

Топологическая и комбинаторная классификация топологических бильярдов с проскальзыванием

В.Н. Завьялов, Москва
МГУ имени М.В.Ломоносова

Аннотация

Изучается комбинация двух интегрируемых обобщений классических бильярдов: топологических бильярдов и бильярдов с проскальзыванием. В первом случае, бильярдный стол склеен из плоских областей вдоль границ, ограниченных дугами софокусных квадрик. Во втором, на границе вводится изометричная склейка, которая склеивает центрально-симметричные точки на дугах софокусных квадрик. В настоящей работе для всех топологических бильярдов из классификации В.В. Ведюшкиной были показаны возможные способы введения проскальзывания и вычислены соответствующие инварианты Фоменко–Цишанга лиувиллевой эквивалентности.

Ключевые слова

Интегрируемая система, бильярд, топологический бильярд, проскальзывание, слоение Лиувилля.

1 Введение

Задача об описании движения материальной точки внутри компактной области с абсолютно упругим отражением от границы, при котором угол падения равен углу отражения, называется *математическим бильярдом*. Интегрируемость бильярда в эллипсе, т.е. сохранение вдоль траекторий еще одной величины, независимой с энергией системы, была замечена Дж. Д. Биркгофом в работе [1]. Оказывается, все звенья траектории-ломаной бильярда внутри эллипса лежат на касательных к некоторой квадрике, софокусной с граничным эллипсом. Параметр этой квадрики, выраженный через координаты точки стола и компоненты вектора скорости, является дополнительным первым интегралом такого бильярда. Также известно, что интегрируемость бильярда сохранится, если границей бильярдного стола будет кусочно-гладкой кривой, состоящей из дуг эллипсов и гипербол из одного софокусного семейства, с углами излома, равными $\frac{\pi}{2}$ (см. книгу [2] В.В. Козлова и Д.В. Трещева).

В.В. Ведюшкиной (Фокичевой) в работе [4] была предложена конструкция топологического бильярда. Стол топологического бильярда является кусочно-плоским двумерным многообразием (возможно, имеющим границу), склеенным из областей плоских бильярдов по изометриям их граничных дуг. При ударе о граничную дугу склейки двух листов в ее внутренней точке частица переходит с одного листа на другой. При попадании в коническую точку (в которой сходятся две дуги склейки, отвечающие разным квадрикам) частица после отражения продолжит движение по тому же листу, на котором была до удара.

В дальнейшем, топологические бильярды были обобщены В.В. Ведюшкиной на класс бильярдных книжек [5]. Столы бильярдных книжек представляют собой двумерный клеточный комплекс, где в качестве двумерных клеток выступают плоские столы, ограниченный дугами софокусных квадрик. На каждой такой граничной дуге, вместе с тем являющейся 1-клеткой нашего комплекса, ставится перестановка σ , которая определяет переход материальной точки с листа под номером i на лист с номером $\sigma(i)$. В вершине необходимым и достаточным условием непрерывности бильярдного потока является коммутирование перестановок. Отметим, что отражение в конической точке топологического бильярда является частным случаем условия

коммутирования перестановок. Также для бильярдных книжек было доказано, что изоэнергетическая поверхность является трехмерным топологическим многообразием [3].

Подробнее поговорим о комбинаторной эквивалентности. В работе [4] В.В. Ведюшкиной было введено определение комбинаторной эквивалентности топологических бильярдных столов. Если один стол может быть получен из другого путем: непрерывной деформации граничных дуг в классе софокусных квадратов; разбиения плоского стола на более мелкие плоские столы; симметрией относительно осей. В той же работе относительно комбинаторной эквивалентности столов В.В. Ведюшкиной были классифицированы все топологические бильярдные столы, содержащие только выпуклые склейки, а в работе [6] все топологические бильярдные столы.

В настоящей работе мы будем работать в рамках теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, построенной А. Т. Фоменко и его научной школой (подробнее см. работу А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [7]). *Инвариант Фоменко-Цишанга*, то есть граф-молекула с числовыми метками, классифицирует интегрируемые гамильтоновы системы с невырожденными особенностями на трехмерных компактных уровнях энергии с точностью до Лиувиллево эквивалентности. Напомним, что две интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный гомеоморфизм (т.е. переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы), сохраняющий направление гамильтонова векторного поля на критических окружностях.

В той же работе В.В. Ведюшкиной [6] для всех топологических бильярдных столов был вычислен инвариант Фоменко-Цишанга. Также В.В. Ведюшкиной были рассмотрены бильярдные столы, ограниченные софокусными параболой. В работе [8] были комбинаторно и лиувиллево классифицированы плоские столы, ограниченные софокусными параболой. В.В. Ведюшкиной был решен аналогичный вопрос классификации и для топологических бильярдных столов в классе софокусных [9].

В работе [10] А. Т. Фоменко был предложен новый класс бильярдных столов, названный *бильярдами с проскальзыванием*. Частица, попадая на границу такого бильярда, отражается и выходит из другой точки, полученной посредством изометрии границы. Например, для бильярда в эллипсе, частица будет выходить из точки граничного эллипса диаметрально противоположной той точке, в которую частица попала на границе. С помощью бильярдных столов с проскальзыванием удалось развить результаты работы [11] (в ней бильярдами на столах-комплексах были промоделированы интегрируемые геодезические потоки на двумерных сфере S^2 и торе T^2) на случай неориентируемых двумерных многообразий. Напомним, что в аналитической категории, согласно знаменитому результату В. В. Козлова [12], интегрируемые геодезические потоки на двумерном компактном связном многообразии M^2 существуют, только если M^2 диффеоморфно либо сфере S^2 , либо тору T^2 , либо проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, либо бутылке Клейна Kl^2 .

В работе [13] А.Т. Фоменко сформулировал вопрос о реализации меченых молекул интегрируемых систем подходящими бильярдами. В контексте гипотезы А.Т. Фоменко с помощью бильярдных книжек В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой было доказано, что реализуются произвольные боттовские 3-атомы [5, 14] и база слоения Лиувилля (молекула без числовых меток) [15]. Было получено продвижение в реализации изоэнергетических поверхностей. Построены бильярдные столы, у которых изоэнергетическая поверхность гомеоморфна трехмерному тору, произвольному линзовому пространству $L_{(q,p)}$ для взаимно простых $0 < p < q$ [20] и связным суммам произвольных линзовых пространств $L(q_i, p_i)$ и произведений $S^1 \times S^2$. [21]. Из последнего результата следует, что изоэнергетическая поверхность бильярда необязательно является многообразием Зейферта, так, например, связная сумма трех линз $L(2, 1)$, гомеоморфных трехмерному проективному пространству, таковым не является. Однако полный ответ на гипотезу пока остается неясен. В связи с этим был сформулирован "локальный" вариант гипотезы А.Т. Фоменко о реализации числовых меток [16]. Было доказано, что реализуются произвольные значения

числовых меток r, ε на ребре молекулы [17] и целочисленной метки n на подграфах-“семьях” [18], а также некоторые комбинации меток [19].

При помощи бильярдов в магнитном поле А.Т. Фоменко и В.В. Ведюшкиной удалось реализовать молекулу $A - A$ с метками $r = \infty, \varepsilon = -1$ [22]. А с помощью бильярдов с потенциалом - локальные и полулокальные особенности с положениями равновесия интегрируемых гамильтоновых систем [23],[24].

