

Слоение Лиувилля бильярдных книжек, листы которых ограничены софокусными эллипсами

В.В.Ведюшкина, В.А.Кибкало, М.А.Никулин

1 Введение

Настоящая работа посвящена очередному шагу в гипотезе Фоменко С о моделировании бильярдами интегрируемых систем. Для того, чтобы ответить на этот вопрос в полной мере, необходимо понять, какие инварианты Фоменко-Цишанга могут встречаться при кодировании интегрируемых бильярдных книжек, а какие – нет. В данной работе полностью вычислен вид инварианта Фоменко-Цишанга для произвольной интегрируемой бильярдной книжки, листы которой ограничены софокусными эллипсами, т.е. с гладкой регулярной границей. Более того, представлен программный алгоритм который по фиксированным перестановкам вычисляет конкретный вид инварианта (граф Рыба, грубую молекулу и метки).

Зафиксируем семейство софокусных квадрик соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda).$$

Здесь a, b – фиксированные параметры семейства, которые в частности фиксируют расстояние между фокусами. Если $a > b > 0$, данное соотношение описывает семейство софокусных эллипсов и гипербол, в которые включены фокальная прямая $y = 0$ и предельная гипербола $x = 0$. Обозначим через F_1 и F_2 – фокусы этого семейства.

Лемма 1 *Рассмотрим бильярдную книжку, склеенную из t дисков, ограниченных фиксированным эллипсом (при этом натуральное $t > 2$). На единственном корешке стоит циклическая перестановка из t элементов. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности такой книжки в случае нечётного t изображен на рисунке 2а), а в случае чётного – 2б)*

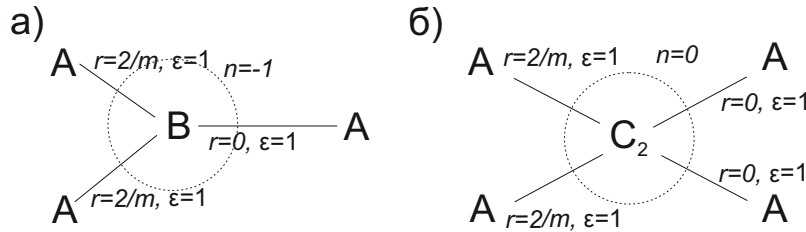


Рис. 1: Инварианты Фоменко-Цишанга, описывающие слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности бильярдной книжки, склеенной из t дисков, ограниченных фиксированным эллипсом.

Замечание 1 *Фазовое пространство бильярда является четырехмерным и описывается в виде пар (x, v) , где x – точка бильярдной области-стола, а v вектор скорости материальной точки в ней. Фиксируем ненулевую длину вектора скорости, полагая её без ограничения общности равной единице. Тогда систем описывается на изоэнергетической трехмерной поверхности, которую обозначим через Q^3 . Определим проекцию h этой поверхности (а также линий уровня функции Λ в ней) на бильярдный стол следующей формулой: $h(x, v) = x$.*

Доказательство. Шаг первый. Вычисление грубой молекулы.

Пользуясь методами изложенными, например в [??], легко показать, что все слои Λ за исключением слоёв соответствующих значениям 0 , b , a гомеоморфны несвязному объединению торов. Пусть $\Lambda = \lambda < b$. В этом случае траектории, лежащие на уровне λ касаются эллипса с этим параметром (обозначим его через e_λ). Все они естественным образом разбиваются на два класса: те, что закручиваются по часовой стрелке и те, что закручиваются в противоположном направлении относительно эллипса e_λ . Фиксируем теперь направление обхода. Рассмотрим прообраз h^{-1} точек бильярдной книжки, лежащих вне эллипса e_λ . Фиксируем лист книжки. Проекция слоя попадает в кольцо между границей листа и эллипсом e_λ . В прообразе каждой внутренней точки этого кольца лежат две точки слоя, различающиеся направлением вектора v – к эллипсу e_λ и от него. В прообразе точек эллипса e_λ эти два кольца из прообраза отождествляются. Таким образом, в прообразе каждого листа книжки лежит цилиндр. В прообразе всей книжки лежит результат последовательной склейки этих цилиндров вдоль граничных окружностей. В результате получим, что эта часть слоя является двумерным тором, а целиком слой состоит из двух торов (отвечающих траекториям по и против часовой стрелки). Аналогично можно рассмотреть слои соответствующие значениям $\lambda > b$.

