

# Слоение Лиувилля бильярдных книжек, склеенных из бильярдных $A_1$ .

В.В.Ведюшкина

МГУ имени М.В.Ломоносова

Под математическим бильярдом обычно понимается происходящее без потери скорости движение материальной точки по плоской области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ , ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой  $\gamma = \partial\Omega$  (стенку бильярда). Поскольку метрика евклидова, то ковектора можно отождествить с векторами — и далее будем для наглядности рассматривать  $M^4 = T\Omega / \sim$  как фазовое пространство. Элементы  $T\Omega$  являются парой точки  $P = (x, y)$  и вектора  $\vec{v} = (v_x, v_y) \in T_P\Omega$ . Гамильтонианом (энергией) системы является  $H = |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2$ .

Необходимость отождествить “далекие” друг от друга пары точка-вектор из  $T\Omega$  вызвана наличием отражения. Для выбранной точки  $P \in \gamma = \partial\Omega$  отождествляются векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{v}'$ , если их модули равны, а разность перпендикулярна касательной к  $\gamma$  в точке  $P$ . Это условие соответствует абсолютно упругому отражению с равенством углов падения и отражения. Если кривая  $\gamma$  не имеет излома в  $P$ , и вектор  $\vec{v}$  трансверсален  $\gamma$ , то он будет отождествлен с единственным вектором  $\vec{v}'$  (касательный к  $\gamma$  вектор является предельным положением пары таких отождествляемых векторов).

Если точка  $P$  есть точка излома  $\gamma$ , то обыкновенно требуют равенства  $\pi/2$  внутреннего угла. Если  $\vec{v}$  трансверсален обоим гладким дугам  $\gamma$ , то пара  $(P, \vec{v})$  отождествляется с тремя другими парами точка-вектор, а если направлена по касательной к одной из них — то ровно с одной парой. Тем самым, для плоского бильярда в области  $\Omega$  прообраз точки  $P \in \Omega$  в неособом уровне энергии  $Q_h^3 \subset M^4 : H = h$  относительно проекции  $\pi : (P, \vec{v}) \rightarrow P$  гомеоморфен окружности для  $P \in \text{Int } \Omega$  и отрезку для  $P \in \gamma$ . Попадание в точку излома с углом  $\pi/2$  может пониматься как необходимость частицы отразиться дважды, по разу от каждой из граничных дуг.

Имеются различные определения интегрируемости бильярда (см., например, [1]). Мы будем основываться на интегрируемости по Лиувиллю: требовать наличие первого интеграла, инволютивного и функционально независимого с энергией  $H$ . Всюду кроме прообраза границы фазовое пространство наследует гладкую и симплектическую структуру из кокасательного расслоения, т.е. инволютивность корректно определена. При отражении траектории от границы будем требовать непрерывности первого интеграла. Такое понятие “кусочно-гладкой” интегрируемости по Лиувиллю для бильярдных систем было предложено А.Т.Фоменко и описано в работе [2].

Простейшими примерами интегрируемых бильярдных систем служат бильярды внутри круга, прямоугольника и эллипса. В первом случае сохраняется радиус окружности, которой касается каждое звено ломаной-траектории, во втором — неориентированный угол между фиксированной прямой и прямыми, содержащими звенья траектории.

Дж. Биркгоф [3] рассмотрел бильярд внутри эллипса на плоскости как предельный случай задачи Якоби о движении вдоль геодезических на эллипсоиде  $E^2 \subset R^3$  при стремлении к нулю меньшей полуоси. Омбилические точки эллипсоида при этом переходят в фокусы граничного эллипса. По теореме Якоби–Шаля касательные к фиксированной геодезической на  $E^2$  касаются некоторого гиперболоида, софокусного с  $E^2$  и одинакового для всех точек данной геодезической. Если этот гиперболоид однополостный, то звенья образа геодезической касаются эллипса, а если двуполостный — то гиперболы. Получаемые квадратики имеют те же фокусы, что и граничный эллипс и принадлежат семейству  $Oxy$  :

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda). \quad (1)$$

Здесь параметры  $0 < b < a$  — квадраты полуосей граничного эллипса. Большая полуось эллипса лежит на оси  $Ox$  и содержит фокусы (будем иногда называть  $Ox$  фокальной осью), а малая — она вертикальной оси  $Oy$ . Они входят в семейство (1) при  $\lambda = b, \lambda = a$  соответственно.

Интегралом является значение  $\lambda$ : для каждого звена каустики является квадратик с этим параметром. Его явное выражение через  $x, y, v_x, v_y$  имеет вид

$$\Lambda = \frac{-(xv_y - yv_x)^2 + bv_x^2 + av_y^2}{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2)$$

Пусть  $\lambda = 0$ , Тогда  $P$  лежит на граничном эллипсе, а вектор  $\vec{v}$  касается его. Если  $\lambda = a$ , то  $P \in Oy \cap \Omega$ , и вектор  $\vec{v} \parallel Oy$ . Этим уровням соответствует одномерный уровень  $\Lambda = \lambda$  в  $Q_h^3$ . Уровень  $\lambda = b$  является двумерным. Звенья каждой траектории лежат на прямых, проходящих через один или другой фокус. Особые траектории на уровне  $\Lambda = b$  состоят из пар  $(P, \vec{v})$ : точка  $P \in Ox \cap \Omega$  и  $v \parallel Ox$ .