В настоящей работе будут рассмотрены топологические бильярды с проскальзыванием, а также вычислены, соответствующие им, инварианты Фоменко-Цишанга.

2 Топологические бильярды с проскальзыванием

Стандартные бильярдные системы описывают движение точки внутри области с естественным отражением на границе, допускающей конечное число изломов с углом $\frac{\pi}{2}$. Фиксируем декартовы координаты (x, y) на плоскости \mathbb{R}^2 . Рассмотрим *семейство софокусных квадриков*, с осями лежащими на осях координат:

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda).$$

Здесь $a > b > 0$ — фиксированные числа, а $\lambda \leq a$ — параметр. Как уже было отмечено, бильярд, ограниченный дугами софокусных квадриков, является интегрируемым, поскольку все звенья траектории-ломаной касаются некоторой софокусной квадрики, общей для всех отрезков траектории (или, при особых значениях параметра, проходят через точки фокусов или лежат на оси Oy).

2.1 Топологические бильярды и моделирование ими геодезических потоков на двумерных поверхностях

Напомним конструкцию склейки двух бильярдов вдоль общего сегмента границы, введенную В.В. Ведюшкиной в работе [4]. Пусть два бильярда имеют общий сегмент границы (то есть одинаковые гладкие дуги границ) и на плоскости располагаются относительно этого сегмента с одной стороны. Склеим области бильярдов вдоль общего сегмента по гомеоморфизму между ними. Материальная точка при движении по одному листу бильярда после удара о ребро склейки продолжит движение в “подклеенной” бильярдной области. В случае, если склеиваемые бильярды — плоские бильярдные области, а результат склейки — ориентируемое многообразие, то это определение склейки топологического бильярда, введенное В.В. Ведюшкиной.

Рассмотрим плоские области, ограниченные дугами квадриков софокусного семейства. Параметр дуг внешнего эллипса, ограничивающих нашу область, всегда будем считать равными нулю. Также введем обозначение для граничных дуг. Дуги эллипса, меньшего по параметру, будем называть *внешними эллиптическими*, а большего — *внутренними эллиптическими*. Дуги гиперболы, меньшей по параметру, будем называть *внешними гиперболическими*, а большей — *внутренними гиперболическими*.

Эллиптической частью изоэнергетической поверхности назовем слои изоэнергетической поверхности, которые соответствуют значениям дополнительного интеграла $\Lambda < b$. *Гиперболической частью изоэнергетической поверхности* назовем слои изоэнергетической поверхности,

которые соответствуют значениям $\Lambda > b$. А соответствующий значению интеграла $\Lambda = b$ слой назовем *фокальным уровнем*.

В работе [25] В. Драговичем и М. Раднович были введены упорядоченные бильярдные игры, т.е. системы движения частицы по плоскости с отражениями от эллипсов из упорядоченного набора. В работе [26] ими было показано, что каждая бильярдная книжка в своей гиперболической части моделирует бильярдную игру. Для некоторых семейств таких бильярдных книжек К.Е. Тюриной были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга [27], а также определен класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности [28],[29].

Для классификации слоений Лиувилля топологических бильярдных будет применяться схожий подход, как в моделировании бильярдами геодезических потоков на двумерных поверхностях. В работе по моделированию геодезических потоков на ориентируемых многообразиях [11] по топологическому бильярду строилась кусочно-гладкая функция, аналогичная функции, задающей интегрируемую метрику. По функции, задающей метрику, исходя из классификации геодезических потоков на двумерных многообразиях (см. [7]), строится меченая молекула геодезического потока. В дальнейшем, этот подход также был применен в работе [30] для моделирования геодезических потоков на неориентируемых многообразиях. Опишем построение меченой молекулы по функции.

Рассмотрим график аналитической неотрицательной функции f на отрезке $[a, b]$, принимающей на концах отрезка одинаковые значения. Дополнительно предположим, что нулевые значения могут достигаться только на концах этого отрезка. Расслоим область под графиком функции на отрезки, образованные прямыми $y = \text{const}$. Если, на концах отрезка функция принимает ненулевые значения, то склеим полосу $a \leq x \leq b$ в цилиндр. Тогда некоторые отрезки превратятся в окружности. Стянем каждый отрезок и окружность в точку и рассмотрим полученное фактор-пространство. В результате область, расположенная между графиком и прямой $y = 0$, превратится в граф-дерево.

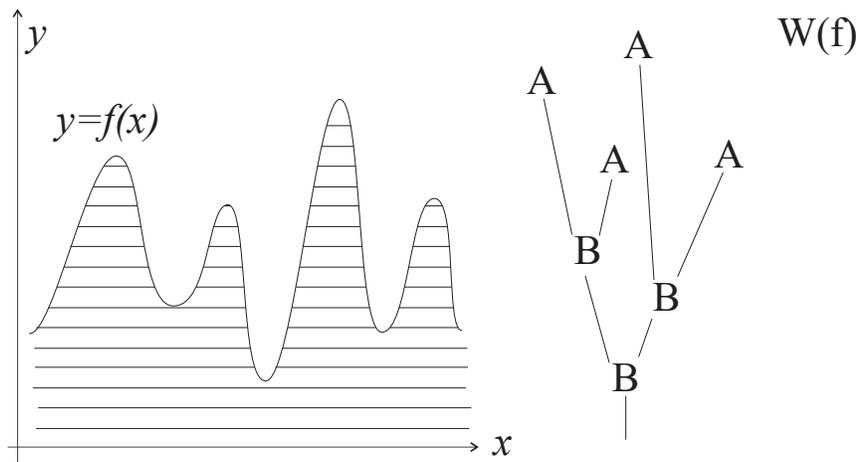


Рис. 1: Построение молекулы по графику функции.

Сопоставим вершинам полученного графа следующие 3-атомы Фоменко. Точкам, отвечающих максимумам функции f , сопоставим 3-атомы A . Всем вершинам, за исключением той, что отвечает наименьшему значению, сопоставим 3-атомы B_k , где k – это количество минимумов, через которые проходит соответствующий горизонтальный отрезок (см. рис. 1 для произвольной положительной функции f). В вершину, отвечающую наименьшему значению функции f , расположим 3-атом C_k , если в концах отрезка функция принимает ненулевые значения, и обо-

значим получившийся граф W_2 . В противном случае расположим в эту вершину 3-атом B_k и обозначим итоговый граф через W_1 . На ребрах полученных графов, инцидентных вершинам с 3-атомами A , поставим метки $r = 0, \varepsilon = 1$. На остальных поставим метки $r = \infty, \varepsilon = 1$. Метку n на таких графах поставим равной нулю.

Если график функции имеет ось симметрии, то количество отрезков, не пересекающих ось симметрии, четно. Если ни один из минимумов функции на одном уровне не лежит на оси симметрии, то имеем 3-атом B_{2m} . Соответственно, если имеется минимум на оси симметрии, то имеем 3-атом B_{2m+1} . Построим графы \widetilde{W}_1 и \widetilde{W}_2 , профакторизовав полученные молекулы по имеющейся симметрии. Сместим функцию так, чтобы осью симметрии являлась ось Oy . То есть будем рассматривать функцию $f(x - (b+a)/2)$. Склеим два ребра графов, если они симметричны относительно оси. Опишем факторизацию 2-атома B_k .

