

В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало

Многомерные бильярдные книжки: их примеры и базовые свойства

В работе построено обобщение многомерных софокусных бильярдov: класс склеенных из них столов-комплексов с циклическими перестановками на гипергранях. Данная конструкция обобщает бильярдные книжки, предложенные ранее В.В.Ведюшкиной для случая плоских двумерных столов. Начало изучение свойств таких систем и поиск необходимых и достаточных условий корректности динамической системы бильярда на ней. Более подробно разобран трехмерный случай, где множество вырождения эллиптических координат (омбилических точек) хорошо известно. С помощью трехмерных бильярдных книжек промоделированы произвольные невырожденные особенности коразмерности 1, имеющие тип прямого произведения, для интегрируемых гамильтоновых систем с 3 степенями свободы.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: софокусные квадрики, бильярд, CW-комплекс, бильярдная книжка, интегрируемая система, особенность, атом.

§ 1. Введение

Ранее в работах В.В.Ведюшкиной [2, 3] были введены новые классы бильярдных систем: топологические бильярды и бильярдные книжки. Эти системы обобщают классические бильярды на плоских столах, ограниченных гладкими или кусочно-гладкими кривыми. Столы таких бильярдov склеиваются из плоских столов по изометричным склейкам их граничных дуг. Возникает двумерный кусочно-плоский клеточный комплекс $X = X^2$ с проекцией $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ на плоскость Oxy . Каждая 1-клетка e^1 комплекса X (“корешок книжки”), т.е. гладкая дуга границы хотя бы одного его листа e^2 , оснащается циклической перестановкой $\sigma = \sigma_e$, действующей на 2-клетках, инцидентных данной 1-клетке e^1 . Если по данной 1-клетке e^1 склеено ровно два листа e_1^2 и e_2^2 , то перестановка является транспозицией $\sigma = (e_1^2, e_2^2)$, а если эта 1-клетка e^1 входит в границу лишь одного листа e^2 (т.е. входит в свободную границу всего комплекса $e^1 \in \partial X$), то перестановка $\sigma = (e^2) = id$ будет тождественной. Ориентируемый стол-комплекс, все перестановки которого имеют длину 1 или 2, называют *топологическим бильярдом*. Их класс является важным подклассом всех бильярдных книжек, обладая рядом специфических свойств.

Динамическая система бильярда на бильярдной книжке (комплексе с перестановками) задается так: внутри каждой плоской области (2-клетки комплекса, называемой также “листом” книжки) траектория частицы является

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 22-71-10106) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

поднятием траектории плоского бильярда в соответствующей области (проекция этой клетки), а при ударе о гладкую дугу e^1 границы листа (корешок книжки) переход с листа e_i^2 на лист $e_j^2 = \sigma(e_i^2)$ происходит в соответствие с циклической перестановкой σ . В проекции на плоскость при этом частица может либо отразиться по закону “угол падения равен углу отражения” (и с сохранением модуля вектора скорости), или не изменить вектор скорости, продолжив прямолинейное движение. Первый случай возможен, если вблизи проекции точки удара $\pi(e_i^2)$ и $\pi(e_j^2)$ лежат по одну сторону от проекции корешка $\pi(e^1)$, а второй случай — если по разные стороны.

Главным образом, изучается случай софокусных или круговых бильярдных книжек. Листы первых изометричны областям, ограниченными квадратами софокусного семейства (1.1), а вторые — концентрическими окружностями и отрезками их радиусов. Такие квадраты пересекаются под прямыми углами, что позволяет по непрерывности определить отражение частицы при ее попадании в точку излома границы (т.е. угол величиной $\pi/2$).

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda), \quad 0 < b < a. \quad (1.1)$$

Перечисленные выше семейства квадратов порождают интегрируемые бильярды, т.е. имеют интеграл, независимый с энергией $H = |v|^2 = v_1^2 + v_2^2$. Этот интеграл Λ имеет простой геометрический смысл: его значение в фазовой точке (x_1, x_2, v_1, v_2) равно значению λ той квадратики из семейства 1.1, которой касается каждое звено траектории бильярда или его продолжение. Данный интеграл является квадратичным по v_1, v_2 , и одинаковым для всех софокусных бильярдных с данными a, b . Для круговых бильярдных интегралом будет радиус окружности-каустики, имеющей тот же центр, что граничная окружность.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что столы с углами $3\pi/2$ также рассматриваются в недавних работах [4, 5] (такие бильярды часто называют псевдоинтегрируемыми), но с топологической точки зрения они устроены существенно иначе, чем интересующие нас интегрируемые системы из приложений.

Для столов-комплексов возможность определить движение по непрерывности при попадании в вершину гарантируется двумя условиями. Для удобства изложения будем пока считать, что другие точки стола не попадают при проекции в точку $\pi(e^0) \in Ox_1x_2$. Рассмотрим вершину e^0 и инцидентные ей ребра e_i^1 . Они проецируются на две софокусные квадратики с параметрами $0 \leq \lambda_1 \leq b \leq \lambda_2 \leq a, \lambda_1 < \lambda_2$, проходящие через $\pi(e^0)$. Каждой квадратике $E_i : \lambda = \lambda_i$ соответствует перестановка σ_i , независимые циклы которой были приписаны проецирующимся на нее корешкам $e_{i,c}^1$, инцидентным при этом e^0 . Говоря о коммутирующих в вершине e^0 книжки X^2 перестановках, будем далее иметь в виду такие квадратики.

Если две эти перестановки коммутируют, а звенья траектории не каются этих квадратов, то при малом возмущении траектория, попадающая в вершину, переходит в другую, близкую к ней. Условие трансверсальности важно по следующей причине: если траектория касается дуги склейки, лист вблизи точки касания является невыпуклым, и перестановка не является тождественной или тривиальной, но траекторию однозначно продолжить невозможно (например,

точка эллипса $0 < \lambda_1 < b$ для книжки, склеенной из двух одинаковых колец, ограниченных внутри этим эллисом, а снаружи эллисом $\lambda = 0$). Тем не менее, слоение Лиувилля (поверхность уровня первого интеграла в изоэнергетической поверхности $Q^3 : H = h > 0$ данной книжки) определяется корректно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем книжку X *корректной*, если для каждой вершины $e^0 \in X^2$

- коммутируют перестановки σ, ω на двух квадриках, проходящих через $\pi(e^2)$,
- пара перестановок σ, ω действует транзитивно на ребрах, инцидентных данной вершине (в противном случае каждой орбите сопоставим “свою” вершину книжки).

Примеры изображены на рис. 1 слева: первому условию противоречит, например, наличие у книжки листа с величиной угла, равной $3\pi/2$, а второму — книжка с вершиной $e^0 : \pi(e^0) = (0, 0)$, где прообраз книжки попадает в 1 и 3 квадрант. Отобразив компоненту с перестановками σ_2, ω_2 симметрично относительно нуля, можем ввести на эллиптической дуге перестановку, делающую книжку связной. Тем не менее, в прообразе начала координат она должна иметь более одной вершины.

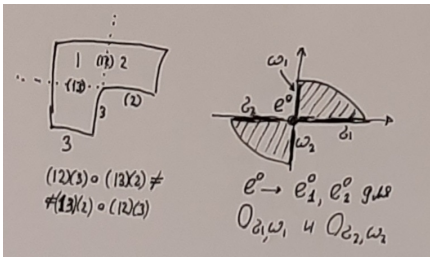


Рис. 1. Примеры запрещенных (некорректных) билиардных книжек, слева, и отождествляемые пары точка-вектор для граничных точек области, справа.

Тогда для всех точек границы стола верно, что для почти всех векторов локальное продолжение траектории (для граничных точек - возможно, предшествующее отражению звено) корректно определено для почти всех векторов скорости, приложенных в этой точке. Для точек гладких дуг границы такими могут быть лишь касательные к граничной кривой векторы, а для точек угла — касательные к двум квадрикам. На рис. 1 справа пунктиром отмечены такие векторы. Отметим, что для угловых точек мы не запрещали векторы, направленные внутри углов, смежных с углом стола, трансверсально обоим квадрикам, поскольку для всех близких к ним в фазовом пространстве билиарда пар точка-вектор (с точкой, лежащей внутри гладкой граничной дуги, а не в ее конце) продолжения траектории будут определены.

Отметим следующий вспомогательный факт, полезный для нас впоследствии, и по-видимому, не формулировавшийся ранее явно при исследовании билиардов.

ЛЕММА 1.1. *Для вершины корректной бильярдной книжки множество (возможно, содержащее повторы) циклических перестановок на инцидентных ей 1-клетках книжки единственным образом разбивается на два подмножества множества, которые будут сопоставлены двум квадрикам.*

Данный факт легко следует из того, что каждый лист, лежащий в соответствующей орбите, входит в ровно один цикл одной перестановки и в ровно один цикл другой. Если вдруг два эти цикла совпадают, рассуждение окончено: множество их элементов образует орбиту. Иначе выбрав некоторый цикл первой перестановки, отнесем все другие циклы из набора, содержащие переставляемые первым циклом листы, к другой перестановке. Задача о классификации пары двух коммутирующих перестановок, транзитивно действующей на конечном множестве, была рассмотрена авторами ранее в [8]. Либо одна перестановка является степенью другой, либо любой цикл одной перестановки пересекает все циклы второй. Тогда его перестановка состоит из всех оставшихся циклов.