Рассмотрим теперь слои $\Lambda = 0$ и $\Lambda = a$. Эти слои отвечают вырожденным движениям-окружностям. В первом случае это два движения по корешку книжки (по и против часовой стрелки). Во втором случае – это движения вдоль вырожденной гиперболы – оси Oy . Поэтому в изоэнергетической поверхности Q^3 окрестности этих слоев описываются 3-атомами A .

Рассмотрим слой $\Lambda = b$. Рассмотрим предел двух торов Лиувилля, которые соответствовали уровню $\Lambda < b$. Эллипс e_λ вырождается в отрезок между фокусами. Траектории будут последовательно проходить через фокусы семейства квадрик. Фиксируем семейство торов Лиувилля, траектории которых закручивались по часовой стрелке. На этих торах рассмотрим прообразы эллипса e_λ . Эти прообразы являются гомологичными циклами на этом торе. При $\Lambda = b$ эти циклы проектируются на бильярдную книжку в отрезок между фокусами. Точки (x, v) этих циклов принадлежат к объединению U_b следующих трех множеств. Первое – это точки $x = F_1$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $\varphi \in [0, \pi]$ второе – это точки $x \in [F_1, F_2]$, $v = (\pm 1, 0)$, третье – это точки $x = F_2$, $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $\varphi \in [\pi, 2\pi]$. Множество точек U_b по прежнему гомеоморфно окружности, поэтому предел при $\lambda \lim b$ торов Лиувилля, отвечающих траекториям, закручивающимся по часовой стрелке, является тором.

Аналогично можно рассмотреть предел торов, отвечающих траекториям, закручивающихся против часовой стрелки. Как устроено множество общих точек у предельных торов. Это в точности критические траектории, проходящие по фокальной прямой. В зависимости от четности m их либо одна (если m нечетно), либо две (если m четно). На предельных торах эти траектории изображаются нетривиальными циклами (гомологичными в случае четного m). Склейка двух торов по циклам приводит к образованию особого слоя либо 3-атома B (если траектория одна), либо 3-атома C_2 (если траекторий две). **Шаг второй. Вычисление меток.** Напомним, что циклы λ на граничных торах седловых атомов выбираются гомотопными слоям расслоения Зейферта, т.е. критическим окружностям. Они определены однозначно, причем их ориентация обязана совпадать с ориентацией критических окружностей. Дополняющие их циклы μ выбираются неоднозначно, но все они должны лежать на граничных окружностях трансверсального критической окружности сечения – 2-атома. Циклы λ на граничных торах минимаксных атомов A однозначно выбираются как стягиваемые в точку внутри атомов-полноторий. Несмотря на то что сами по себе дополняющие их циклы μ выбираются неоднозначно, на них тем не менее можно однозначно определить ориентацию. Дело в том, что при стремлении к критическому слою-окружности атома A эти циклы переходят в эту самую критическую окружность траекторию, которая и задаст на них искомую ориентацию.

Для наглядного представления цикла на граничном торе в нашем случае будем изображать проекцию этого цикла на бильярдный стол. Для восстановления цикла необходимо рассмотреть прообраз этой кривой на торе. Этот прообраз может быть несвязен. В этом случае мы либо в качестве цикла берем любую компоненту связности или либо ту, которая соответствует указанным на рисунке векторам скорости (например, направленным вправо или вверх).