1. Пусть на оси симметрии или на концах отрезка функция имеет локальный максимум или не принимает значение, соответствующее данному 2-атому B_k . В этом случае имеем 2-атом B_{2m} , так как минимум не лежит на оси симметрии, следовательно, число минимумов четно. Атом B_{2m} симметричен относительно центральной особой окружности. При факторизации точки 2-атома, симметричные относительно центра этой окружности склеиваются. Получаем, что 2-атом при факторизации перейдет в 2-атом B_m (рис. 2 под буквой а).

2. Пусть либо на оси симметрии либо на концах отрезка функция имеет минимум и принимает ненулевое значение, соответствующее данному 2-атому B_k . Исходя из четности числа минимумов вне оси, получаем, что ось проходит через 2-атом B_{2m+1} . При факторизации 2-атом факторизуется в 2-атом B_m^* (рис. 2 под буквой b).

Нам остается описать факторизацию 2-атомов C_k .

3. Если на оси симметрии и на концах отрезка функция не принимает значение, соответствующее 2-атому C_k , то общее количество минимумов четно. Количество минимумов уменьшается вдвое, а 2-атом C_{2m} факторизуется в B_m . Далее возможны только случаи 1 или 2 (рис. 2 под буквой с).

4. Если либо на оси симметрии, либо на концах отрезка функция принимает значение, соответствующее атому C_k , то общее количество минимумов на этом уровне нечетно. Тогда на этом уровне будет 2-атом C_{2m+1} , переходящий в B_m^* (рис. 2 под буквой d).

5. Пусть на оси симметрии и на концах отрезка функция принимает значение, соответствующее атому C_k . Следовательно, на этом уровне будет стоять 2-атом C_{2m} . Атом C_{2m} факторизуется в B_m^{**} (рис. 2 под буквой e).

На ребре, которое соответствует максимуму на оси симметрии или конце отрезка, поставим метки $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Во всех остальных ребрах, соответствующим максимумам, поставим метки $r = 0, \varepsilon = 1$. На остальных поставим метки $r = \infty, \varepsilon = 1$. Метку n на таких графах поставим равной -1 .

Биллиарды, используемые в настоящей работе, представлены на рисунке 3. Биллиарды серии C представляют собой m -листное накрытие над кольцом, которое ограничено двумя софокусными эллипсами. Биллиарды серии B получаются из биллиардов серии C вырезом связной области между ветвями двух каких-то гипербол 3. Биллиард \widetilde{A}_0 представляет собой несколько биллиардов A_0 , склеенных последовательно по эллиптическим дугам так, чтобы у двух столов A_0 имелось по эллиптической дуге, не участвующей в склейке. Биллиард \widetilde{B} определяется аналогично по склейке гиперболических дуг.

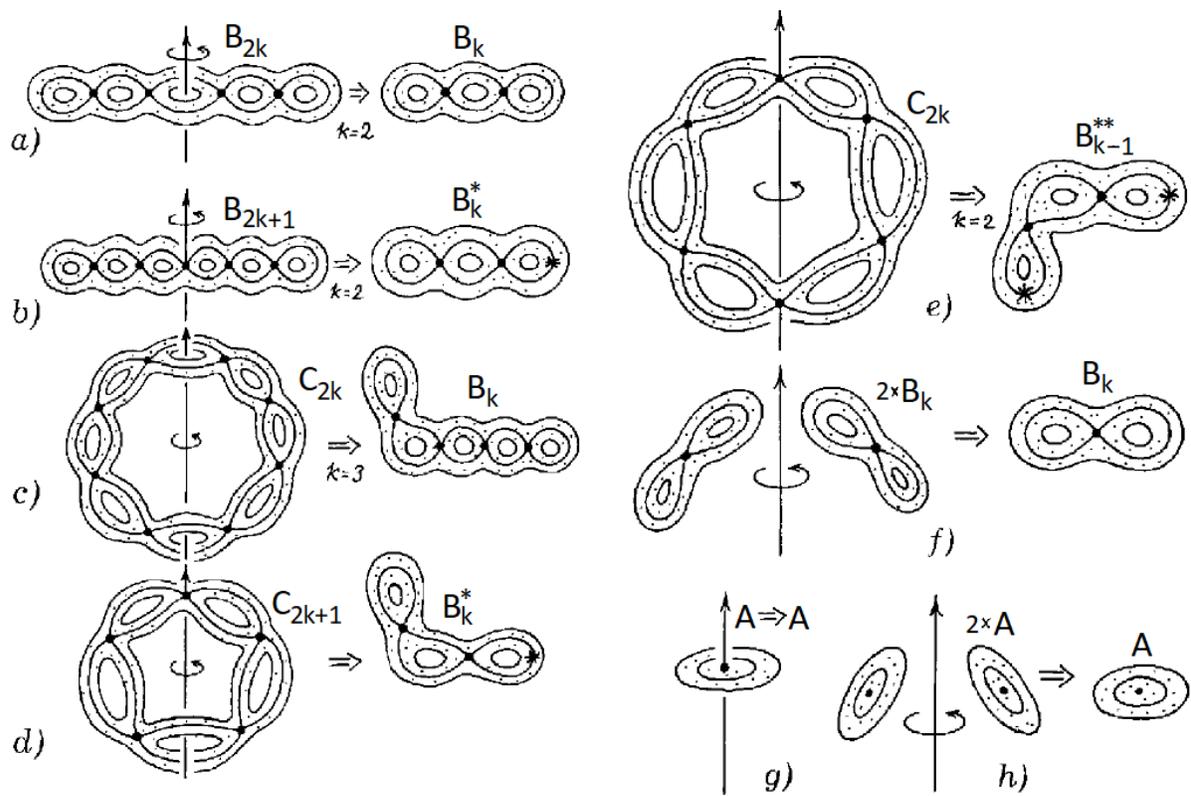


Рис. 2: Факторизация 2-атомов.

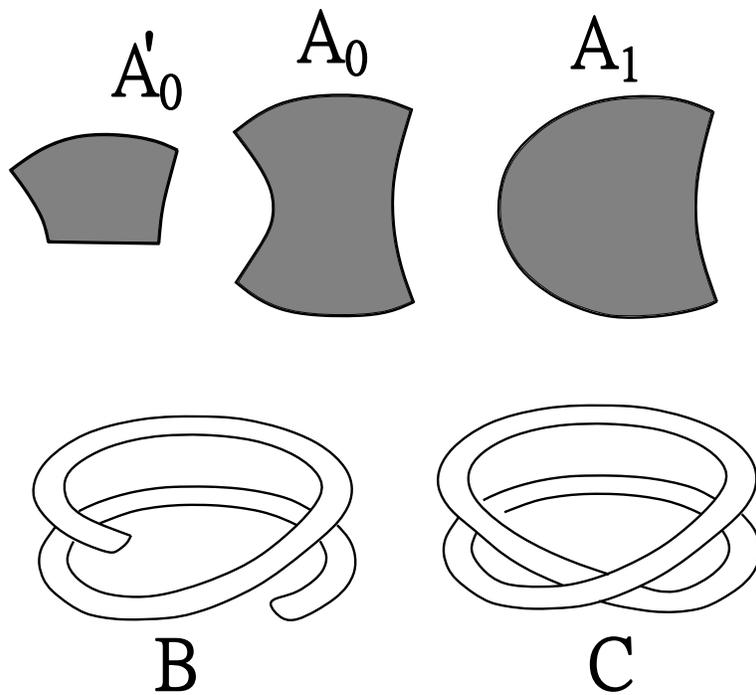


Рис. 3: Примеры бильярдных столов без склеек.