Проиллюстрируем на двумерном примере следующее наблюдение, полезное при анализе склеенных столов в большей размерности. Проведем в вершине книжки две касательные к проходящим через нее квадрикам. В этом случае окрестность вершины (0-клетки) в книжке лежит либо в одном, либо в двух, либо в четырех углах (равных $\pi/2$ каждый), на которые плоскость делится этими касательными. Это легко выводится из следующей леммы.

ЛЕММА 1.2. *Рассмотрим для вершины e^0 пару (коммутирующих) перестановок $\sigma_{(1)} = \sigma$ и $\sigma_{(2)} = \omega$ на двух ее квадриках E_1, E_2 и порождаемую ими орбиту $O_{\sigma\omega}(1)$ некоторого листа $e^2 = 1$, инцидентного вершине. Проекция орбиты на плоскость может лежать либо в одном, либо в двух смежных, либо во всех четырех углах, на которые пара квадрик разбивают окрестность проекции вершины $U(\pi(e^0))$. При этом если цикл $O_\sigma(1)$ проецируется на один из углов, то вся орбита проецируется не более чем на два угла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем это, опираясь на простейший факт о двух коммутирующих перестановках: если $\sigma \circ \omega = \omega \circ \sigma$, то применение перестановки ω к циклу $O_\sigma(1)$ либо переходит его (как цикл) в другой цикл $O_\omega(z) = O_\omega(O_\sigma(1))$, либо как множество переводит его в себя. В последнем случае из коммутирования перестановок имеем $O_{\sigma\omega}(1) = O_\sigma(1)$, т.е. задача тривиальна.

2. На рис. 2 справа имеем изобразим такой цикл $Z_1 = O_\sigma(1)$, лежащий по одну сторону от $E_1 = E_\sigma$. Заметим, что тогда либо $Z_2 = \omega(Z_1)$ лежит в том же квадранте, что и Z_1 , либо в смежном с ним через квадрик $E_2 = E_\omega$. Действительно, если бы листы Z_2 проецировались по разные стороны от E_ω , то были бы два соседних в смысле σ элемента y_1 и $y_2 = \sigma(y_1)$, таких что y_1 проецируется туда же, куда Z_1 , а y_2 в смежный угол. Оба цикла имеют прообразы — соседние в смысле σ элементы $x_1, x_2 = \sigma(x_1)$ цикла Z_1 . Тогда $y_2 = \omega(\sigma(x_1)) = \sigma(y_1)$. Поскольку $\pi(y_1)$ попадает в тот же угол, что и $\pi(Z_1)$, то перестановка σ не может отобразить его в угол, смежный с ними через квадрик E_ω . Получили противоречие.

3. Тем самым, никакой элемент $x \in Z_1 = O_\sigma(1)$ не может отобразиться путем последовательного применения σ и ω общим количеством α и β раз (из коммутирования запишем это как $\omega^\beta \sigma^\alpha$) в два квадранта, лежащие по другую

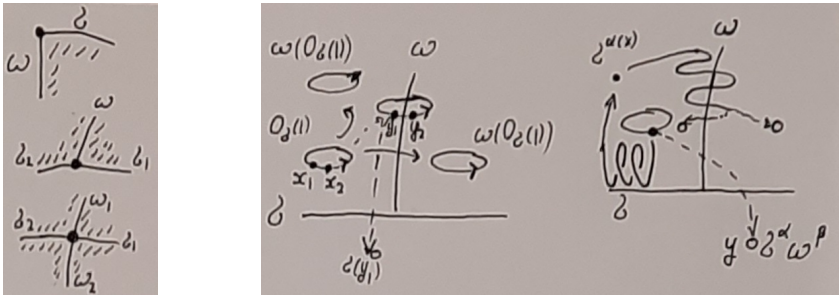


Рис. 2. Слева: возможное расположение проекции на плоскость листов корректной книжки, инцидентных ее вершине. Справа: доказательство невозможности угла $3\pi/2$ у образа окрестности вершины книжки при проекции.

сторону от E_σ : применив σ^β к x , мы останемся в том же квадранте, а применив затем E_ω , не сможем перейти через E_σ .

Отсюда сразу получаем, что для связной орбиты пары перестановок σ и ω ее проекция лежит либо в одном, либо двух, либо во всех четырех углах относительно E_σ и E_ω : любой цикл перестановки σ получается из $Z_1 = O_\sigma(1)$ с помощью некоторой степени ω , исключая тривиальный случай $\omega = \sigma^k, k \geq 1$.

§ 2. Квадрики в многомерных пространствах и бильярды

В случае двух степеней свободы рассматривается ряд задач, аналоги и развитие которых на многомерный случай представляется нам интересным:

- комбинаторная классификация корректных бильярдных книжек, т.е. наборов перестановок с определенными условиями коммутирования [6, 2, 7, 8, 9];
- топологическое описание таких систем, т.е. изучение их слоений Лиувилля на фазовых пространствах [10, 3, 11, 12, 13, 14, 15], в случае двух степеней свободы характеризуемые, инвариантами Фоменко и инвариантами Фоменко–Цишанга [16, 17, 18];
- построение для конкретных систем из приложений и “разумных” классов особенностей (например, невырожденных особенностей [19, 18, 20]) бильярдов, чьи слоения Лиувилля, кусочно-гладкие вообще говоря, имеют эквивалентные (послойно гомеоморфные) данным слоения.

Возможность построить такое обобщение основано на следующем факте. Понятие семейства софокусных квадрик хорошо известно и для произвольной размерности $n > 2$. Такие квадрики задаются уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1, \quad 0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1. \quad (2.1)$$

Геодезические потоки на таких квадриках интегрируемы, было показано Якоби [21]. Также хорошо известен следующий факт: касательные к траектории

геодезического потока на софокусной квадрике касаются, помимо данной квадрики, еще $n - 2$ квадрик, софокусных с ней, причем эти квадрики одни и те же для всех точек траектории. Последний факт иногда называют теоремой Якоби–Шалля.

Биллиард в области, ограниченной софокусными квадриками, получается из таких геодезических потоков путем предельного перехода, когда наименьший из параметров полуосей a_n устремлен к нулю. Такие системы остаются интегрируемыми.

Топологические свойства таких биллиардов изучались В. Драговичем и М. Раднович [1], а впоследствии Г. В. Белозеровым [22, 23]. При этом для биллиардов в областях \mathbb{R}^3 им были классифицированы области и описана топология биллиардных столов.

2.1. Многомерные биллиардные книжки X^n . Нашей целью является обобщение понятия двумерной биллиардной книжки на многомерный случай X^n размерности n , а также изучение свойств и примеров таких систем. Это сопряжено с двумя основными трудностями. Во-первых, в определении двумерных книжек X^2 фигурировали клетки размерностей $n = 2$ — листы книжки, $n - 1 = 1$ — корешки книжки, и $n - 2 = 0$ — вершины комплекса. Корешки книжки оснащались перестановками, а вершины — условиями коммутирования. Априори не очевидно, что при $n > 2$ не потребуются дополнительных оснащений или условий на клетки меньшей чем $n - 2$ размерности. Вторая сложность носит, скорее, методологический характер: единственной точкой плоскости, через которую не проходит две ортогональные друг другу софокусные квадрики (т.е. вырождаются эллиптические координаты) являются фокусы семейства. В старших размерностях это множество устроено сложнее, что может усложнять анализ конкретных задач и общих свойств.

1. Вначале выделим “элементарные” n -мерные листы $e^n \subset \mathbb{R}^n$, из которых далее будем склеивать эти книжки. Будем считать, что замыкание каждого такого n -мерного листа лежит в замкнутом “первом” квадранте, т.е. в множестве $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$.

Пусть в некоторой окрестности точки $P_0 \in \mathbb{R}^n$ заданы регулярные ортогональные криволинейные или декартовы координаты y_1, \dots, y_n , причем в точке P_0 их значения равны y_1^0, \dots, y_n^0 . Будем говорить, что множество точек $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ имеет в этих координатах знак $\delta = \vec{\delta} = (\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k})$, если для всех точек $P \in \mathcal{A}$ имеем $\text{sgn}(y_{B_s} - y_{B_s}^0) = \delta_{B_s}$. Здесь $\delta_{i_s} \in \{+, -, +0, -0, 0\}$, т.е. левая часть либо строго больше/меньше нуля, либо нестрогая, либо равна нулю.

