – трансверсального критической окружности сечения 3-атома. Если так поступить для атома со звездочкой, то может возникнуть (и как правило в реальных задачах возникает) следующая ситуация. Возникающие циклы $\hat{\mu}$ могут пересекать цикл λ в двух точках. В нашем случае атома B_k^* на одном торе цикл $\hat{\mu}$ пересечет λ в одной точке, а на другом в двух. Тогда на том торе, где пересечение есть одна точка в качестве базисного цикла μ_s берем $\hat{\mu}$, а на другом – $\frac{\hat{\mu}+\lambda}{2}$ (см. подробнее в книге А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [3]).

Образом критических окружностей при данной проекции фазового многообразия для биллиардов типа $\widetilde{A_0}$ являются фокальные отрезки внутри данного биллиарда. Рассмотрим малое значение $\delta > 0$. Эллипс с параметром $\lambda = b - \delta$ пересекается с биллиардным столом типа $\widetilde{A_0}$ по криволинейным отрезкам, количество которых в два раза больше, чем фокальных отрезков. При устремлении δ к нулю криволинейные отрезки каустик устремятся к фокальным отрезкам, следовательно, их прообразы являются критическими окружностями. Рассмотрим прообразы отрезков каустик. Каждому отрезку каустики соответствует два отрезка в прообразе без учета склеек. В прообразах точек границы происходит склейка. Для границы без склейки в прообразе склеиваются пара точки на границе и каустике с вектором по часовой стрелке и пара с этой же точкой и вектором против часовой стрелки, для ориентированной склейки пара точки с вектором в одном направлении и пары с другой точкой этого же отрезка каустики, лежащей на границе, с вектором в том же направлении, для неориентированной склейки, соответствующей проскальзыванию, направление вектора также сохраняется, а точка заменяется на точку не этой же каустики, а лежащую на каустике с инвертированным числом, при этом повернутую на угол π.

Далее рассмотрим всех биллиарды кроме $\Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))_{cc}^h$, содержащие $\widetilde{A_0}$. Критическая окружность состоит из 2 отрезков, каждый из которых в проекции является отрезком каустики. Для всех биллиардов, содержащих проскальзывание на гиперболических дугах, если число элементарных биллиардов, входящих в состав $\widetilde{A_0}$, нечетно, то на элементарных биллиардах со средним номером проскальзывание переводит одну гиперболическую границу в другую. Поэтому, когда каустика становится фокальным отрезком, отрезки с векторами скорости в одном направлении склеиваются между собой, но они составляют критическую окружность, поэтому точки на этой окружности склеиваются попарно между собой, что соответствует атому со звездочкой. Остальные критические окружности склеиваются попарно между собой. За исключением тора, на котором окружность склеится сама с собой, все торы последовательно склеиваются между собой. Это соответствует атому B_k, если последовательная склейка закончилась не на торе, с которого началась, и атому C_k, если на каждом торе склеилось по две окружности.

Критическая окружность биллиарда $\Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))_{cc}^h$ состоит из 4 таких отрезков. Пусть количество биллиардов $\widetilde{A_0}$ не делится на 4. Тогда происходит аналогичная ситуация со звездами других биллиардов, только здесь будут сразу две таких окружности. Доказательство утверждения окончено.

Утверждение 2 *Метки на эллиптической части для биллиардов типа $\widetilde{A_0}$ определяются следующим образом:*

- $r = \dfrac{1}{2}, \varepsilon = 1$, *если ребро соответствует двум столам $\widetilde{A_0}$, входящим в состав биллиарда, гиперболические дуги которых склеены проскальзыванием, а также они склеены по эллиптической дуге;*
- $r = 0, \varepsilon = 1$, *во всех остальных случаях.*

Доказательство. Циклы λ седловых строятся из отрезков, которые являются прообразами отрезков каустик. Если биллиард не содержит два стола $\widetilde{A_0}$, гиперболические дуги которых склеены проскальзыванием, а также склеенных по эллиптической дуге, то если рассмотреть прообраз вертикальных отрезков между эллиптической границей и каустикой с векторами скорости направленных по часовой стрелке, то они будут образовать окружности на торах. В таком случае эти окружности пересекаются по одной точке с циклами λ. Поэтому эти окружности можно взять в качестве цикла μ седловых атомов. Заметим, что данные циклы μ седловых атомов являются циклами λ атомов A, так как вертикальный отрезок стягивается в точку, когда каустика доходит до эллиптической границы. Поэтому на данных ребрах матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из вида матриц метки имеют вид $r = 0, \varepsilon = 1$.