2.2 Биллиарды с проскальзыванием

Пусть F — изометрия эллипса, переводящая точку x в диаметрально противоположную ей точку y . Для эллипса это означает поворот радиус-вектора точки x на угол π . Биллиард внутри эллипса с введенной изометрией на границе будем называть *биллиардом с проскальзыванием*.

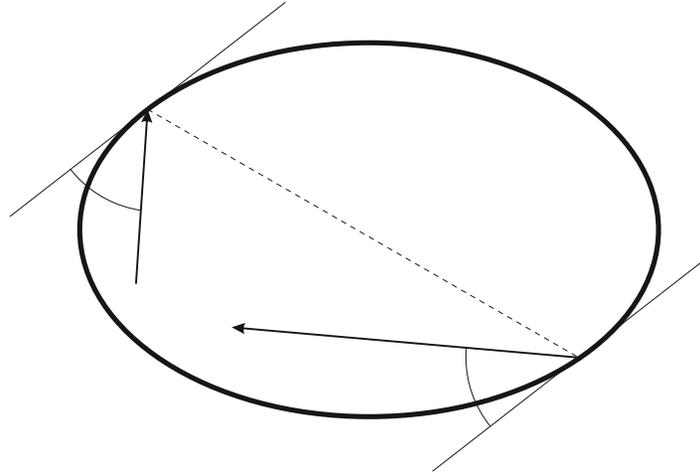


Рис. 4: Движение материальной точки внутри эллипса с проскальзыванием.

Как показано в статье [10], такая биллиардная система будет интегрируема с тем же дополнительным интегралом: поворот на угол π сохранит касание траектории софокусной квадрики, отвечающей данному значению интеграла. Заметим, что дуги эллипса, которые ограничены одной гиперболой из софокусного семейства, переходят друг в друга данной изометрией. Поэтому у элементарных биллиардов, которые ограничены симметричными относительно центра эллиптическими дугами, можно ввести проскальзывание, как было замечено выше. Также на гиперболе из софокусного семейства проскальзывание можно ввести аналогичным образом путем изометрии гиперболы поворотом на угол π относительно центра.

Пусть дан топологический биллиард L , полученный последовательной склейкой $2n$ столов, граница которых состоит из 4 дуг софокусных квадрик. Присвоим одному столу из этой склейки номер 1. Далее поставим номер 2 области, которая склеена с областью под номером 1 по границе. Заметим, что область с номером 1 может быть склеена с двумя областями. Выбор соседней области для присваивания номера 2 не влияет на дальнейшее рассуждение. Продолжим далее расставлять номера областям по следующему правилу. Пусть на данном шаге мы присвоили номер k некоторому столу. Один из двух соседних по склейке столов имеет номер $k - 1$, тогда второму столу присваиваем номер $k + 1$. Продолжаем выполнять эту операцию пока не дойдем до стола с номером $2n$. Берем два таких экземпляра L_1 и L_2 . Рассмотрим границы данных областей, которые склеиваются в связную кривую, при данной последовательной склейке. На таких кривых вводим проскальзывание следующим образом: точка, попадая на границу стола в L_1 с номером k , выходит из границы стола L_2 с номером $2n - k$ с поворотом на π . Склейка показана наглядно на рис. 5. Черным выделена граница, по которой вводится проскальзывание.

Проскальзывание на дугах будем показывать подписью буквой сверху справа для кодового слова из классификации топологических биллиардов В. В. Ведюшкиной буквой e для проскальзывания на эллиптических дугах, буквой h для проскальзывания на гиперболических дугах и буквой f для проскальзывания на дугах, лежащих на фокальной прямой.

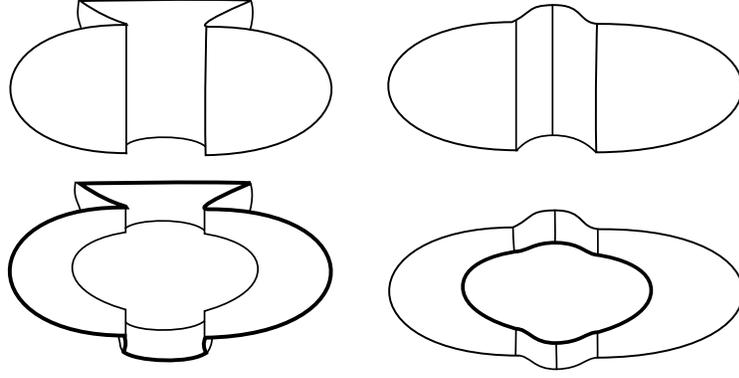


Рис. 5: Наглядная склейка бильярдного стола с проскальзыванием. Жирным выделены эллиптические дуги, на которых введено проскальзывание.

3 Основной результат

Из 52 серий топологических бильярдных в классификации В. В. Ведюшкиной [?] непосредственной проверкой можно убедиться, что всего 8 столов имеет достаточную симметрию для введения проскальзывания: $\Delta_\alpha(n\tilde{A}_0)$, $\Delta_{\alpha\epsilon}(n\tilde{A}_0)$, $\Delta_{\alpha h}(n\tilde{A}_0)$, $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \tilde{A}_0 + A'_0))_{cc}$, $\Delta_\alpha(nC_m)$, $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)$, $\Delta_{\alpha h}(2n\tilde{B})$, $\Delta_{\alpha\epsilon}(2n\tilde{B})_{yy}$. В этих 8 столах всего 12 вариантов введения проскальзывания: $\Delta_\alpha(n\tilde{A}_0)^e$, $\Delta_\alpha(n\tilde{A}_0)^h$, $\Delta_\alpha(n\tilde{A}_0)^{eh}$, $\Delta_{\alpha\epsilon}(n\tilde{A}_0)^h$, $\Delta_{\alpha h}(n\tilde{A}_0)^e$, $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \tilde{A}_0 + A'_0))^h_{cc}$, $\Delta_\alpha(nC_m)^e$, $\Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$, $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$, $\Delta_{\alpha h}(2n\tilde{B})^e$, $\Delta_{\alpha h}(2n\tilde{B})^{ee}$, $\Delta_{\alpha\epsilon}(2n\tilde{B})^e_{yy}$.

Теорема 1 *Инварианты Фоменко-Цишанга топологических бильярдных с проскальзыванием имеют вид, изображенный в таблице 3.*

Случай	Молекула	Случай	Молекула
$\Delta_\alpha(n\tilde{A}_0)^e$		$\Delta_\alpha(n\tilde{A}_0)^h$	
$\Delta_\alpha(n\tilde{A}_0)^{eh}$		$\Delta_{\alpha\epsilon}(n\tilde{A}_0)^h$	

$\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A}_0)^e$		$\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \widetilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$	
$\Delta_{\alpha}(nC_m)^e$		$\Delta_{\alpha}(nC_m)^{ee}$	
$\Delta_{\alpha}(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$		$\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})_{yy}^e$	
$\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^e$		$\Delta_{\alpha h}(2n\widetilde{B})^{ee}$	

Доказательство. Рассмотрим столы, содержащие столы \widetilde{A}_0 : $\Delta_{\alpha}(n\widetilde{A}_0)^e$, $\Delta_{\alpha}(n\widetilde{A}_0)^h$, $\Delta_{\alpha}(n\widetilde{A}_0)^{eh}$, $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A}_0)^h$, $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A}_0)^e$, $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \widetilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$.