Будем называть знак δ (для множества \mathcal{A}), если

- *строгим*, если для всех $1 \leq s \leq k$ его $\delta_{i_s} = \pm$ либо 0,
- *нестрогим*, если для каких-то s имеем нестрогие неравенства,
- *максимальным* для \mathcal{A} , если набор δ содержит все условия вида $\text{sgn}(y_{B_s} - y_{B_s}^0) = \delta_{B_s}$, верные для точек \mathcal{A} ,
- *полным*, если максимальный знак содержит n условий, т.е. для каждой из координат $x_i, 1 \leq i \leq n$ для точек из \mathcal{A} верен некоторый знак δ_i ,
- *локальным*, если условие на знаки верно для пересечения малой окрестности точки P_0 и множества \mathcal{A} , а не для всех точек \mathcal{A} .

Уточним применяемую далее терминологию: каждая клетка e^k размерности k всегда считается *открытой*. При этом *замкнутой клеткой* $e^{\bar{k}}$ для произвольного $0 \leq k \leq n$ будем понимать замыкание данной клетки в \mathbb{R}^n и его гомеоморфный образ в X^n . В случае размерностей $k = 0, k = 1, 2 \leq k \leq n - 2, k = n - 1, k = n$ замкнутую клетку в \mathbb{R}^n и ее гомеоморфный образ в X^n будем называть соответственно *вершиной*, *ребром*, *гранью*, *гипергранью* и *листом* стола или комплекса X^n , т.е. считать замкнутыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Листом* размерности n назовем замкнутое компактное n -мерное подмножество $\bar{e}^n \subset \mathbb{R}^n$, внутренность которого имеет полный знак $\delta_i > 0$ в декартовых координатах, а граница лежит в объединении конечного набора неособых софокусных квадратик $\lambda_\alpha \neq a_i, i = 1, \dots, n$) семейства 2.1 и координатных плоскостей $x_i \geq 0$.

Здесь и далее будем требовать, чтобы окрестность каждой точки из \bar{e}^n имела бы вид прямого произведения n сомножителей, каждый из которых является либо интервалом $(-\varepsilon, \varepsilon)$, либо полуинтервалом $[0, \varepsilon)$ или $(\varepsilon, 0]$.

Стратификация границы листа \bar{e}^n на подмножества меньшей размерности задается так: коразмерность страта равна количеству нулей — концов полуинтервалов — в указанном представлении окрестности данной точки. В эллиптических координатах указанное условие соответствует тому, что страт размерности k лежит в пересечении $n - k$ квадратик, причем стол не является невыпуклым в эллиптических координатах (например, невозможно наличие углов $3\pi/2$ в двумерных подпространствах нормального пространства, построенного к внутренней точке клетки).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Стратификация границы описанного выше листа \bar{e}^n задает на нем структуру клеточного комплекса, для каждой клетки которого клеточное отображение является биекцией. Данный комплекс является n -мерным полиэдром, и каждый страт размерности k гомеоморфен открытому диску размерности k , а малая окрестность его внутренней точки устроена как произведение диска D^k на окрестность нуля в \mathbb{R}^{n-k} с полным знаком $\delta_i \geq 0$.*

Пусть в окрестности данной точки в \bar{e}^n с декартовыми координатами эллиптические координаты задают гомеоморфизм (т.е. для плоскостей $x_i = 0$, соответствующих особым значениям $\lambda = a_i$, исключим случай омбилической точки, множество которых обобщает понятие фокуса плоских квадратик — через них проходит меньше попарно ортогональных квадратик, чем размерность стола. Тогда в окрестности внутренней точки клетки e_j^{n-k} размерности $n - k$ пересечение листа \bar{e}^n с нормальной плоскостью n_j^k к этой клетке лежит по обе стороны от $n - k$ софокусных квадратик и по одну сторону от k квадратик. Предельным случаем квадратик $a_{i-1} < \lambda \leq a_i$ считаем плоскость $x_i = 0, i = 1, \dots, n, a_{-1} = 0$), проходящую через точку $O = n_j^k \cap e_j^{n-k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Утверждение о том, что страты гомеоморфны открытым дискам, следует из такого факта: замыкание каждого страта лежит в пересечении нескольких невырожденных квадратик или координатных гиперплоскостей $x_i = 0$.

В работе [24, 25] Г.В.Белозеровым была показана интегрируемость и изучались топологические свойства геодезического потока на компактном пересечении k софокусных квадрик в \mathbb{R}^n (случай $n - 2$ квадрик в \mathbb{R}^n был изучен В.А.Кибкало). При этом изоэнергетическая поверхность Q^{n-k} оказалась гомеоморфна произведению сфер суммарной размерности $n-k$ (конкретный набор n_i определяется тем, λ_i из каких интервалов $a_{i-1} < \lambda_i < a_i$ были зафиксированы).

2. Из приведенного доказательства в работе [25] следует, что получаемые поверхности-сомножители, гомеоморфные сферам S^{m_j} будут симметричны относительно набора из $m_j + 1$ декартовых координат x_i и лежать по одну сторону от остальных. Отсюда имеем, что условие знака $\delta : \delta_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ задаст на таком Q^{n-k} структуру произведения сфер S^{m_j} , стратифицированных всеми координатными плоскостями размерности m_j . Иными словами, замыкание каждого страта на пересечении квадрик, ограниченном условиями $x_i \geq 0$, является замкнутым диском или произведением замкнутых дисков.

Если в рассматриваемой точке какие-то координаты $x_{i_s} = 0, s = 1, \dots, k$, то ограничение семейства софокусных квадрик из \mathbb{R}^n на такое \mathbb{R}^{n-k} даст невырожденное семейство софокусных квадрик, что позволяет повторить рассуждения уже для него.

3. Условие того, что окрестность имеет вид прямого произведения интервалов и полуинтервалов имеет следующий смысл: если квадрика (или пересечение k квадрик) содержит сегмент границы нашего множества, имеющий такую же размерность $n-k$, то в окрестности данной точки знак e^n относительно этих квадрик как координатных поверхностей эллиптических координат однозначно определен. Иначе говоря, невозможно наличие двумерных секущих плоскостей (натянутых на касательные к двум координатным линиям), в ограничении на которую область \mathcal{A} дала бы угол $3\pi/2$. Утверждение доказано. \square

Теперь определим бильярдную книжку, склеенную из листов e_i^n , возможно неодинаковых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Бильярдной книжкой X^n размерности n назовем конечный компактный клеточный комплекс размерности n с перестановками на гипергранях размерности $n-1$ и с отображением проекции $\pi : X^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий следующим условиям:

- проекция $\pi : X^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна,
- проекция в ограничении на замыкание \bar{e}^n каждой клетки размерности n является гомеоморфизмом и изометрией; она поднимает гладкую структуру из \mathbb{R}^n на открытую клетку e^n ,
- для каждого листа книжки \bar{e}^n его проекция $\pi(\bar{e}^n)$ является n -мерным листом \bar{e}_0^n , определенным выше, причем с сохранением клеточной структуры (потому \bar{e}^n будем называть n -мерным листом книжки),
- для каждой гиперграницы \bar{e}^{n-1} задана циклическая перестановка длины s на множестве n -мерных листов $\bar{e}_1^n, \dots, \bar{e}_s^n$, содержащих замкнутую клетку \bar{e}^{n-1} в своей границе,
- для каждой клетки размерности e^{n-2} , составляющей пересечение замыканий нескольких граней e_i^{n-1} , проектирующихся на пару квадрик E_1, E_2 , соответствует условие коммутирования двух перестановок, соответствующих квадрикам.

- для произвольной клетки e^{n-k} , $1 \leq k \leq n$ набор циклических перестановок, приписанных инцидентным ей гиперграням, действует транзитивно на множестве инцидентных данной клетке n -мерных листов e^n и разбивается на k коммутирующих перестановок, соответствующих k квадратам, в пересечении которых лежит данная клетка.

Последнее условие данного утверждения запрещает, например, двум связным двумерным столам-комплексам оказаться дополнительно склеенными по одной вершине.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть для каждой клетке e^{n-k} размерности $0 \leq n-k \leq n-1$ выполнено условие транзитивности действия циклических перестановок, приписанных гиперграням (содержащим клетку e^{n-k} в своей границе). Тогда

- каждый лист e^n , содержащий клетку e^{n-k} в своей границе, встречается ровно k раз в этом наборе циклических перестановок,
- набор циклических перестановок единственным образом разбиваются на k перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, соответствующих пересекающимся по e^{n-k} квадратам E_1, \dots, E_k ,
- пусть от листа e^n к листу e^n есть путь по цепочке листов $e^n = e_0^n, e_1^n, \dots, e_k^n = e^n$, где каждый лист инцидентен соседним по гиперграням $e_1^{n-1}, \dots, e_k^{n-1}$, содержащим клетку e^{n-k} и проецирующимся на попарно различные квадраты $E_1, \dots, E_k : \pi(E_s) \subset E_s$. Тогда для каждого порядка $E_{\phi(1)}, \dots, E_{\phi(k)}$ квадрат есть путь $e_0^n, \hat{e}_1^n, \dots, \hat{e}_k^n = e^n$ от листа e^n к листу e^n , имеющий ту же длину s , для которого $\pi(\hat{e}_s^{n-1} \subset E_{\phi(s)})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Такой путь не обязан иметь минимальную длину. Склеим стол X^3 из двух листов по трем граням, инцидентным вершине e^0 . Тогда каждая двумерная клетка оснащается перестановкой $\sigma_i = (12)$. С листа e_0^3 на лист e_1^3 есть два типа путей: длины 1 и длины 3.