Проекции циклов на листы бильярдной книжки изображены на рисунке 2. На рисунке 2а) изображены проекции циклов на граничных торах атомов A . На рисунке 2б) изображены проекции циклов на граничных торах седловых атомов, относящихся к уровню интеграла $\Lambda < b$. В этом случае проекции цикла λ в случае четного m проходят только по черным линиям. На рисунке 2в) изображены проекции циклов на граничных

торах седловых атомов, относящихся к уровню интеграла $\Lambda > b$. В этом случае цикл λ в случае четного m проходит сверху вниз на нечетных листах и снизу вверх на четных (и не проходит по направлению серых стрелок). На первом листе книжки в случае четного и нечетного m циклы μ выбраны одинаково, однако на других листах они различаются (см. подробнее рисунок). Ориентируем все ребра по направлению к седловому атому. Далее разберем случаи четного и нечетного m отдельно.

Пусть $m = 2k + 1$ нечетно. Тогда матрица склейки на нижних ребрах имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 2k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, а на верхнем $\begin{pmatrix} 2k+1 & 1 \\ -2k & -1 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $2 \left[-\frac{k}{2k+1} \right] + \left[-\frac{-1}{1} \right] = -1$.

Пусть $m = 2k$ четно. Тогда матрица склейки на нижних ребрах имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k-1 \end{pmatrix}$, а на верхних $\begin{pmatrix} k & 1 \\ -k+1 & -1 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $2 \left[-\frac{k-1}{k} \right] + \left[-\frac{-1}{1} \right] = 0$.

Лемма доказана.