Утверждение 1 Трехмерный прообраз $\Lambda^{-1}([b - \delta, b + \delta])$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для топологических бильярдов с проскальзыванием, содержащих только листы типа \widetilde{A}_0 , гомеоморфен следующим трехмерным многообразиям:

- 3-атому C_k для бильярдов $\Delta_{\alpha}(n\widetilde{A}_0)^e$ и $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A}_0)^e$;
- двум 3-атомам B_k^* для бильярдов $\Delta_{\alpha}(n\widetilde{A}_0)^h$ и $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A}_0)^h$;
- 3-атому B_k^* для бильярда $\Delta_{\alpha}(n\widetilde{A}_0)^{eh}$;
- 3-атому B_k^{**} для бильярда $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \widetilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$;

Доказательство. Для бильярдных столов типа \widetilde{A}_0 заметим, что эллиптическая часть Q^3 не зависит от количества склеенных \widetilde{A}_0 вдоль гиперболических границ, поэтому можно описать все для случая одного стола типа A_0 .

На всех бильярдах определена каноническая проекция из фазового многообразия на бильярдный стол. При выборе циклов на граничных торах 3-атомов мы будем изображать их на этой проекции.

Напомним правила выбора циклов. На граничных торах 3-атомов A в качестве λ выбирается цикл, который стягивается в точку внутри полнотория A . В качестве цикла μ выбирается любой цикл дополняющий его до базиса. При стремлении к особому слою цикл μ переходит в критическую окружность. Это позволяет однозначно определить на нем ориентацию (она должна совпасть с ориентацией критической окружности). На граничных торах седловых 3-атомов циклы λ выбираются гомологичными слоям расслоения Зейферта. Для 3-атомов без звездочек это означает, что они должны быть гомологичны (и сонаправлены) критическим окружностям при достижении торами особого слоя. Циклы μ для 3-атомов без звездочек выбираются как граничные окружности двумерного 3-атома, трансверсального критической окружности сечения 3-атома. Если так поступить для 3-атома со звездочкой, то может возникнуть (и как правило в реальных задачах возникает) следующая ситуация. Возникающие циклы $\hat{\mu}$ могут пересекать цикл λ в двух точках. Например, в случае 3-атома B_k^* на одних торах цикл $\hat{\mu}$ пересечет λ в одной точке, а на других — в двух. Тогда на торах, где пересечение λ и μ одноточечно, в качестве базисного цикла μ_s берем $\hat{\mu}$, а на других рассматриваем $\frac{\hat{\mu} + \lambda}{2}$ (см. подробнее в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [7]).

Образом критических окружностей при канонической проекции фазового многообразия для бильярдных столов типа \widetilde{A}_0 являются фокальные отрезки внутри данного стола. Рассмотрим малое значение $\delta > 0$. Эллипс с параметром $\lambda = b - \delta$ пересекает бильярдный стол типа \widetilde{A}_0 по криволинейным отрезкам, количество которых в два раза больше числа фокальных отрезков. При стремлении δ к нулю криволинейные отрезки каустики устремятся к фокальным отрезкам, следовательно, их прообразы являются критическими окружностями. Рассмотрим прообразы отрезков каустики. Каждому отрезку каустики отвечает два отрезка в прообразе без учета склеек. В прообразах точек границы происходит склейка. Для границы без склейки в прообразе склеиваются пара точки на границе и каустике с вектором по часовой стрелке и пара с этой же точкой и вектором против часовой стрелки, для ориентированной склейки пара точек с вектором в одном направлении и пары с другой точкой этого же отрезка каустики, лежащей на границе, с вектором в том же направлении, для неориентированной склейки, соответствующей проскальзыванию, направление вектора также сохраняется, а точка заменяется на точку не этой же каустики, а лежащую на каустике с инвертированным числом, при этом повернутую на угол π .

Далее рассмотрим все бильярды кроме $\Delta_{bh}(n(A'_0 + \widetilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$, содержащие \widetilde{A}_0 . Критическая окружность состоит из 2 отрезков, каждый из которых в проекции является отрезком каустики. Для всех бильярдных столов, содержащих проскальзывание на гиперболических дугах, если число элементарных бильярдных столов, входящих в состав \widetilde{A}_0 , нечетно, то на элементарных бильярдах со средним номером проскальзывание переводит одну гиперболическую границу в другую. Когда каустика становится фокальным отрезком, отрезки с векторами скорости в одном направлении склеиваются между собой, но они составляют критическую окружность, поэтому точки на этой окружности склеиваются попарно между собой, что соответствует 3-атому со звездочкой. Остальные критические окружности склеиваются попарно между собой. За исключением тора, на котором окружность склеится сама с собой, все торы последовательно склеиваются

между собой. Это соответствует 3-атому B_k , если последовательная склейка закончилась не на торе, с которого началась, и 3-атому C_k , если на каждом торе склеилось по две окружности.

Критическая окружность бильярда $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \widetilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$ состоит из 4 таких отрезков. Пусть количество бильярдных \widetilde{A}_0 не делится на 4. Тогда происходит аналогичная ситуация со звездами других бильярдных, только здесь будут сразу две таких окружности. Доказательство утверждения окончено. \square

Утверждение 2 *Метки на эллиптической части для бильярдных типа \widetilde{A}_0 определяются следующим образом:*

- $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$, если ребро соответствует двум столам \widetilde{A}_0 , входящим в состав бильярда, гиперболические дуги которых склеены проскальзыванием, а также они склеены по эллиптической дуге;
- $r = 0, \varepsilon = 1$, во всех остальных случаях.

Доказательство. Циклы λ седловых 3-атомов строятся из отрезков, которые являются прообразами отрезков каустик. Если бильярд не содержит два стола \widetilde{A}_0 , гиперболические дуги которых склеены проскальзыванием, а также склеенных по эллиптической дуге, то если рассмотреть прообраз вертикальных отрезков между эллиптической границей и каустикой с векторами скорости, направленными по часовой стрелке, то они будут образовывать окружности на торах. В таком случае эти окружности пересекаются по одной точке с циклами λ . Поэтому эти окружности можно взять в качестве цикла μ седловых 3-атомов. Заметим, что данные циклы μ седловых атомов являются циклами λ 3-атомов A , так как вертикальный отрезок стягивается в точку, когда каустика доходит до эллиптической границы. Поэтому на данных ребрах матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, отсюда $r = 0, \varepsilon = 1$.

Так как все критические окружности седловых атомов в гиперболической части гомологичны, матрицы склейки на ребрах равны $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Вклада в метку n здесь нет.

Если бильярд содержит два стола \widetilde{A}_0 , гиперболические дуги которых склеены проскальзыванием, то на этих столах цикл λ и цикл, состоящий из прообраза вертикального отрезка между эллиптической границей и каустикой с векторами скорости, направленными по часовой стрелке, пересекается по двум точкам. Заметим, что этот цикл является циклом λ 3-атома A . Дополняющий цикл μ как 3-атома A , так и седлового 3-атома показан на рисунке 6 под буквой a . Тогда матрицы склейки примут вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, откуда $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Вклад в метку n на данном ребре равен -1 . Доказательство утверждения окончено. \square

Заметим, что ориентации циклов μ в эллиптической части согласованы с направлением векторного поля на них. Поэтому у фокального седлового 3-атома в гиперболической части ориентация цикла μ не согласована.