Мы докажем это утверждение в предположении, что обсуждаемая клетка e^{n-k} не содержится в множестве, где эллиптические координаты вырождаются. Далее, говоря о точке этой клетки, будем считать, что через нее проходит n различных софокусных квадратов, ортогональных друг другу, а сама она лежит на пересечении k квадратов.

Такое ограничение мотивировано следующими примерами: в двумерном случае фокус не может быть вершиной стола, поскольку через него невозможно провести другую квадрат. В размерности три в плоскости Oxy имеется эллипс $x_1^2/(a-c) + x_2^2/(b-c) = 1$, пересекаемый двуполостными гиперболами $b < \lambda < a$ и плоскостями $\lambda = b, a$. Иначе говоря, точка такого эллипса не может оказаться вершиной трехмерного листа. Сам эллипс может принадлежать двумерной или трехмерной клетке, а его отдельная точка — попадать на одномерное ребро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим нормальную плоскость n^k к клетке $\pi(e^{n-k})$ в R^n , проведенную в ее внутренней точке P . Такая клетка, напомним, лежит в пересечении ровно k софокусных квадратов, т.е. нормальная плоскость к клетке

будет натянута на пересечение касательных пространств к остальным $n - k$ софокусным квадракам, проходящим через данную точку P .

Поднимем нормальную плоскость n^k в X^n и пересечем с окрестностью клетки e^{n-k} . Получаемое множество имеет вид прямого произведения диска D^{n-k} (отвечающего касательному пространству к клетке e^{n-k} в точке P) на стратифицированную окрестность вершины некоторого комплекса-книжки Y^k . Тем самым, вместо двойной индукции по размерности n комплекса и коразмерности k клетки можно вывести обычной индукцией по $n \geq 2$, доказывая результат для вершины e^0 , т.е. случая $k = n \geq 2$.

1. Базой будет случай $n = k = 2$, тогда в качестве нормальной плоскости к вершине (точке) надлежит взять само пространство R^2 , т.е. в поднятии получится сама книжка X^2 (более точно, вся окрестность вершины в ней).

Гиперграни (являющиеся при $n = 2$ одномерными ребрами) проецируются на две квадраки, перпендикулярные друг другу. Тот факт, что каждый лист встречается в циклических перестановках ровно два раза, следует из того, что в окрестности вершины e^0 замыкание двумерного листа e_i^2 содержит ровно два ребра $e_{i,1}^1$ и $e_{i,2}^1$ (гиперграни для $n = 2$).

2. Перейдем теперь к общему случаю. Будем также иллюстрировать рассуждение на примере $n = 3$. Отметим, что при таком n совпадают 1 и $n - 2$, т.е. одномерные ребра комплекса, переход от которых к нульмерным вершинам составляет суть теоремы, и “типерребра” (клетки коразмерности 2 и размерности $n - 2$). Последние имеют наибольшую размерность среди клеток, на которые накладываются какие-то нетривиальные условия (коммутирование перестановок с инцидентных гиперграней). При указанной иллюстрации будем явно указывать, какие именно условия мы используем: коммутирование на клетках *коразмерности 2* и транзитивность для любой клетки, или полученные по предположению индукции условие коммутирования перестановок для всех клеток *размерности 1 или большей*.

Если вершина $e^0 \in \partial e^n$ входит в границу листа, то она является его граничной вершиной (т.к. две гиперграни склеивались изометрично и биективно). Отсюда каждый лист e_i^3 вблизи вершины e^0 войдет ровно в три циклические перестановки, причем на каждую из трех квадрак E_1, E_2, E_3 , чье пересечение задает вершину, спроецируется ровно одна грань с циклом, содержащим e_i^3 . Аналогичное верно для произвольного n : лист e^n входит в n циклов, приписанных гиперграням, причем они проецируются на квадраки разных типов.

Каждой квадраке $E_\alpha = E_1, \dots, E_{3=n}$ вблизи вершины сопоставляются наборы перестановок, обозначаемые $\sigma_\alpha : \sigma_1, \dots, \sigma_{3=n}$. Каждый из них состоит из циклических перестановок гиперграней, проецирующихся на данную квадраку, и биективно покрывает множество листов, инцидентных вершине. Иными словами, каждый из них будет перестановкой на множестве всех листов, инцидентных e^0 .

Обозначим одномерное ребро (лежащее в пересечении $n - 1$ квадраки $E_1, \dots, \hat{E}_\alpha, \dots, E_n$) через $e_{\alpha,i}^1$. Здесь $\alpha = 1, \dots, n = 3$ есть номер квадраки, нормаль к которой является образом проекции касательного вектора к данной клетке (как одномерной кривой в комплексе). Будем говорить, что ребро имеет тип α . Натуральное

i нумерует ребра в множестве ребер типа α (все они и для всех $\alpha = 1, \dots, n$, напомним, инцидентны e^0).

Рассмотрим для ребра $e_{\alpha,i}^1$ множество гиперграней e_j^{n-1} , инцидентных ему. Каждой из $n-1$ квадратике, содержащей проекцию данного ребра, соответствует перестановка $\sigma_{\beta,i}$ для $\beta \neq \alpha$, составленная из циклов тех гиперграней, которые инцидентны ребру $e_{\alpha,i}^1$ и проецируются на E_β для $\beta = 1, \dots, \hat{\alpha}, \dots, n$.

Для произвольного выбранного $\beta = 1, \dots, \hat{\alpha}, \dots, n$ (т.е. для выбранной квадратике, отличной от E_α) объединение перестановок $\sigma_{\beta,i}$ по всем i задает перестановку: каждый n -мерный лист инцидентен ровно одному ребру типа α .

ЛЕММА 2.1. *Пусть для каждого одномерного ребра $e_{\alpha,i}^1$ типа α попарно коммутируют перестановки $\sigma_{\beta,i}$ для $\beta = 1, \dots, \hat{\alpha}, \dots, n$ и фиксированного i . Тогда попарно коммутируют и сами перестановки, приписанные квадратикам $E_1, \dots, \hat{E}_\alpha, \dots, E_n$ разных типов.*

Тем самым, из коммутирования перестановок при каждом ребре (предположения индукции) будет следовать попарное коммутирование в вершине и перестановок, приписанных всем n квадратикам.

3. Рассмотрим теперь ребро e_α^1 типа α , инцидентный ему лист $x = e^n$ и содержащую этот лист орбиту

$$O_{\hat{\alpha}}(x) := O_{1, \dots, \hat{\alpha}, \dots, k}(x),$$

порожденную набором остальных $n-1$ перестановок на квадратиках, отличных от α .

Если образ $z = \sigma_\alpha(x) \in O_{\hat{\alpha}}(x)$, то и любая композиция $\sigma_1^{m_1} \circ \sigma_n^{m_n}$ переведет данную орбиту (как множество листов) в себя. Это следует из коммутирования любых двух перестановок на разных квадратиках: для каждого $y \in O_{\hat{\alpha}}(x)$ существует такой моном $\vec{m}(y) = (m_1, \dots, \hat{m}_\alpha, \dots, m_n)$ т.ч.

$$y = \sigma^{\vec{m}}(x) = \left(\sigma_1^{m_1} \circ \dots \circ \sigma_1^{\hat{m}_\alpha} \circ \dots \circ \sigma_n^{m_n} \right) (x),$$

$$\sigma_\alpha(y) = \sigma_\alpha(\sigma^{\vec{m}}(x)) = \sigma^{\vec{m}}(\sigma_\alpha(x)) = \sigma^{\vec{m}}(z) \in O_{\hat{\alpha}}.$$

В описанном случае последняя α -я перестановка, примененная к орбите $O_{\hat{\alpha}}$ ребра типа α , переводит это множество в себя (при этом транзитивность действия всех перестановок для вершины будет следовать из транзитивности действия всех перестановок кроме σ_α для данного ребра).

Пусть для некоторого элемента $x \in O_{\hat{\alpha}} = O_{\hat{\alpha},i}$ из орбиты для ребра $e_{\alpha,i}^1$ элемент $\sigma_\alpha(x) \notin O_{\hat{\alpha}}(x)$. Тогда он принадлежит орбите того же типа α , но для другого ребра $e_{\alpha,j}^1, j \neq i$: $\sigma_\alpha(x) \in O_{\hat{\alpha},j}$.