Так как все критические окружности седловых атомов в гиперболической части гомологичны, значит матрица склейки на ребрах равны $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вклада в метку n здесь нет.

Если биллиард содержит два стола $\widetilde{A_0}$, гиперболические дуги которых склеены проскальзыванием, то на этих столах цикл λ с циклом, состоящего из прообраза вертикального отрезка между эллиптической границей и каустикой с векторами скорости направленных по часовой стрелке имеет пересечение по двум точкам, который при этом является циклом λ атома A. Дополняющий цикл μ и атома A и седлового атома показан на рисунке 6 под буквой a. Тогда матрицы склейки примут вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Из вида матриц метки имеют вид $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Вклад в метку n на данном ребре равен -1. Доказательство утверждения окончено.

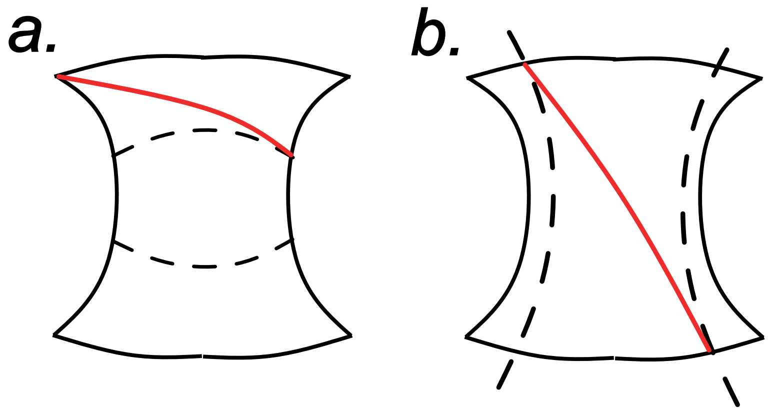


Рис. 6: Схематическое изображение цикла μ для биллиардов, содержащих $\widetilde{A_0}$. Под буквой a показан цикл для эллиптической части, под буквой b для гиперболической.

Заметим, что ориентации циклов μ в эллиптической части согласованы с направлением векторного поля на них. Поэтому у фокального седлового атома в гиперболической части ориентация цикла μ не согласована.

Утверждение 3 *Гиперболическая часть для биллиардных столов, содержащих $\widetilde{A_0}$, представляет собой семьи из атомов в точности, совпадающие с семьями, указанными в таблице 3.*

Для случая гиперболической части применимы аналогичные рассуждения о числе столов A_0, склееных вдоль эллиптических границ. Поэтому будем описывать топологию слоения, заменив биллиард $\widetilde{A_0}$ на биллиард A_0.

Аналогично разделим наше описание на 3 случая: биллиарды, содержащие проскальзывание на эллиптических дугах, биллиарды, не содержащие проскальзывание на эллиптических дугах, биллиард $\Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))^h_{cc}$.

Начнем со второго случая. Заметим, что если нет проскальзывания на эллиптических дугах, тогда критическая окружность в образе состоит только из точек одной ветви каустики на одном из столов. Поэтому все критические окружности седловых атомов гомологичны между собой. Когда каустика доходит до гиперболической дуги, на которой введена склейка, то 2 тора склеиваются по прообразу этой дуги. При уменьшении значения параметра каустики эти торы превращаются в один тор, который соответствует движению по всем столам-образам этих торов. Это соответствует атому B_k. Рассмотрим гиперболическую дугу биллиарда, имеющей наименьшее значение параметра λ. На ней введена склейка. Когда каустика меняет параметр с большего, чем у этой дуги, на малое значение, на меньшее на малое значение торы склеиваются по прообразу этой дуги и переходят в два тора. Это связано с тем, что торы склеиваются последовательно по прообразам таких дуг, но теперь нет каустик меньшего параметра, поэтому на каждом торе происходит последовательная склейка по двум окружностям. Это соответствует атому C_k. Все критические окружности седловых атомов также гомологичны циклам μ атомов A. Следовательно, в гиперболической части таких биллиардов имеем гомеоморфен $W_2(g)$. Циклы λ атомов A образованы из прообразов фокального отрезка между каустик. Заметим, что окружности, в образе лежащие на каустиках, не пересекаются с окружностями, в образе лежащих на фокальном отрезке между каустик. Поэтому все матрицы склейки равны $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и метки $r = 0, \varepsilon = 1$. Вклада в метку n здесь нет.