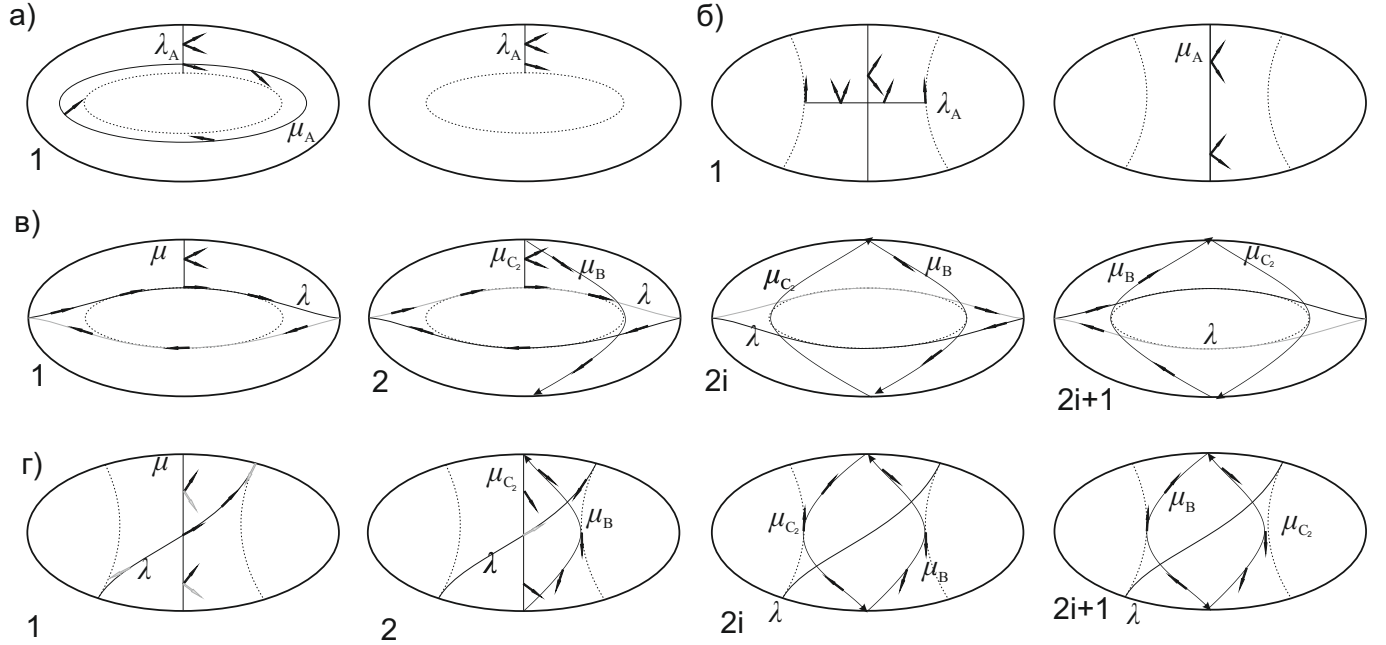


Рис. 2: Проекция циклов на билиард.

Замечание 2 Случаи $m = 1$ и $m = 2$ отвечают плоскому билиарду в эллипсе и топологическому билиарду, склеенному из двух дисков. В этих случаях грубые молекулы имеют указанный в теореме вид, однако все метки r равны нулю. Приведенные матрицы склейки будут иметь приведенный вид, однако вычисленные по ним метки будут иными.

В дальнейшем описанную выше билиардную книжку будем обозначать через $\mathbb{B}(A_2)_m$.

Теорема 1 Рассмотрим книжку, склеенную из некоторого числа колец и некоторого ненулевого числа дисков, все из которых ограничены софокусными эллипсами. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, кодирующий слоение Лиувилля такой бильярдной книжки имеет следующий вид.

- Часть молекулы, отвечающая значению $\Lambda < b$, т.е. соответствующая касающимся эллипсов траекторий, разбивается на две одинаковые части W . Каждая из них имеет структуру произвольного графа Руба, в минимальных вершинах которого расположены минимаксные атомы A , верхние ребра пусты, а во всех остальных вершинах расположены седловые атомы без звездочек.
- Атомы, расположенные на фокальном слое, это либо атомы B , либо атомы C_2 , соединяющие свободные ребра различных копий молекулы W . Если траектории, лежащие на некоторой компоненте связности особого слоя проходят по нечётному числу дисков, составляющих бильярдную книжку, то этот атом имеет вид B , во всех остальных случаях – атом C_2 .
- Метки между седловыми атомами части W имеют вид $r = \infty$, $\varepsilon = 1$. Метки между атомами A и седловыми атомами имеют вид $r = 0$, $\varepsilon = 1$. Метки между седловыми атомами на фокальном слое и седловыми атомами из части W имеют вид $r = 1/2$, $\varepsilon = 1$.
- Метки n для семей, состоящих из фокальных атомов B равны -1 , для семей, состоящих из седловых атомов C_2 равны нулю. Для семей, состоящих из седловых атомов частей W метка $n = \sum [\frac{m_i}{2}]$, где суммирование ведется по всем ребрам между атомами W и атомами, лежащими на фокальном слое, а m_i равно числу областей дисков, по которым совершает движение траектория, инцидентная данному ребру.

Доказательство. Заметим, что на уровне $\Lambda < b$ все траектории разбиваются на два класса – закручивающиеся вдоль эллипсов по и против часовой стрелки. Эти траектории, очевидно, лежат на разных слоях, причем слои идентичны друг другу.

Далее, заметим, что седловые бифуркации могут возникать либо на слоях, соответствующих невыпуклым склейкам, либо на слоях, соответствующих траекториям, проходящим через фокусы. Тогда на уровнях $\Lambda > b$ седловых бифуркаций нет, так как все склейки происходят вдоль дуг эллипсов.

Каждый седловой атом, возникающий на уровне $\lambda_0 \in (0, b)$ имеет структуру тривиального расслоения Зейферта. В самом деле, рассмотрим отображение $\Lambda : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Фиксируем прообраз $\Lambda^{-1}(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ для некоторого малого $\varepsilon > 0$. Тогда часть этого прообраза, проектирующаяся на вертикальный отрезок, задаёт базу искомого расслоения Зейферта. Слоями являются дуги софокусных эллипсов, оснащенные подходящими векторами скорости.