Аналогично, тогда $\sigma_\alpha(O_{\hat{\alpha},i}) \subset O_{\hat{\alpha},j}$, т.е. σ_α вкладывает первую орбиту во вторую. Легко показать и биективность: если $y = \sigma_\alpha(x)$, и σ_α -прообраз элемента $z \in O_{\hat{\alpha},j}$ не лежит в $O_{\hat{\alpha},i}$, то т.к. для некоторого \vec{m} имеем $z = \sigma^{\vec{m}}(y)$ из транзитивности для $O_{\hat{\alpha},j}$, то

$$\sigma^{-\vec{m}}(w) = \sigma^{-\vec{m}}(\sigma_\alpha^{-1}(z)) = \sigma_\alpha^{-1}(\sigma^{-\vec{m}}(z)) = \sigma_\alpha^{-1}(y) = x \in O_{\hat{\alpha},i}$$

для $w \notin O_{\hat{\alpha},i}$, т.е. элемент x лежит сразу в двух орбитах. Получили утверждение, представляющее самостоятельный интерес:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть группа, порожденная n попарно коммутирующими перестановками $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ транзитивно действует на конечном множестве. Обозначим через O_1, \dots, O_k все орбиты элементов множества под действием подгруппы, порожденная поднабором $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ из $n - 1$ перестановок. Тогда из того, что σ_n переводит элемент одной орбиты O_i в элемент другой орбиты $O_j \neq O_i$ следует, что все орбиты имеют одинаковую мощность, а перестановка σ_n индуцирует циклическую перестановку ω на $\{1, \dots, k\}$ — множестве всех орбит O_1, \dots, O_k , так что сама σ_n биективно отображает орбиту O_i в орбиту $O_{\omega(i)}$.

Этот факт обобщает на случай n перестановок факт, позволивший классифицировать в [8] все связные двумерные столы-книжки, склеенные из листов типа A_1 , имеющих две граничные дуги — эллиптическую и гиперболическую (и содержащих 1 фокус семейства квадрик).

4. Из коммутирования и транзитивности в вершине несложно получить и последний пункт утверждения. Если имеется путь из k шагов от одного листа e_0^n к другому e_k^n , идущий через гиперграни k попарно различных типов E_{i_1}, \dots, E_{i_k} , то аналогичный путь будет существовать и для любого порядка квадрик $E_{i_{\omega 1}}, \dots, E_{i_{\omega k}}$, где ω есть некоторая перестановка на множестве $\{1, \dots, k\}$.

Для $n = 2$ утверждение следует из коммутирования перестановок напрямую. Для больших n коммутирование влечет возможность поменять местами две соседние перестановки σ_k и σ_{k+1} : рассмотрим их циклы $O_k(i)$ и $O_{k+1}(i)$, содержащие лист i , и элемент $p = \sigma_{k+1} \circ \sigma_k(i)$. Поскольку на множестве гиперграней, инцидентных клетке e^{n-2} из пересечения двух квадрик, действие транзитивно, и перестановки коммутируют, то из наличия листа $j : p = \sigma_{k+1}(j), j = \sigma_k(i)$ будет следовать и наличие листа $\tilde{j} = \sigma_{k+1}(i)$, и равенство $p = \sigma_k(\tilde{j})$.

Утверждение доказано.

Тем самым, каждой клетке размерности $0 \leq n - k < n - 1$ можно приписать перестановку, являющуюся композицией (в произвольном порядке) независимых циклов, приписанных инцидентным клетке гиперграней. Такая перестановка будет при определенных условиях на вектор скорости корректно задавать продолжение траектории, т.е. лист, на который переходит частица с исходного листа после удара о внутреннюю точку данной клетки. Более подробно опишем возникающие конструкции.

Склейка стола-комплекса из областей, изометрично проецируемых на \mathbb{R}^n и склеиваемых по гиперграням, задает и склейку фазового пространства соответствующей системы. Каждому листу книжки e_j^n сопоставим кокасательное расслоение $T^*\pi(e_i^n)$ к его проекции на \mathbb{R}^n . Поскольку метрика в \mathbb{R}^n единичная, отождествим касательное и кокасательные пространства, то будем для наглядности говорить о точках (стола-комплекса) и векторах скорости в соответствующих точках.

Кокасательное расслоение к внутренности листа \bar{e}^n задает на нем симплектическую и гладкую структуру. Граничным точкам соответствует факторизация, задаваемая отражением (от границы стола X^n) или законом склейки. Напомним, как задается отражение: вектор скорости разлагается в касательную и

нормальную (к гиперграни, в данной точке) составляющие, и затем перед нормальной меняется знак. Иными словами, его длина и энергия частицы сохраняется, и задается следующее отождествление точек фазового пространства:

$$(x, v_1) \sim (x, v_2), \quad x \in e^{n-1} \subset \partial e^n, \quad v_1 - v_2 \perp e^{n-1}.$$

Кокасательным пространствам к точке $x \in e^{n-k}$ для $1 < k \leq n$ соответствует k отождествлений, для каждой из гиперграней e_s^{n-1} , содержащих данную открытую клетку e^{n-k} в своей границе. Поскольку через точку проходит n взаимно перпендикулярных квадриков, то такое отождествление задает на сфере (любого положительного радиуса) в кокасательном пространстве к такой точке x ровно k отождествлений вида

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 = r^2, \quad \leftrightarrow \quad (y_1, \dots, y_{i_s}, \dots, y_n) \sim (y_1, \dots, -y_{i_s}, \dots, y_n), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Указанная склейка является непрерывной на $T^*\bar{e}^n$. Отметим, что по окрестности точки x в \mathbb{X}^n строится стратификация сферы фиксированного радиуса из кокасательного пространства. Гиперграням e_i^{n-1} отвечают сферы S^{n-2} (пересечение сферы S^{n-1} с касательной к квадрике плоскости), а клеткам меньшей размерности от 1 до $n - 2$ — пересечения таких сфер. Получаемые страты соответствуют знаку δ в эллиптических координатах для близкой к x точки, получаемой из последней сдвигом в направлении данного касательного вектора.

Определим теперь, как склеивается фазовое пространство бильярдной книжки из кокасательных пространств $T^*\bar{e}_i^n$ к ее листам (точнее, к их изометричным проекциям на \mathbb{R}^n). Рассмотрим для каждой точки $x \in X^n$ все листы \bar{e}^n , содержащие данную точку в своей границы. Если два листа \bar{e}_1^n, \bar{e}_2^n склеены по гиперграни e_j^{n-1} , то либо их проекции (вблизи проекции данной точки склейки) расположены по одну сторону от проекции квадрики $E_\alpha : e_j^{n-1} \subset E_\alpha$, либо по разные. В первом случае скажем, что два листа имеют разный знак $sgn_\alpha e_i^n$ относительно квадрики E_α , а во втором — что одинаковый. Рассмотрим также знак проекции $sgn_\alpha v_i$ векторов скорости v_1 и v_2 до и после отражения. Отождествление троек лист-точка-вектор устроен так:

$$(i, x, v_1) \sim (\sigma_j(i), x, v_2), \quad \leftrightarrow \quad x \in e^{n-1} \subset \bar{e}_1^n \cap \bar{e}_2^n, \quad |v_1| = |v_2|, \quad (v_1 - v_2) \perp E_\alpha,$$

$$sgn_\alpha v_1 \cdot sgn_\alpha e_1^n = -sgn_\alpha v_2 \cdot sgn_\alpha e_2^n.$$

Иначе говоря, проекция на касательную плоскость к квадрике у векторов совпадает, а направление нормальной составляющей, умноженное на знак самого листа (относительно квадрики) меняется.

Если вектор был направлен по касательной к данной квадрике, то вектор скорости (его проекция на $T^*\mathbb{R}^n$, индуцированная проекцией $\pi : X^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) не меняется. Отсюда получаем следующий факт: на фазовом пространстве бильярдной книжки, определенном выше, возникает слоение на совместные уровни первых интегралов бильярдных в областях, ограниченных софокусными квадриками.

Тем не менее, возникает следующая проблема с определением перехода с листа на лист, близкая к проблеме невыпуклых склеек в двумерном случае.

Напомним ее. Пусть более двух двумерных листов склеены по некоторой кривой, относительно которой они не являются выпуклыми. Тогда траектория, идущая по первому листу и касающаяся данной кривой, не будет одновременно траекторией, пересекающей корешок склейки трансверсально вблизи точки касания по направлению, близкому к касательному. Последняя испытает отражение дважды, и далее пойдет по листу с номером $\sigma^2(1)$. Иными словами, непрерывность здесь гарантируется только для свободных границ комплекса и локальных многообразий (склейки ровно двух листов по данному корешку).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как и в случае $n = 2$, возможность листов быть расположена по разные стороны от квадрик (т.е. иметь относительно них разный полный знак), порождает дополнительные условия на реализуемость таких наборов перестановок при фиксированной расположении листов. Это будет отдельным вопросом в наших будущих исследованиях.