Первый случай аналогичен описанию области эллиптической части для случаев, когда на гиперболических дугах введено проскальзывание.

У биллиарда $\Delta_{\beta h}(n(A_0' + \widetilde{A_0} + A_0'))^h_{cc}$ ситуация аналогична предыдущим случаям за исключением дуги гиперболы, которая соответствует склейке проскальзыванием. Если проскальзывание вводится не на вертикальной дуге, то ребро между седловым и атомом A, соответствующего данной дуге, имеет метку $r = \dfrac{1}{2}, \varepsilon = 1$ также аналогично предыдущим случаям.

Осталось рассмотреть ребра в гиперболической части, которые идут от ребер, соответствующих значению интеграла $\lambda = b$. Заметим, что цикл λ седлового атома на уровне интеграла $\lambda = b$ в образе проекции состоит из точек на фокальных отрезках. Если критические окружности седловых атомов имеют одно пересечение, то в качестве дополняющего цикла μ можно взять критическую окружность другого атома. Ориентация цикла μ у фокального атома не согласована, а значит не согласована ориентация μ другого атома тоже не согласована. Поэтому матрица склейки равна $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и метки $r = 0, \varepsilon = -1$. Вклада в метку n здесь нет.

Если циклы λ пересекаются по двум точкам, тогда построим цикл μ аналогично ребрам с атомами A, как показано на рисунке 6 под буквой b. Из ориентации циклов μ можно сделать вывод о том, что матрица склейки в таком случае примет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $r = \dfrac{1}{2}, \varepsilon = -1$. Вклад в метку n здесь равен -1. Доказательство утверждения окончено.

Далле рассмотрим 5 классов: $\Delta_\alpha(nC_m)^e$,$\Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$,$\Delta_\alpha(A_1+nA_0+2mB_1+2mnB_0+A_1)^e$,$\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^e$, $\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^{ee}$.

Утверждение 4 *Инварианты Фоменко-Цишанга данных 5 классов биллиардных столов совпадают с инвариантами, указанными в таблице 3.*

В случае, когда каустикой является невырожденный эллипс можно гомеоморфно продеформировать стол в круговые биллиарды. Поэтому в эллиптической части молекула устроена также, как в работе [14]. Для биллиардов $\Delta_\alpha(nC_m)^e$ и $\Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$ проскальзывание можно вводить не только на угол π, но и на углы кратные π. Для m-листного накрытия кольца при обходе границы в направлении часовой стрелки радиус-вектор совершает поворот равный $2m\pi$. Поэтому для проскальзывания на угол $k\pi$ в таких биллиард частица после отражения будет выходить из точки, полученной поворотом на $\dfrac{k}{m}$ от суммарного угла возможного поворота вдоль границы. Такая конструкция уже была рассмотрена автором в работе [15]. Для произвольного угла $k\pi$, используя результаты работы [15], можно вычислить инвариант Фоменко-Цишанга, совпадающий с представленным в таблице 3. Заметим, что в графах-молекулах W_1 метки $r = \dfrac{1}{2}$ в этом случае изменяются на метки $r = \dfrac{y}{m}$, где y является решением диофантова уравнения $mx - yk = 1$. Осталось рассмотреть фокальный уровень и область гиперболической части.

Область гиперболической части биллиарда $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$ совпадает с областью гиперболической части $\Delta_\alpha(\widetilde{A_0})^e$, так как в прообразе границы, на которой не введены склейки, происходит отождествление точек с векторами скорости аналогично отождествлению точек с векторами в прообразе каустики. На фокальном уровне происходит перестройка через прообразы фокальных отрезков происходит двух торов в два тора. Два, соответствующие эллиптической части, склеиваются между собой по двум окружностям и перестраиваются в два тора. Это соответствует 3-атому C_2. Циклы 3-атома C_2 показаны на рисунке 8. Из показанных циклов видно, что матрица склейки равна $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ с учетом ориентации циклов. Отсюда метки $r = 0, \varepsilon = -1$, а вклада в метку n ни одной семьи нет.