Утверждение 3 *Гиперболическая часть для бильярдных столов, содержащих \widetilde{A}_0 , представляет собой семьи из 3-атомов в точности, совпадающие с семьями, указанными в таблице 3.*

Доказательство. Для случая гиперболической части применимы аналогичные рассуждения о числе столов A_0 , склеенных вдоль эллиптических границ. Поэтому будем описывать топологию слоения, заменив бильярд \widetilde{A}_0 на бильярд A_0 .

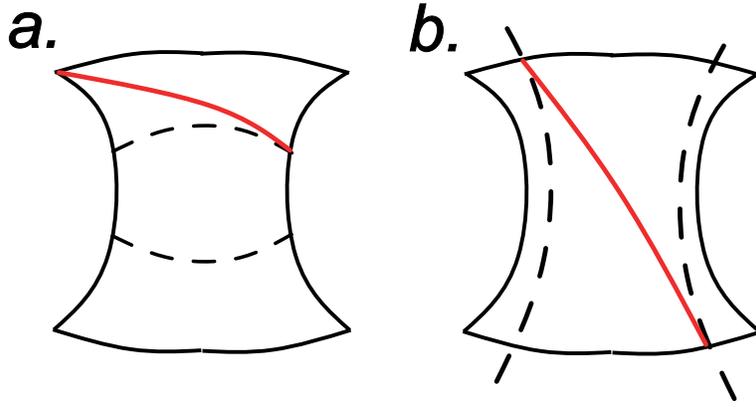


Рис. 6: Схематическое изображение цикла μ для билиардов, содержащих \widetilde{A}_0 . Под буквой *a* показан цикл для эллиптической части, под буквой *b* для гиперболической.

Аналогично разделим наше описание на 3 случая: билиарды, содержащие проскальзывание на эллиптических дугах; билиарды, не содержащие проскальзывание на эллиптических дугах; билиард $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \widetilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$.

Начнем со второго случая. Заметим, что если нет проскальзывания на эллиптических дугах, то критическая окружность в образе состоит только из точек одной ветви каустики на одном из столов. Поэтому все критические окружности седловых 3-атомов гомологичны между собой. Когда каустика доходит до гиперболической дуги, на которой введена склейка, то 2 тора склеиваются по прообразу этой дуги. При уменьшении значения параметра каустики эти торы превращаются в один тор, который соответствует движению по всем столам-образам этих торов. Эта перестройка отвечает 3-атому B_k . Рассмотрим гиперболическую дугу билиарда, имеющую наименьшее значение параметра λ . На ней введена склейка. Когда каустика меняет параметр с большего, чем у этой дуги, на меньшее торы склеиваются по прообразу этой дуги и переходят в два тора. Это связано с тем, что торы склеиваются последовательно по прообразам таких дуг, но теперь нет каустик меньшего параметра, поэтому на каждом торе происходит последовательная склейка по двум окружностям. Это соответствует 3-атому C_k . Все критические окружности седловых 3-атомов также гомологичны циклам μ 3-атомов A . Следовательно, в гиперболической части таких билиардов имеем $W_2(g)$. Циклы λ 3-атомов A образованы из прообразов фокального отрезка между каустик. Заметим, что окружности, лежащие в образе на каустиках, не пересекаются с окружностями, лежащих в образе на фокальном отрезке между каустик. Поэтому все матрицы склейки равны $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и метки $r = 0, \varepsilon = 1$. Вклада в метку n здесь нет.

Первый случай аналогичен описанию области эллиптической части, когда на гиперболических дугах введено проскальзывание.

У билиарда $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \widetilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$ ситуация аналогична предыдущим случаям за исключением дуги гиперболы, которая соответствует склейке проскальзыванием. Если проскальзывание вводится не на вертикальной дуге, то ребро между седловым 3-атомом и 3-атомом A , соответствующего данной дуге, имеет метку $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$ также аналогично предыдущим случаям.

Осталось рассмотреть ребра в гиперболической части, которые идут от ребер, соответствующих значению интеграла $\lambda = b$. Заметим, что цикл λ седлового 3-атома на уровне интеграла $\lambda = b$ в образе проекции состоит из точек на фокальных отрезках. Если критические окружности седловых 3-атомов имеют одно пересечение, то в качестве дополняющего цикла μ можно

взять критическую окружность другого 3-атома. Ориентация цикла μ у фокального 3-атома не согласована, а значит, ориентация μ другого 3-атома тоже не согласована. Поэтому матрица склейки равна $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и метки $r = 0, \varepsilon = -1$. Вклада в метку n здесь нет.

Если циклы λ пересекаются по двум точкам, тогда построим цикл μ аналогично ребрам с 3-атомами A , как показано на рисунке 6 под буквой b . Из ориентации циклов μ можно сделать вывод о том, что матрица склейки в таком случае примет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = -1$. Вклад в метку n здесь равен -1 . Доказательство утверждения окончено. \square

Далле рассмотрим 5 классов: $\Delta_\alpha(nC_m)^e$, $\Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$, $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$, $\Delta_{\alpha h}(2n\tilde{B})^e$, $\Delta_{\alpha h}(2n\tilde{B})^{ee}$.

Утверждение 4 *Инварианты Фоменко-Цишанга данных 5 классов бильярдных столов совпадают с инвариантами, указанными в таблице 3.*

Доказательство. В случае, когда каустикой является невырожденный эллипс можно гооморфно продеформировать стол в круговые бильярды. Поэтому в эллиптической части молекула устроена также, как в работе [30]. Для бильярдov $\Delta_\alpha(nC_m)^e$ и $\Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$ проскальзывание можно вводить не только на угол π , но и на углы кратные π . Для m -листного накрытия кольца при обходе границы в направлении часовой стрелки радиус-вектор совершает поворот равный $2m\pi$. Поэтому для проскальзывания на угол $k\pi$ в таких бильярд частица после отражения будет выходить из точки, полученной поворотом на $\frac{k}{m}$ от суммарного угла возможного поворота вдоль границы. Такая конструкция уже была рассмотрена автором в работе [31]. Для произвольного угла $k\pi$, используя результаты работы [31], можно вычислить инвариант Фоменко-Цишанга, совпадающий с представленным в таблице 3. Заметим, что в графах-молекулах W_1 метки $r = \frac{1}{2}$ в этом случае изменяются на метки $r = \frac{y}{m}$, где y является решением диофантова уравнения $mx - yk = 1$. Осталось рассмотреть фокальный уровень и область гиперболической части.

Область гиперболической части бильярда $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$ совпадает с областью гиперболической части $\Delta_\alpha(\tilde{A}_0)^e$, так как в прообразе границы, на которой не введены склейки, происходит отождествление точек с векторами скорости аналогично отождествлению точек с векторами в прообразе каустики. На фокальном уровне происходит перестройка через прообразы фокальных отрезков двух торов в два тора. Два, соответствующие эллиптической части, склеиваются между собой по двум окружностям и перестраиваются в два тора. Это отвечает 3-атому C_2 . Циклы 3-атома C_2 показаны на рисунке 8. Из показанных циклов видно, что матрица склейки равна $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ с учетом ориентации. Отсюда метки $r = 0, \varepsilon = -1$, а вклада в метку n ни одной семьи нет.

Так как циклы 3-атомов A в гиперболической части строятся по вертикальным отрезкам, то можно сделать вывод о том, что гиперболическая часть и фокальный уровень бильярдov $\Delta_\alpha(nC_m)^e$, $\Delta_\alpha(nC_m)^{ee}$ аналогична случаю этих же столов без проскальзывания.