Покажем, почему в качестве части W может выступать любой граф, кодирующий произвольную базу слоения Лиувилля, не содержащую атомов со звездочками (т.е. не имеющую седловых атомов с нетривиальным расслоением Зейферта). Обратимся к доказательству утверждения о моделировании базы любого слоения Лиувилля с помощью бильярдных книжек из статьи В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой. Для доказательства были использованы бильярды B_0 , не имеющие общих точек с фокальной прямой, и ограниченные двумя дугами гипербол (выпуклой и невыпуклой) и двумя дугами эллипсов. Если в искомой молекуле не было атомов со звездочками, то алгоритм Ведюшкиной-Харчевой предполагал, что такая бильярдная книжка не имеет склеек вдоль гиперболических дуг. Но в этом случае, возникающая грубая молекула совпадает с частью грубой молекулы W если заменить бильярды B_0 на бильярды-кольца C_2 , ограниченные дугами софокусных эллипсов.

Рассмотрим уровень $\Lambda = b$. Рассмотрим связную часть особого слоя. Все траектории на такой части расположены на некотором количестве эллипсов m_i и некотором количестве колец. Заметим, что тип особого слоя полностью определяется числом m_i . Если m_i отлично от нуля, то особый слой гомеоморфен особому слою книжки, склеенной из m_i эллипсов (кольца лишь удлиняют соответствующие слои расслоения Зейферта, не меняя структуру слоения вблизи фокусов). Если же m_i равно нулю, то на таком уровне есть две симметричные особые траектории на фокальной прямой. Это приводит к симметрии полученного атома, который гомеоморфен атому C_2 .

Для вычисления меток, заметим, что на граничных торах всех атомов кроме фокальных циклы λ и μ могут быть выбраны так, что их проекция на бильярд находится либо на каустике, либо на трансверсальной к ней

квадрике. Поэтому все матрицы склейки на ребрах, соединяющие такие атомы имеют либо вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ либо вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Далее рассмотрим граничные торы атомов, соответствующие проходящим через фокусы траекториям. Ориентируем ребра молекулы по направлению к ним. Фиксируем число m_i – количество дисков, по которым проходя соответствующие траектории. Циклы выберем аналогичным случаю книжки из m_i дисков образом, однако для удобства заменим ориентацию циклов μ . Матриц склейки будут выписываются аналогично с заменой λ_A на μ_W и μ_A на λ_W , где через (λ_W, μ_W) обозначен базис, соответствующий граничному торы седлового атомы в части W молекулы.

Пусть $m_i = 2k_i + 1$ нечетно. Тогда матрица склейки на нижних ребрах имеет вид $\begin{pmatrix} 2k_i + 1 & 2 \\ -k_i & -1 \end{pmatrix}$, а на верхнем $\begin{pmatrix} -2k_i - 1 & 1 \\ -2k_i & 1 \end{pmatrix}$. Метки r, ε , задаваемые такой матрицей, будут искомыми. Вклад в метку n в семью из одного фокального атома равен $2 \left[-\frac{-1}{2}\right] + \left[-\frac{1}{1}\right] = -1$. Вклад в метку n в семью W равен $\left[\frac{2k_i+1}{2}\right] = k_i$.