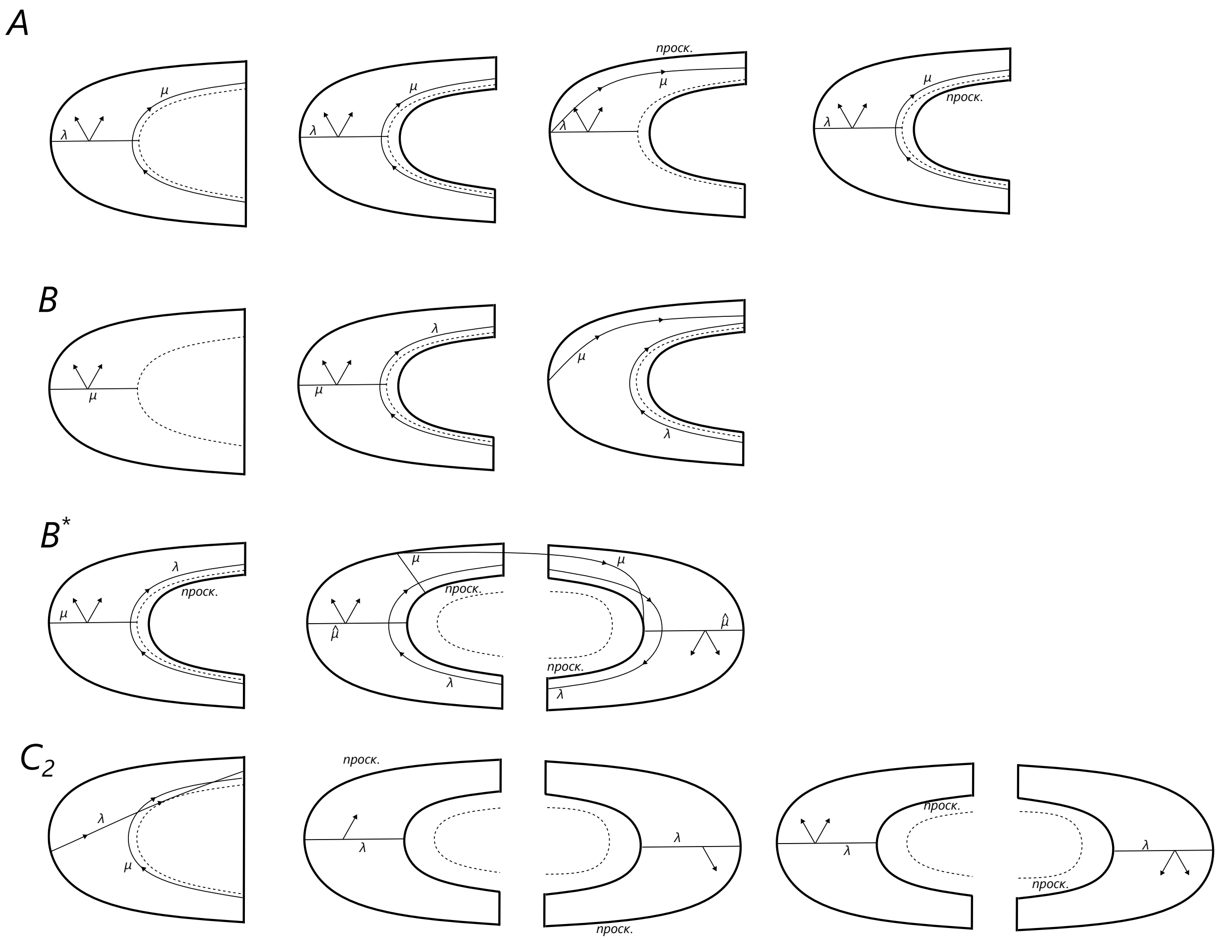


Рис. 7: Циклы биллиарда $\Delta_\alpha(A_1+nA_0+2mB_1+2mnB_0+A_1)^e$, когда каустикой является эллипс.

Так как циклы атомов A в гиперболической части строятся по вертикальным отрезкам, то можно сделать вывод о том, что гиперболическая часть и фокальный уровень биллиардов $\Delta_\alpha(nC_m)^e, \Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$ аналогична случаю этих же столов без проскальзывания.