Теперь рассмотрим область гиперболической части и фокальный уровень бильярдov $\Delta_{\alpha h}(2n\tilde{B})^e$, $\Delta_{\alpha h}(2n\tilde{B})^{ee}$. Циклы бильярдov здесь устроены аналогично случаям бильярдov, содержащих A_0 . Циклы λ 3-атома A строятся по прообразу отрезка некоторого эллипса, заключенного между ветвями каустики, а циклы λ седловых 3-атомов гиперболической части строятся по прообразу

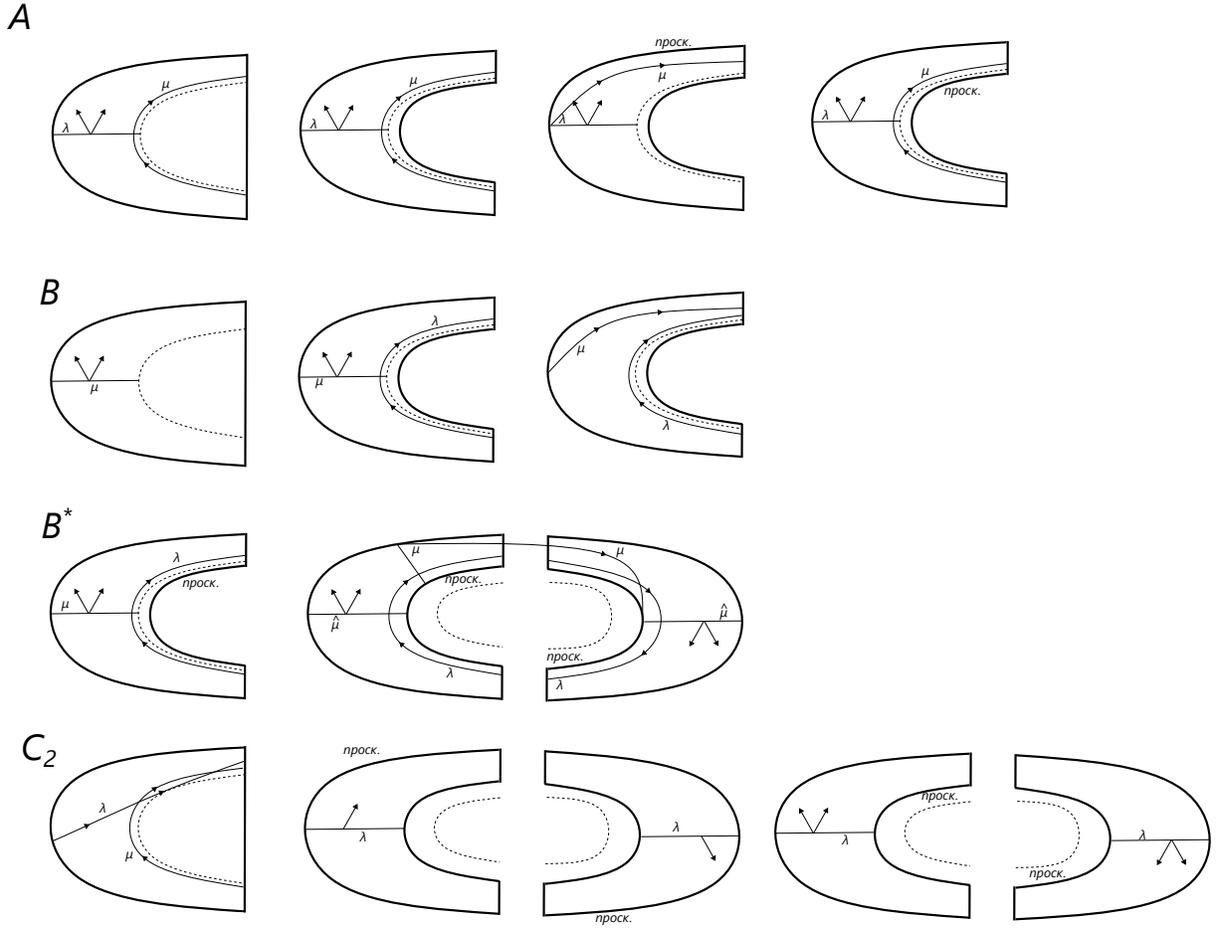


Рис. 7: Циклы биллиарда $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$, когда каустикой является эллипс.

каустик. Так как данные столы не содержат отрезка между фокусами, то критическая окружность на фокальном уровне будет строиться по прообразам отрезков на фокальной прямой. Заметим, что в пределе каустики становится подмножеством фокальной прямой. Отсюда можно сделать вывод о том, что циклы λ 3-атома, который соответствует фокальному уровню будут строиться по прообразам точек каустики. Следовательно, все критические окружности всех седловых 3-атомов в гиперболической части и фокальном уровне гомологичны. Осталось лишь заметить, что критические окружности 3-атомов A и седловых 3-атомов пересекаются по одной точке, а значит, на ребрах между ними циклы λ обоих 3-атомов образуют базис. Все 3-атомы соответствуют последовательной склейке по прообразу некоторой гиперболы, а на фокальном уровне последовательная склейка нескольких торов переходят в два тора. Значит вся гиперболическая часть и фокальный уровень соответствуют классу подмолекул W_2 . Доказательство утверждения окончено. \square

Утверждение 5 *Инварианты Фоменко-Цишанга биллиардного стола $\Delta_{\alpha e}(2n\tilde{B})_{yy}^e$ совпадает с инвариантом, указанным в таблице 3.*

Доказательство утверждения 5. Рассмотрим биллиардный стол, склеенный из колец в цилиндр так, чтобы у границы этого биллиарда, состоящей из двух эллипсов, один эллипс являлся внутренним для стола (касательная прямая к такому эллипсу пересекает биллиардный стол). На данном внутреннем эллипсе склеим точки симметричные относительно оси Ox . На