Рассмотрим простейший случай, когда вблизи вершины (или внутренней точки клетки некоторой коразмерности) проекции листов имеют одинаковый знак относительно квадратик, содержащих гиперграницы, инцидентные данной клетке. Поскольку отражение шара непрерывно вблизи вершины k -гранного угла в \mathbb{R}^k , образованного координатными полуплоскостями, а перестановки на всех гипергранях коммутируют, то знак всех листов относительно всех k пересекающихся квадратик совпадает.

Это значит, что траектория частицы в бильярдной книжке, определяемая написанными выше условиями и трансверсальным ко всем k квадратикам вектором скорости, непрерывно поднимается из \mathbb{R}^k . Также будет корректно определено слоение Лиувилля, т.е. на отождествляемых тройках лист-точка-вектор набор значений первых интегралов одинаковый, а склейка границ $\partial T^*e_i^n$ непрерывна.

2.2. Моделирование многомерными книжками аналогов 3-атомов Фоменко. В данном разделе мы покажем, что многомерными бильярдными книжками моделируются невырожденные особенности коранга 1 интегрируемых систем. Отметим следующий факт. Хотя случай касания траекторией гиперграницы может не позволить непрерывно и однозначно продолжить траекторию, но это не мешает определить слоение Лиувилля, т.е. разбиение фазового пространства на слои, послойно гомеоморфное слоениям гладких и аналитических систем. В данном разделе мы обсудим конкретную серию бильярдных книжек и покажем, что их слоение позволяет промоделировать определенный класс особенностей интегрируемых систем.

Согласно общей теореме Н.Т.Зунга о невырожденных особенностях интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем с n степенями свободы на симплектическом многообразии M^{2n} , такая особенность представима в виде почти прямого произведения, возможно, с последующей факторизацией по действию конечной группы. Невырожденные локальные особенности (т.е. малые окрестности орбиты гамильтонова действия, имеющей минимальный ранг $0 \leq r < n$) имеют вид прямого произведения регулярного слоения $D^r \times T^r$ на канонические локальные особенности типов центр, седло и фокус. Две задаваемые на

двумерно имеют размерность 2 (т.е. задаются) являются малыми окрестностями задаются на Размерность регулярного слоя слоения Лиувилля, напомним, равна n .

В случае двух степеней свободы $n = 2$, т.е. совпадают размерности $n + 1$ и $2n - 1$ — неособая $dH \neq 0$ поверхность уровня Q_h^3 одного интеграла $H = h$ является одновременно с этим однопараметрическим семейством слоев слоения Лиувилля, параметр которого есть значение $F = f$ которого является значение второго интеграла на слое.

Локальные особенности коранга 1 в интегрируемых системах с n степенями свободы устроены как произведение 2-атома A или морсовского седла B'' на регулярное слоение $D^{n-1} \times T^{n-1}$. В ограничении на неособую поверхность Q^{n+1} совместного уровня $n - 1$ интеграла $F_2, \times F_n$, т.е. для фиксированной точки диска D^{n-1} , получаем произведение двумерной особенности на тор T^{n-1} .

Переход к полулокальным особенностям подробно обсуждается, например, в работе Н.Т.Зунга [20]. При этом вместо локальной особенности (окрестность точки минимума/максимума/седла) требуется взять полулокальную: 2-атом A (являющийся малой инвариантной окрестностью точки типа центр) или седловой атом V . Последний может иметь более одной особой точки на слое. Если особенность имеет тип прямого произведения, то окрестность особого слоя в Q^{n+1} имеет вид $V \times T^{n-1}$. При $n = 2$ это будут 3-атомы Фоменко типа прямого произведения $A \times S^1$ и $V \times S^1$. В настоящей работе мы промоделируем такие особенности для $n = 3$ многомерными бильярдными книжками X^3 .

В дальнейшем мы рассмотрим и случай почти прямого произведения, т.е. особенности, представимой как произведение $V \times T^{n-1}$, факторизованное по действию конечной группы, обладающему определенными свойствами [20]. В случае двух степеней свободы это 3-атомы со звездочками, т.е. фактор $V \times S^1$ по инволюции Z_2 .

Рассмотрим в R^3 лист e^3 в первом октанте $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, ограниченный координатными плоскостями $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ и тремя невырожденными квадратами: эллипсоидом $\lambda = 0 \in (0, a_3)$, однополостным гиперboloидом $\lambda = p \in (a_3, a_2)$ и двуполостным гиперboloидом $\lambda = q \in (a_2, a_1)$. В данном разделе будем также использовать обозначения

$$0 < c = a_3 < b = a_2 < a = a_1.$$

Первыми интегралами такой системы, помимо энергии H , являются также значения ξ_1 и ξ_2 двух каустик, которых касаются звенья траектории, проходящие через данную точку стола с данным вектором скорости. При фиксированном $H = h$ бифуркационная диаграмма в координатах (λ_1, λ_2) хорошо известна (см., например, [1, 22]). На этом рисунке прямая $\lambda_1 = p$ задает границу образа отображения момента и соответствует граничному однополостному гиперboloиду стола. Образ отображения момента на этом рисунке закрашен. Красный отрезок соответствует однопараметрическому семейству слоев, прообраз которого далее будет моделировать произвольный атом типа прямого произведения.

В левой нижней закрашенной камере $(p, b) \times (0, c)$ каустикой является эллипсоид с параметром λ_2 и однополостный гиперboloид с параметром $p < \lambda_1 < b$. Поскольку λ_1 отделен от c , то на особом уровне $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = c$ отсутствуют вырожденные критические точки.

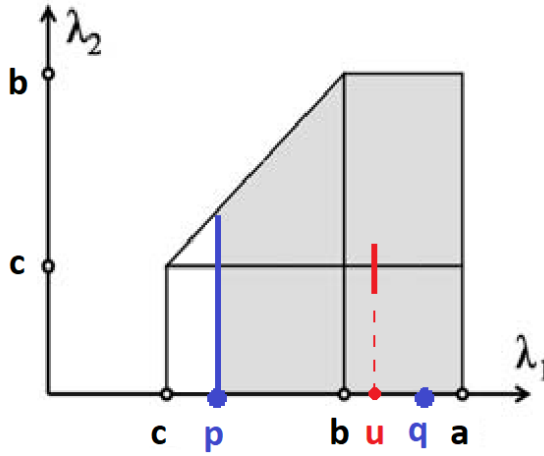


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма билиарда внутри трехосного эллипсоида и внутри области X_0 .

Другая пара первых интегралов I_1, I_2 , независимая с энергией H системы, удобна для вычислений в декартовых координатах:

$$2I_1 = (c+b)x_1^2 + (a+c)x_2^2 + (b+a)x_3^2 - (x_2x_3 - x_3x_2)^2 - (x_3x_1 - x_1x_3)^2 - (x_1x_2 - x_2x_1)^2,$$

$$2I_2 = cx_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 - a(x_2x_3 - x_3x_2)^2 - b(x_3x_1 - x_1x_3)^2 - c(x_1x_2 - x_2x_1)^2.$$

Точки фазового пространства, где $x_3 = 0, \dot{x}_3 = 0$ являются критическими. В них обращается в ноль следующая линейная комбинация интегралов: $-c \cdot |v|^2/2 + I_1 - \frac{1}{c}I_2$. Вычислив оператор линеаризации гамильтонова поля (относительно стандартной симплектической структуры $dx_i \wedge dx_i$ для фазового \mathbb{R}^6) в точках $x_3 = \dot{x}_3 = 0$, получим следующий квадрат собственного значения:

$$(b-c)(a-c)(bx_1^2 + ax_2^2 - c(x_1^2 + x_2^2) - x_2^2x_1^2 + 2x_1x_2x_1x_2 - x_1^2x_2^2).$$

Поскольку $0 < c < b < a$, то данное выражение положительно, когда положительна вторая скобка. Нетрудно видеть, что она равна

$$(b-c)x_1^2 + (a-c)x_2^2 - (x_2x_1 - x_1x_2)^2,$$

т.е. значению билиардного интеграла Λ (умноженного на $|v|^2$) для софокусного семейства на плоскости, имеющего параметры $\tilde{b} = b-c < a-c = \tilde{a}$. Иначе говоря, строго внутри эллипса

$$\frac{x_1^2}{a-c} + \frac{x_2^2}{b-c} = 1$$

данная скобка положительна, т.е. особенность является невырожденной седловой. Именно такие книжки мы будем рассматривать: они склеены из областей, ограниченных координатными тремя плоскостями и двумя гиперболами разных типов. На рис. 4 нетрудно видеть, что указанный эллипс отделен от нуля плоскости $x_3 = 0$ ее пересечениями с ними.