Теперь рассмотрим область гиперболической части и фокальный уровень биллиардов $\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^e$, $\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^{ee}$. Циклы биллиардов здесь устроены аналогично случаям биллиардов, содержащих A_0. Циклы λ атома A строятся по прообразу отрезка некоторого эллипса, заключенного между ветвями каустики, а циклы λ седловых атомов гиперболической части строятся по прообразу каустик. Так как данные столы не содержат отрезка между фокусами, то критическая окружность на фокальном уровне будет строится по прообразам отрезков на фокальной прямой. Заметим, что в пределе каустики становится подмножеством фокальной прямой. Отсюда можно сделать вывод о том, что циклы λ атома, который соответствует фокальному уровню будут строится по прообразам точек каустики. Следовательно, все критические окружности всех седловых атомов в гиперболической части и фокальном уровне гомологичны. Осталось лишь заметить, что критические окружности атомов A и седловых атомов пересекаются по одной точке, а значит на ребрах между ними циклы λ обоих атомов образуют базис. Все атомы соответствуют последовательной склейке по прообразу некоторой гиперболы, а на фокальной уровне последовательной склейкой несколько торов переходят в два тора. Значит вся гиперболическая часть и фокальный уровень соответствуют классу подмолекул W_2. Доказательство утверждения окончено.

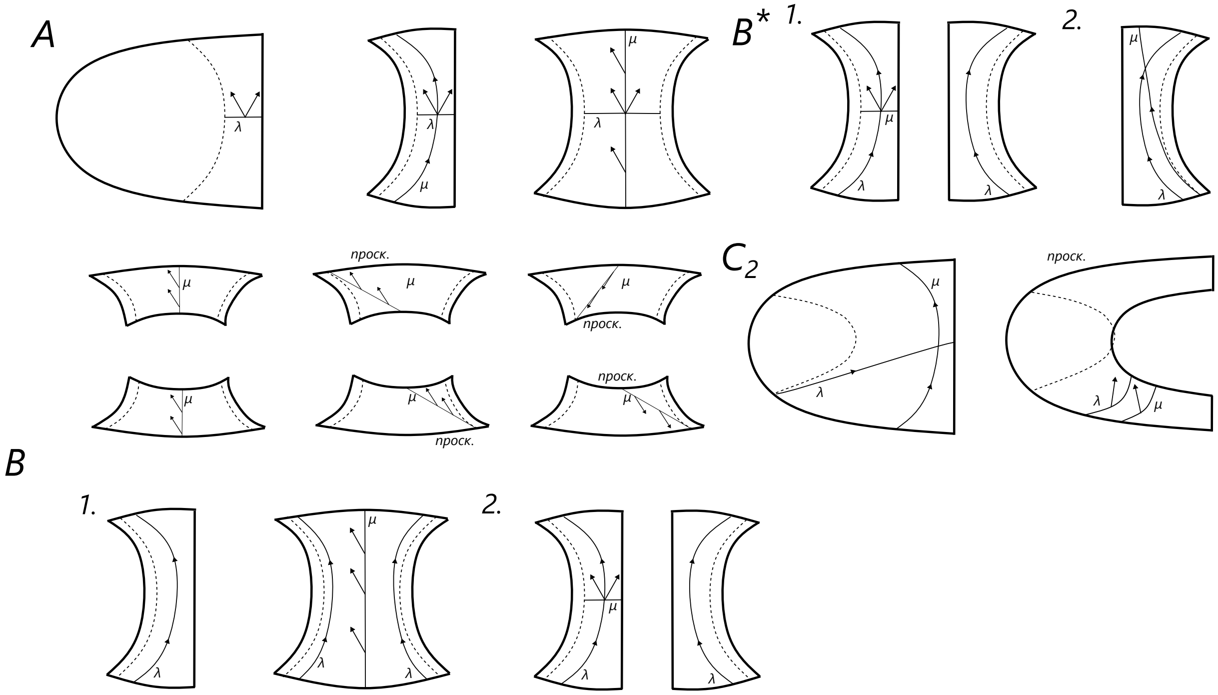


Рис. 8: Циклы биллиарда $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$, когда каустикой является гипербола.