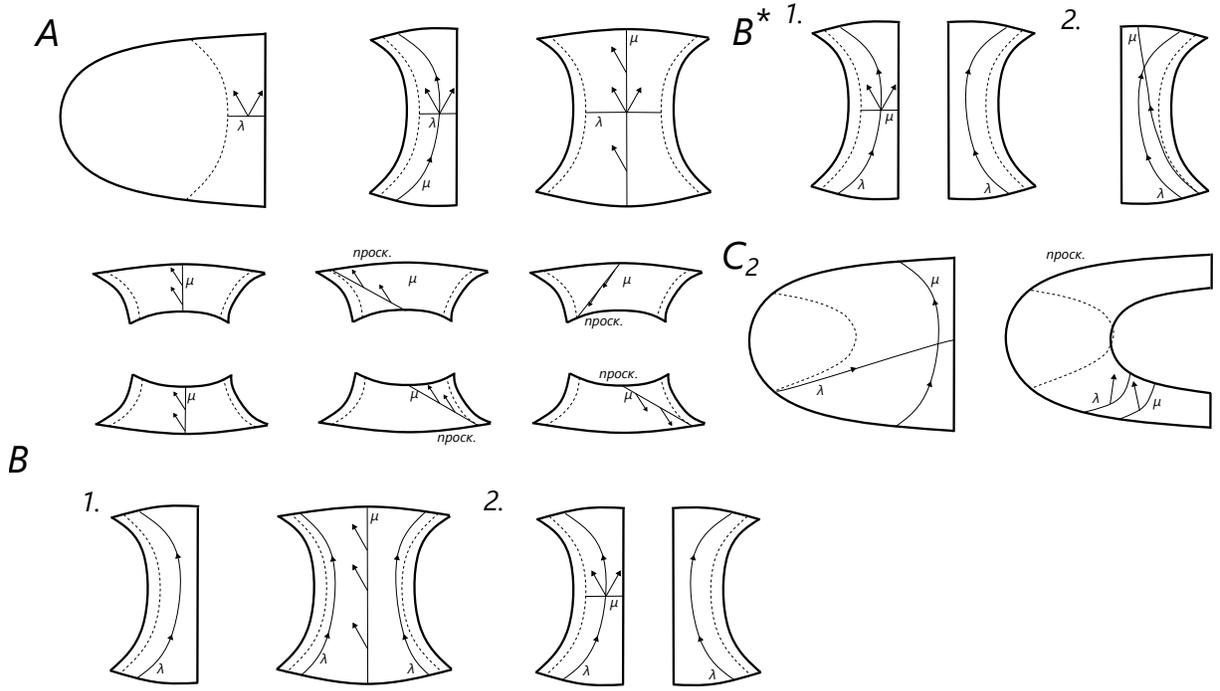


Рис. 8: Циклы биллиарда $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 2mnB_0 + A_1)^e$, когда каустикой является гипербола.

другом же эллипсе введем проскальзывание. Область эллиптической части такого стола фактически совпадает с эллиптической частью биллиардного стола $\Delta_{\alpha\epsilon}(2n\tilde{B})_{yy}^e$. В данном биллиардном столе вся эллиптическая часть совпадает с эллиптической частью биллиарда без симметричной склейки на одной окружности, за исключением одного значения интеграла, который как раз соответствует данному эллипсу. Прообраз в изоэнергетическом многообразии данного эллипса соответствует склейке двух торов вдоль окружности, в проекции одинаковых, но с векторами скорости разных направлений относительно часовой стрелки. Из этого можно сделать вывод о том, что эллиптическая часть биллиарда $\Delta_{\alpha\epsilon}(2n\tilde{B})_{yy}^e$ представляет собой \tilde{W}_1 .

В области гиперболической части ситуация схожа с биллиардным столом, содержащем A_0 с проскальзыванием на эллиптических дугах, так как биллиард A_0 можно “согнуть” пополам, превратив его в два биллиарда A'_0 с проскальзыванием на большей эллиптической дуге и склейкой на меньшей. Зависимости от параметра эллиптической дуги, на которой введена склейка, для гиперболической части нет. Единственное отличие - наличие склейки на гиперболических дугах. Такая склейка аналогична склейке в биллиарде $\Delta_{\beta h}(n(A'_0 + \tilde{A}_0 + A'_0))_{cc}^h$ и приводит к тому, что гиперболическая часть изоэнергетического многообразия гомеоморфна \tilde{W}_2 .

Так как биллиард $\Delta_{\alpha\epsilon}(2n\tilde{B})_{yy}^e$ не имеет пересечения с фокусной прямой, то фокальный уровень гомеоморфен двумерному тору. Циклы эллиптической части через гиперболическую часть выражаются с помощью матрицы склейки, равной $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответственно, метки $r = 0, \epsilon = 1$. Вклад в метки n в обе семьи равен -1 . Сделаем замену ориентации Q^3 данного биллиарда. Это приведет к тому, что метка ϵ на центральном ребре меняет знак, а метки n изменятся на 1, что в точности совпадает с молекулой, представленной в таблице 3. Доказательство утверждения окончено. \square

Из вышесказанного имеем, что теорема 1 доказана.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 22-71-10106 в МГУ имени М.В. Ломоносова. Автор является стипендиатом Фонда “БАЗИС”.

Список литературы

- [1] Дж.Д. Биркгоф, Динамические системы, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 408с. (1999); перю с англ.: G.D. Birkhoff, “Dynamical systems”, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **9**, Amer. Math. Soc., New York, (1927).
- [2] В.В. Козлов, Д.В. Трещев, Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами, Изд-во Моск. ун-та, М., 168с. (1991).
- [3] И.С. Харчева, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 4, 12–22.
- [4] В.В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдных областей в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., **206**:10, 127–176с. (2015).
- [5] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56.
- [6] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдных областей”, Матем. сб., **210**:3, 17–74с. (2019).
- [7] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
- [8] В.В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2014, № 4, 18–27.
- [9] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга топологических бильярдных областей, ограниченных софокусными параболами”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2018, № 4, 22–28.
- [10] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav’yalov, “Liouville foliations of topological billiards with slipping”, Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.
- [11] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды”, Изв. РАН. Сер. матем., **83**:6 (2019), 63–103.
- [12] В.В. Козлов, “Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем”, Докл. АН СССР, **249**:6 (1979), 1299–1302.
- [13] А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 3, 15–25.
- [14] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами”, Докл. РАН, 479:6 (2018), 607–610

- [15] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб., 212:8 (2021), 89–150.
- [16] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, А.Т. Фоменко, “Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов”, Доклады Академии Наук (РАН), 493 (2020), 9–12.
- [17] В.В. Ведюшкина, “Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов” // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2021, 2, 28–32.
- [18] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем” // Вестник Моск. унив. Серия 1: Матем. Механ., 2020, № 4, 22–28.
- [19] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало “Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем”, Чебышевский сборник. 2022;23(1):53-82.
- [20] В.В. Ведюшкина, “Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе”, Матем. сб., 211:2 (2020), 3–30.
- [21] В.В. Ведюшкина, “Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек”, Матем. сб., 212:12 (2021), 3–19.
- [22] Fomenko A.T., Vedyushkina V.V. "Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field Russian Journal of Mathematical Physics, (2019), Vol. 26, no.3. — P.320–333.
- [23] A.T. Fomenko, V.A. Kibkalo, Topology of Liouville foliations of integrable billiards on table-complexes. European Journal of Mathematics 8, 1392–1423 (2022).
- [24] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, С.Е. Пустовойтов, “Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем бильярдными книжками с потенциалом Гука”, Чебышевский сб., 22:5 (2021), 44–57.
- [25] V. Dragovic and M. Radnovic, “Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in \mathbb{R}^d ,” J. Phys. A. Math. General., 2004, 37, No. 4, 1269–1276.
- [26] V. Dragovic, M. Radnovic, and S. Gasiorek, “Billiard ordered games and books,” Regul. Chaot. Dyn., 2022, 27, No. 2, 132–150.
- [27] К.Е. Тюрина, “Топологические инварианты некоторых бильярдных упорядоченных игр”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2024, № 3, 19–25; Moscow University Mathematics Bulletin, 79:3 (2024), 122–129.
- [28] Д.А. Туниянц, “Топология изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек, склеенных из колец”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2024, № 3, 26–35; Moscow University Mathematics Bulletin, 79:3 (2024), 130–141
- [29] В.А. Кибкало, Д.А. Туниянц, “Упорядоченные бильярдные игры и топологические свойства бильярдных книжек”, Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна — 2024, СМФН, 70, № 4, Российский университет дружбы народов, М., 2024, 610–625

- [30] В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов, “Реализация геодезических потоков с линейным интегралом бильярдами с проскальзыванием”, Матем. сб., **213**:12 (2022).
- [31] В. Н. Завьялов, “Бильярд с проскальзыванием на любой рациональный угол”, Матем. сб., **214**:9, 3 – 26 (2023).