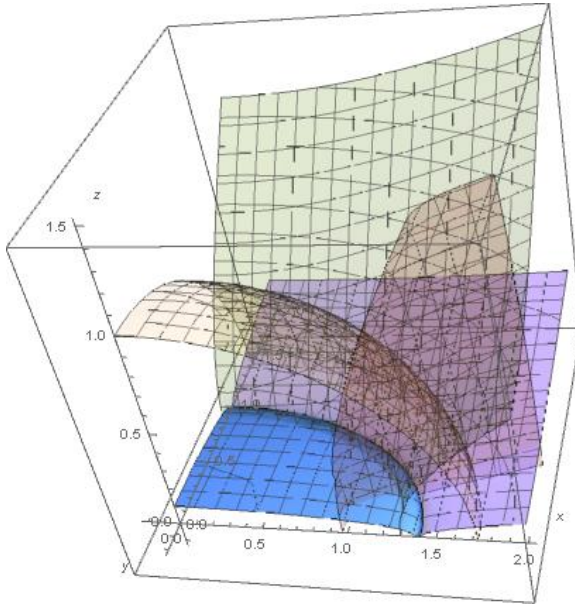


Рис. 4. Три квадрики, ограничивающие лист e_0^3 : эллипсоид и два гиперboloида разных типов. В плоскости $xz = 0$ начало координат отделено от особого эллипса (предела эллипсоидов при $\lambda \rightarrow c_3 - 0$) пересечениями с гиперboloидами.

Для особенности $V \times T^2$, где 2-атом V содержит k критически точек, все из которых являются морсовскими седлами, склеим книжку из $2k$ листов e_i^3 так. Пусть 2-атому V соответствует f -граф (предложенный А.А.Ошемковым, см. [26, 18]), задаваемый парой перестановок σ и $\tau = (1, 2) \dots (2n - 1, 2n)$ на “полукрестах”, т.е. половинках окрестностей морсовской седловой точки, на которые ее разбивает траектория градиентного (а не гамильтонова) потока.

ТЕОРЕМА 1. *Произвольная невырожденная особенность коранга 1 типа прямого произведения, возможная в интегрируемых гамильтоновых системах с 3 степенями свободы, моделируется бильярдными книжками, склеенными из трехмерных областей e^3 , лежащих в замыкании первого октанта R^3 , содержащих начало координат и ограниченных тремя невырожденными квадриками разных типов: эллипсоидом, однополостным и двуполостным гиперboloидами.*

Невырожденная эллиптическая особенность типа $A \times T^2$ моделируется бильярдом на листе e^3 при $0 \leq \lambda_2 < \varepsilon, c < \lambda_1 < b$.

Невырожденная седловая особенность типа $V \times T^2$ с 2-атомом V сложности k и f -графом, задаваемым перестановками σ и $\tau = (1, 2) \dots (2n - 1, 2n)$, моделируется бильярдом на бильярдной книжке, склеенной из $2k$ экземпляров листа e^3 со следующими перестановками: в прообразе эллипсоида перестановка равна σ , в прообразе плоскости $x_3 = 0$ — перестановка τ , остальные перестановки тождественны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Моделирование эллиптической особенности бильярдом в плоской области e^3 следует, например, из результатов В. Драговича и М. Раднович [1], а также недавней работе Г. В. Белозерова [22], где были описаны особенности коранга 1 трехмерных софокусных бильярдов в \mathbb{R}^3 .

2. При моделировании седловой особенности отметим следующее:

- поскольку скорость $|v|$ конечна, то гамильтоново поле $sgrad H$ на T^* полно,
- лист e^3 разбивается в множество дуг одномерных кривых $\xi_{1,2}$, точки которых имеют одинаковую пару эллиптических координат, соответствующих однополостному и двуполостному гиперблоидам,
- прообраз отрезка кривой $\xi_{1,2}$ (попадающего в e^3) в поверхности фазового пространства при фиксированном λ_1 и $b - \varepsilon \leq \lambda_2 \leq b + \varepsilon$ устроен одинаково.

В силу описанной выше невырожденности особенности, имеющей место при $\lambda_2 = b, c < \lambda_1 < b$ в прообразе точек $x_3 = 0$, указанный уровень устроен как полукрест седлового 2-атома. Более строго это следует из рассмотрения области, полученной объединением e^3 и его отражения от плоскости $x_3 = 0$. Ее пересечение с кривой $\xi_{1,2}$ устроено уже как крест — как окрестность морсовской седловой точки, и из соображений симметрии (а также трансверсальности сепаратрис поверхности $x_3 = 0$) имеем, что в прообразе половины такой дуги, соответствующей e^3 , лежит именно половина окрестности седловой точки.

3. Рассмотрим точку P стола e^3 и сферу единичных касательных векторов, проведенную в ей. Плоскость, касающаяся софокусного эллипсоида с параметром λ , проходящего через данную точку, является диаметром этой сферы. Пусть параметр этого эллипсоида равен $\xi_1 = \xi_1(P)$. Тогда множество прямых, проходящих через P и касающихся эллипсоида с параметром $\lambda \in (\xi_1(P), c)$ соответствует конус, пересекающий каждую полусферу по замкнутой кривой. Эти кривые симметричны при центральной симметрии.

На рис. 5 желтым изображена такая сфера, плоскость $x_3 = 0$ и лежащий в ней фокальный эллипс (он является границей предельного множества эллипсоидов при $\lambda \rightarrow c - 0$). Его уравнение имеет вид $x_1^2/(a - c) + x_2^2/(b - c)^2 = 1$. Все прямые (содержащие звенья траекторий на уровне $\lambda_2 = c$) проходят через его точку. На уровне $\lambda = b$ аналогичным свойством обладает гипербола $x_1^2/(a - b) - x_3^2/(b - c)^2 = 1$, лежащая в плоскости $x_2 = 0$. Изобразим зеленым и красным конуса с вершиной P над соответствующими квадратами.

Заметим, что два конуса пересекаются по четырем лучам, лежащих на разных прямых. Поскольку две ветви одной гиперболы могут лежать только на разных половинах конуса (относительно его вершины), если каждая из половин конуса над гиперболой пересекает конус над эллипсом по прямой, то у конусов будет четыре прямых и восемь общих точек на сфере. Последнее следует из центральной симметричности каждого из конусов (т.е. и их пары) относительно P , а также того, что гипербола проходит через фокус эллипса (и наоборот), лежащий в плоскости $x_3 = 0$. Т.к. точка P имеет положительную координату x_3 , то гипербола пересекает и сам конус над эллипсом, т.е. соответствующие половины конусов пересекаются минимум по двум точкам (равенство двум следует из того, что одна и та же половина конуса над эллипсом пересекает обе

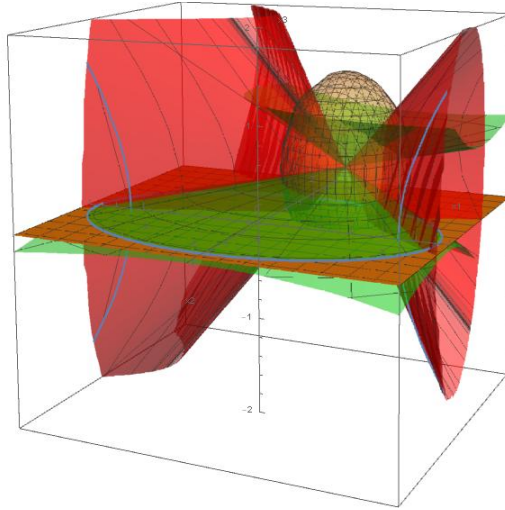


Рис. 5. Конусы с вершиной в некоторой внутренней точке P стола e^3 , проходящие через фокальные эллипс и гиперболу (зеленый и красный соответственно). Желтым изображены сфера единичного радиуса с центром в этой точке и плоскость $x_3 = 0$. Пересечения таких линейчатых поверхностей на сфере задают наборы векторов v длины 1 (пара точек P – вектор v), попадающих на один и тот же уровень $h = 1, \lambda_2 \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ и $\lambda_1 \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

половины минимум по четырем точкам, и еще 4 точки даст верхняя половина из наличия центральной симметрии).

Взяв уровень $b < \lambda_1 < q$ достаточно близким к b , получим что конус, образованный касательными к такому гиперboloиду будет близок к конусу над гиперболой. Аналогичное верно для эллипсоидов и гиперboloидов с параметром $\lambda_2 \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ – множество касательных к ним прямых образует поверхность, близкую к “зеленому” конусу. Сформулируем это наблюдение точнее: поскольку окрестность самого эллипса не пересекается с e^3 (стол ограничен двумя гиперboloидами с параметрами $c < p < b < q < a$), то для каждого эллипсоида с параметром $b - \varepsilon < \lambda < b$ определен минимум и максимум координаты x_3 на его точках, попадающих в \bar{e}^3 , и функция $x_3(x_1, x_2, \lambda)$ является непрерывно дифференцируемой по всем переменным и отделенной от нуля при фиксированном $\lambda < b$.