Утверждение 5 *Инварианты Фоменко-Цишанга биллиардного стола $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})^e_{yy}$ совпадает с инвариантом, указанным в таблице 3.*

Рассмотрим биллардный стол склееный из колец в цилиндр так, чтобы у границы этого биллиарда, состоящей из двух эллипсов, один эллипс являлся внутренним для стола (касательная прямая к такому эллипсу пересекает биллиардный стол). На данном внутреннем эллипсе склеим точки симметричные относительно оси Ox. На другом же эллипсе введем проскальзывание. Область эллиптической части такого стола фактически совпадает с эллиптической частью биллиардного стола $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})^e_{yy}$. В данном биллиардном столе вся эллиптическая часть совпадает с эллиптической частью биллиарда без симметричной склейки на одной окружности, за исключением одного значения интеграла, который как раз соответствует данному эллипсу. Прообраз в изоэнергетическом многообразии данного эллипса соответствует склейке двух торов вдоль окружности, в проекции одинаковых, но с векторами скорости разных направлений относительно часовой стрелки. Из этого можно сделать вывод о том, что эллиптическая часть биллиарда $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})^e_{yy}$ представляет собой $\widetilde{W}_1$.

В области гиперболической части ситуация схожа с биллиардным столом, содержащих A_0 с проскальзыванием на эллиптических дугах, так как биллиард A_0 можно "согнуть" пополам, превратив его в два биллиарда $A_0^{`}$ с проскальзыванием на большей эллиптической дуге и склейкой на меньшей. Зависимости от того на эллиптической дуге какого параметра введена склейка для гиперболической части нет. Единственное отличие - наличие склейки на гиперболических дугах. Такая склейка аналогична склейке в биллиарде $\Delta_{\beta h}(n(A'_0+\widetilde{A_0}+A'_0))^h_{cc}$ и приводит к тому, что гиперболическая часть изоэнергетического многообразия гомеоморфна $\widetilde{W_2}$.

Так как биллиард $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})^e_{yy}$ не имеет пересечения с фокусной прямой, то фокальный уровень гомеоморфен двумерному тору. Циклы эллиптической части через гиперболическую часть выражаются с помощью матрицы склейки равной $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответственно, метки $r=0, \varepsilon=1$. Вклад в метки n в обе семьи равен -1. Сделаем замену ориентации Q^3 данного биллиарда. Это приведет к тому, что метка ε на центральном ребре поменяет знак, а метки n изменятся на 1, что в точности совпадает с молекулой, представленной в таблице 3. Доказательство утверждения окончено.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] Дж.Д. Биркгоф, “Динамические системы”, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 408с. (1999); перю с англ.: G.D. Birkhoff, “Dynamical systems”, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **9**, Amer. Math. Soc., New York, (1927);

[2] В.В. Козлов, Д.В. Трещев, “Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами”, Изд-во Моск. ун-та, М., 168с. (1991);

[3] А.В. Болсинов , А.Т. Фоменко, "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.

[4] В.В. Фокичева, “Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., **206**:10, 125-176с. (2015);

[5] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко-Цишанга невыпуклых топологических биллиардов”, Матем. сб., **210**:3, 17-74с. (2019);

[6] В.В. Козлов, “Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем”, Докл. АН СССР, **249**:6 (1979), 1299–1302.

[7] В.В. Козлов, “Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике”, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1995.

[8] А.Т. Фоменко , В.В. Ведюшкина, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 3, 15–25.

[9] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav’yalov, “Liouville foliations of topological billiards with slipping”, Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.

[10] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды”, Изв. РАН. Сер. матем., **83**:6 (2019), 63–103;

V.V. Vedyushkina (Fokicheva) , A.T. Fomenko, “Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards”, Izv. Math. **83**(6), 1137–1173 (2019).

[11] В.В. Фокичева , “Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., **206**:10 (2015), 127–176.

[12] V. V. Fokicheva (Vedyushkina), “Topological classification of integrable billiards”, PhD Thesis, Lomonosov MSU, 2016.

[13] В. В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов”, Матем. сб., **210**:3 (2019)

[14] В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов, “Реализация геодезических потоков с линейным интегралом биллиардами с проскальзыванием”, Матем. сб., **213**:12 (2022)

[15] *В. Н. Завъялов*, “Биллиард с проскальзыванием на любой рациональный угол”, Матем. сб., **214**:9, 3 – 26 (2023).