Пусть $m_i = 2k_i$ четно. Тогда матрица склейки на нижних ребрах имеет вид $\begin{pmatrix} k_i & 1 \\ -k_i + 1 & -1 \end{pmatrix}$, а на верхних $\begin{pmatrix} -k_i & 1 \\ -k_i + 1 & 1 \end{pmatrix}$. Метки r, ε , задаваемые такой матрицей, будут искомыми. Вклад в метку n в семью из одного фокального атома равен $2 \left[-\frac{-1}{1}\right] + 2 \left[-\frac{1}{1}\right] = 0$. Вклад в метку n в семью W равен $\left[\frac{k_i}{1}\right] = k_i$. ■

Приведём теперь алгоритм, который по данной книжке, заданной набором областей – колец и дисков, ограниченных дугами софокусных эллипсов, и набору перестановок, приписанных их общим дугам сопоставляется инвариант Фоменко-Цишанга, кодирующий её слоение Лиувилля. Каждый лист задан двумя параметрами софокусных эллипсов лежащих в промежутке $[0, b]$. Если один из параметров равен b то это означает, что данный лист гомеоморфен диску. Все листы занумерованы, и каждой границе листа – параметру $\lambda \in [0, b]$ приписан номер листа на который переходит траектория после удара о такую границу.

Так как все листы книжки предполагаются занумерованными натуральными числами, каждому уровню склейки $\lambda_i \in (0, b)$ соответствует некоторая перестановка σ_i .

На уровнях $\Lambda < b$ все траектории разбиваются на два семейства, различающиеся направлением обхода вокруг софокусных эллипсов. Зафиксируем направление обхода и будем описывать торы и их перестройки траектории которых соответствуют этому направлению, т.е. только часть W , указанную выше, в теореме 1.

Шаг первый. Алгоритм вычисления количества торов на регулярном уровне $\Lambda < b$.

Фиксируем некоторый уровень интеграла $\Lambda = \lambda_i \in (0, b)$. Рассмотрим листы, которые ограничены квадратами, параметры которых меньше чем данное значение λ_i . Для того чтобы корректно посчитать количество регулярных торов нужно запустить следующий алгоритм.

Цель – получить перестановку, указывающую номера бильярдных, на которых траектория идёт “наружу”, т.е. от каустики по направлению к эллипсу с параметром 0. Эта перестановка состоит из номеров всех бильярдных, которые ограничены квадратами, хотя бы один из параметров которых меньше чем фиксированный выше λ_i . Временно модифицируем бильярды, к которых только один параметр меньше λ_i , а именно, припишем данному листу меньший параметр равный в точности λ_i и ставя на него тождественную перестановку.

Для начала выберем номера бильярдных с указанными выше свойствами. Фиксируем среди них произвольный номер. Рассмотрим траекторию, которая идёт “наружу”. Находим номер листа, на который перейдёт траектория после удара о меньший параметр эллипса на данном листе. Если новый лист находится выше (то есть второй граничный параметр его меньше того на котором смотрим перестановку), то записываем в цикл номер этого листа и повторяем процедуру. Если же этот лист находится по ту же сторону (то есть второй граничный параметр его больше того, на котором смотрим перестановку), то тогда на следующем листе траектория идёт “внутрь”. Переходим к следующему листу, повторяя процедуру без выписывания номера. Смотрим другой граничный параметр (он как выбрано, будет большим). Продолжаем менять листы до тех пор пока на следующем листе второй параметр не окажется меньше. Тогда запишем только этот лист. Выпи-

сываем номера листов до тех пор пока не будем обязаны выписать тот же номер листа с которого начинали данный цикл (то есть опять пойдём по нему “наружу”). Если мы перебрали все листы – то алгоритм закончен. Если нет – берём лист из выбранных ранее, который не вошёл в выписанные циклы, он войдёт в новый цикл перестановки. Количество циклов в новой перестановке – это и есть в точности количество торов Лиувилля, на которых траектории на данном уровне интеграла закручиваются в фиксированную сторону.

Шаг второй. Вид атома на уровне склейки листов.

Для начала рассмотрим перестановку σ , которая лежит на данном уровне λ , и описывает склейку листов вдоль дуг эллипсов с этим параметром.