4. Рассмотрим пару областей типа e_3 , симметричных друг другу относительно $x_3 = 0$. Обозначим ее $e_{(2)}^3$. Для внутренности $e_{(2)}^3$ рассмотрим прообраз отрезка $Y : |v| = 1, \lambda_1 = u, \lambda_2 \in [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ из образа отображения момента. Имеем интегрируемую гамильтонову систему с 3 степенями свободы, потоки гамильтоновых полей которой полны (хотя подмножество фазового многообразия некомпактно). При $\lambda_2 = c$ имеем невырожденные критические точки ранга 2, в которых $x_3 = 0$ и $\dot{x}_3 = 0$.

Пересечение стола $e_{(2)}^3$ с плоскостью $x_3 = 0$ образует двумерный элементарный стол типа A'_1 , в точках которого $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, и ограниченный софокусными квадратами: эллипсом $\tilde{\lambda} = p - c < b - c$ и гиперболой $\tilde{\lambda} = q - c \in (b - c, a - c)$ следующего семейства:

$$\frac{x_1^2}{(a - c) - \tilde{\lambda}} + \frac{x_2^2}{(b - c) - \tilde{\lambda}} = 1, \quad \tilde{\lambda} \in [0, a - c].$$

Их вектора скорости в касательной плоскости к $x_3 = 0$ направлены так: они касаются гиперболы $\tilde{\lambda} = u - c < q - c$ и большей $b - c$, образуемой пересечением двуполостного $\lambda_2 = u$ и плоскости $x_3 = 0$. Поскольку данная гипербола не пересекает область A_1 , то имеем 4 связные компоненты, которые отличаются знаками проекций на оси Ox_1 и Ox_2 . Поскольку закон отражения на границах области A_1 стандартный, то получаем двумерный тор.

Каждой связной компоненте соответствует также по одной связной компоненте во всем 4-мерном множестве. Тем самым, имеем склейку четырех экземпляров произведения $B'' \times R^2$ 2-атома B , разрезанного трансверсально по обоим ленточкам, на R^2 , отвечающий точкам квадрата. Из описанных выше соображений и полноты потоков гамильтоновых полей первых интегралов данная структура действительно может быть расширена на всю внутренность стола с прообраза малой окрестности сечения A_1 в плоскости $x_3 = 0$.

5. На двумерных гранях, соответствующих уровням $\lambda = q, a$, меняется знак компоненты вектора \vec{v} , отвечающей наибольшей эллиптической координате, а при ударе о грани с условием $\lambda = p$ — на среднюю. Нетрудно видеть, что в прообразе на ребра (пересечения этих граней) склейка задает одновременное изменение знака обеих компонент.

Отсюда имеем, что в отсутствие склейки на гипергранях, лежащих на эллипсоиде $\lambda = 0$, имеем произведение $B'' \times T^2$, граница которого в прообразе каждой из двух граней (для положительных и отрицательных x_2) состоит из двух экземпляров произведения $D^1 \times T^2$. На одной из них вектор скорости направлен внутрь эллипсоида, на одной вовне. Склейка по прообразам данных граней даст атом B : отрезок D^1 отвечает за уровень λ_1 , а каждый тор T^2 проецируется на замыкание грани четырехлистно внутри, двулистно на ребрах и биективно на вершинах. Поскольку при склейке внешняя нормаль одной грани будет отождествлена с внутренней другой, а проекция на касательную плоскость склеится тождественно, то получаем ориентируемую поверхность, как и должно быть в случае интегрируемых систем на симплектическом многообразии.

6. Биекция между двумя экземплярами стола e^3 , скленными по грани $x_3 = 0$ и областью $e_{(2)}^3$ очевидна: на одном экземпляре e^3 ее считаем тождественной, а на второй требуется поменять знак x_3 и номер листа книжки. Такая биекция поднимается в фазовое пространство (путем изменения знака проекции вектора скорости на ось x_3 и номера листа). Поскольку перестановки на грани склейки в плоскости $x_3 = 0$ и инцидентных ей гранях являются транспозицией и тождественными, то каждая траектория бильярда будет однозначно продолжаема (а слоения Лиувилля для плоской области $e_{(2)}^3$ и книжки X_0^3 , склеенной из двух экземпляров области e^n по грани $x_3 = 0$ будут послойно гомеоморфны). Таким

образом, имеем n экземпляров книжки X_0^3 , и остается склеить их по прообразу грани e_{ell}^2 листа e^3 , лежащей на эллипсоиде (в ее точках $x_3 > 0$).

Поскольку в окрестности данной грани в \mathbb{R}^3 и в изучаемом подмножестве отображения момента склеиваемые тройки лист-точка-вектор имеют вектора скорости, трансверсальные к листу e_{ell}^2 и к другим граням и ребрам, то никакие три тройки лист-точка-вектор с одинаковыми точками (т.е. одним и тем же образом проекции π из книжки в \mathbb{R}) и одинаковыми векторами скорости не склеются в одну точку. Иными словами, отражение задает биективную склейку троек лист-точка-вектор (где под вектором для граничных точек грани мы понимаем либо два, либо четыре отождествленных векторов, исходя из отражения от остальных граней с тождественными перестановками). А именно, выходящий (из эллипсоида) вектор скорости для листа с номером i перейдет во входящий вектор (с противоположным знаком нормальной к e^2 составляющей) листа $\sigma(i)$. Данный закон корректно определен и на ребрах и вершинах стола-комплекса. Поскольку склейка сохраняла структуру прямого произведения, а указанная склейка границ n морсовских седел B'' задает 2-атом B , то получаем особенность $V \times T^2$.

Отметим, что для случая общей размерности $n \geq 3$ результат будет получаться аналогично: проверяется невырожденность особых точек в прообразе плоскости $x_n = 0$ (первые интегралы выражаются через симметрические многочлены), и используется соображение индукции: пересечение области e^n с плоскостью $x_n = 0$ есть область e^{n-1} , для которой устройство типичного слоя уже изучалось ранее.

Список литературы

- [1] V. Dragović, M. Radnović, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, 14:4-5 (2009), 479–494
- [2] В.В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик” // *Матем. сб.*, 206:10 (2015), 127–176.
- [3] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем” // *Матем. сб.*, 209:12 (2018), 17–56.
- [4] V. Dragović, M. Radnović, “Pseudo-integrable billiards and double-reflection nets” // *Russ. Math. Surveys*, 70:1 (2015), 1–31.
- [5] В.А. Москвин, “Топология слоений Лиувилля интегрируемого бильярда в невыпуклых областях” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2018, 3, 21–29.
- [6] V. V. Fokicheva, “Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas” // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 69:4 (2014), 148–158
- [7] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов” // *Матем. сб.*, 210:3 (2019), 17–74
- [8] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Бильярдные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем” // *Чебышевский сб.*, 23:1 (2022), 53–82.
- [9] A.T. Fomenko, V.A. Kibkalo, “Topology of Liouville foliations of integrable billiards on table-complexes” // *Europ. J. of Math.*, 8 (2022), 1392–1423.
- [10] В.В. Фокичева, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела” // *ДАН*, 465:2 (2015), 1–4.

- [11] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб., 212:8 (2021), 89–150.
- [12] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем” // Вестник Моск. унив. Серия 1: Матем. Механ., 2020, № 4, 22–28.
- [13] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды” // Изв. РАН. Сер. Матем., 83:6 (2019), 63–103.
- [14] V.V. Vedyushkina, “Liouville foliation of billiard book modeling Goryachev-Chaplygin case” // Moscow Univ. Math. Bull., 75:1 (2020), 42–46.
- [15] В.В. Ведюшкина, “Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе” // Матем. сб., 211:2 (2020), 3–30.
- [16] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы” // Изв. АН СССР. Серия Матем., 54:3 (1990), 546–575.
- [17] А.В. Болсинов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности” // УМН., 45:2 (1990), 49–77.
- [18] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация”. Т. 1 и 2. — Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [19] А.Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости” // Изв. АН СССР. Серия матем., 50:6 (1986), 1276–1307.
- [20] N.T. Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold-Liouville with singularities” // Compositio Math., 101:2 (1996), 179–215. <https://arxiv.org/abs/math/0106013>
- [21] К.Г.Якоби, Лекции по динамике, М., Гостехиздат, 1936
- [22] Г.В. Белозеров, “Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадрами” // Матем. сб., 213:2 (2022), 3–36.
- [23] Г.В. Белозеров, “Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2022, 6, 21–31.
- [24] Г.В. Белозеров, “Интегрируемость геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик”, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 509 (2023), 5–7.
- [25] Г.В.Белозеров, “Геодезический поток на пересечении нескольких квадрик в \mathbb{R}^n ”, Матем. Сборник, 2023 (в печати). [http : //dfgm.math.msu.su/files/RSF – papers4/Bel23.pdf](http://dfgm.math.msu.su/files/RSF-papers4/Bel23.pdf).
- [26] А.А. Ошемков, “Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей” // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей // Тр. МИАН, 205, Наука, М., 1994, 131–140.

В. В. Ведюшкина (V. Vedyushkina)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: aririr@yandex.ru

В. А. Кибкало (V. Kibkalo)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: slava.kibkalo@gmail.com