Циклы перестановки σ разбиваются на три типа: либо цикл не содержит номеров листов, расположенных вне эллипса с параметром λ , либо цикл содержит ровно один такой цикл, либо цикл содержит больше одного листа вовне этого эллипса (так называемая невыпуклая склейка). Циклы первого типа на слое λ будут соответствовать движению по эллипсу с соответствующим параметром. Следовательно, они в меченой молекуле соответствуют 3-атомам A . Из циклов третьего типа изготовим циклы новой перестановки τ , удалив из них номера листов, лежащих внутри эллипса с параметром λ .

Отметим, что если перестановка τ имеет циклы длины больше чем два, то возникающий на данном слое атом не является боттовским. Трёхмерная седловая бифуркация на уровне λ описывается как прямое произведение некоторого 2-атома на S^1 . Этот 2-атом – сечение 3-атома – может быть описан как прообраз при проекции на бильярд положительного луча оси ординат. Данный прообраз можно описать как склейку так называемых “полукрестов”, лежащих в прообразе его некоторого интервала вблизи эллипса с параметром λ . Каждый полукрест отвечает листу, для которых эллипс с параметром λ является меньшей границей. Если вдоль такой границы склеиваются более чем два полукреста, это означает что окрестность седловой точки представляет собой так называемое “обезьянье седло”, что в боттовском случае по определению невозможно.

Таким образом перестановка τ описывает склейку полукрестов в кресты. Для полного описания 2-атома необходимо понять как склеить концы данных полукрестов. Опишем эту склейку перестановкой η . Применим предыдущий алгоритм для нахождения перестановки, кодирующего семейство торов на уровне $\lambda - \varepsilon$. В циклах найденной перестановки оставим только номера листов, входящих в перестановку τ . Тогда перестановка η описывает склейку концов полукрестов. В самом деле, надо понять когда исходящая траектория из листа примыкающего эллипсу с параметром λ с невыпуклой стороны придет как входящая на другой подобный лист. Но на уровне $\lambda - \varepsilon$ примыкающие листы были обрезаны (вместе с корешком), поэтому если траектория идет по направлению от каустики значит на прошлом шаге она была направлена к каустике на том же листе.

Отметим, что перестановки τ и η действуют на некотором множестве элементов. Все множество этих элементов вообще говоря можно разбить на подмножества, на которых эти перестановки действуют независимо. Разобьем его на максимальное число подмножеств. Тогда каждому подмножеству соответствует своя связанная компонента седлового атома.

Шаг третий. Построение части молекулы W – как склеить между собой с помощью торов бифуркации из предыдущего шага.

Рассмотрим особый слой на уровне λ . Его седловая часть кодируется перестановками τ и η . А минимаксная - некоторым количеством атомов A , которые возникают из циклов перестановки σ , состоящие из листов, целиком лежащих внутри соответствующего эллипса. К ним должны примыкать ребра, кодирующие торы, которые на уровне $\lambda + \varepsilon$ кодируются циклами, содержащими данные листы.

Каждая связанная компонента особого слоя содержит номера какой-то части перестановки τ . Торы, кодируемые циклами, содержащими эти номера, соответствуют ребрам, примыкающими к этой данной бифуркации.

Построение инварианта Фоменко-Цишанга.

На уровне $\Lambda = b - \varepsilon$ для каждой траектории существует ровно одна из трех возможностей: либо траектория проходит по фиксированным дискам, которых нечетное число, либо по фиксированным дискам, которых четное число, либо вообще не проходит через фокусы.

Верхние ребра двух симметричных компонент W необходимо завершить атомами B для траекторий первого типа и атомами C_2 для траекторий второго и третьего типа. Большим чем b уровням интеграла Λ соответствуют подходящие ребра для указанных атомов (одно для B и два для C_2), заканчивающиеся атомами A . Особые траектории этих атомов проходят вдоль вертикальной прямой.

Метки полностью восстанавливаются из теоремы 1.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-71-10106 в МГУ имени М.В.Ломоносова.