Поскольку софокусные квадрики пересекаются под прямыми углами, то  $\Lambda$  сохраняется [4] при отражении траектории от каждой кривой семейства (1). При этом отсутствие внутренних углов  $3\pi/2$  гарантирует непрерывность движения бильярда в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик.

Под *элементарным* (софокусным) бильярдом понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик семейства (1) и не содержит углов  $3\pi/2$ . Введенная В.В.Ведюшкиной в работе [5] эквивалентность таких столов (далее называем ее *структурной эквивалентностью*) сохраняет слоение и, опуская некоторые детали, определяется так. Два бильярда эквивалентны, если их области-стола переводятся друг в друга изометрией плоскости или же имеется непрерывная деформация параметров  $\lambda_i$  граничных дуг одного стола в параметры другого, сохраняющая тип каждой граничной дуги (эллиптический при  $(-\infty, b)$ , фокальный при  $\lambda = b$  и гиперболический при  $(b, a]$ ) и сохраняющая класс гомеоморфности стола  $\Omega$ . Примеры элементарных бильярдов изображены на рис. 1, их обозначения согласованы с работой [5].

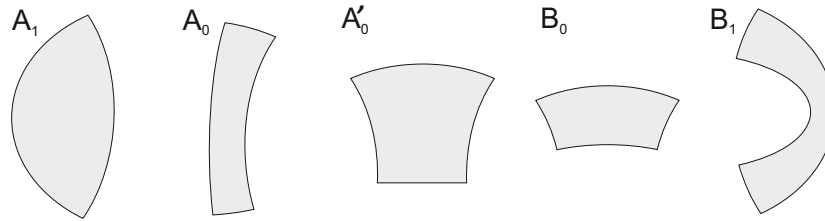


Рис. 1: Плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

Как отмечено, класс интегрируемых бильярдов на плоских столах с криволинейной границей (в отсутствие потенциала или магнитного поля) сводится к классу *софокусных бильярдов* на столах, ограниченных дугами софокусных квадрик и не имеющих внутренних углов  $3\pi/2$  в границе, а также классу *круговых бильярдов* — вырождению софокусных бильярдов при стремлении фокусов квадрики к ее центру (такие столы ограничены дугами концентрических окружностей и отрезками их радиусов, причем углы в точках излома границы равны  $\pi/2$ ).

Хотя данный класс является весьма узким (например, с точки зрения топологии слоений Лиувилля), он допускает следующие принципиальные расширения, предложенные В.В.Ведюшкиной.

**Определение 1** *Обобщенным (топологическим) бильярдом назовем динамическую систему на двумерном ориентированном компактном многообразии, склеенном (посредством изометрий) из элементарных софокусных бильярдов-листов:*

- *изометричная склейка двух бильярдов-листов по ребру означает склейку максимальной по включению гладкой дуги границы каждого из столов (т.е. либо эллипс, либо дуга от одного излома до другого),*
- *в каждой вершине склейки стола-комплекса сходится либо один, либо два, либо четыре угла плоских бильярдов-листов.*

**Замечание 1** *Для топологического бильярда определена проекция на плоскость, являющаяся изометрией и гомеоморфизмом в ограничении на замыкание каждого плоского листа.*

Движение по топологическому бильярду определяется так: внутри плоского бильярда-листа движение происходит стандартно, т.е. вдоль прямолинейных отрезков, с естественным отражением от границы. Как только материальная точка попадает на ребро склейки, то после отражения она продолжает движение по другому бильярду-листу.

Введение топологических бильярдов существенно расширило класс изучаемых бильярдов. В работах [5, 7] они были классифицированы как структурно, так и топологически: для всех них были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга.

Существенно более широким расширением оказалось введение В.В.Ведюшкиной класса бильярдных книжек [8, 9]. Эти столы являются CW-комплексами, ребра которых (1-клетки) оснащены перестановками на множестве инцидентных 2-клеток, см. подробнее [9].

Рассмотрим двумерный CW-комплекс, двумерными клетками которого являются плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Одномерными клетками комплекса являются сегменты границ элементарных бильярдов — участки между изломами граничных кривых. Занумеруем все двумерные клетки и припишем каждому одномерному ребру комплекса — “корешку” книжки — циклическую перестановку из номеров листов, примыкающих к данному ребру. Изометрично спроектируем все бильярды-листы на плоскость. Если образ нескольких ребер CW-комплекса при этой проекции является одной и той же дугой плоскости, то объединим приписанные им циклы в одну перестановку (эти циклы, очевидно, независимы). Для непрерывности движения частицы по книжке потребуем коммутирование перестановок в нульмерных клетках. В терминах проекции это означает, что перестановки, приписанные дугам двух квадрик в окрестности точки пересечения последних, коммутируют (см. рис. 2). Этот двумерный комплекс с приписанными перестановками назовем *бильярдной книжкой*.

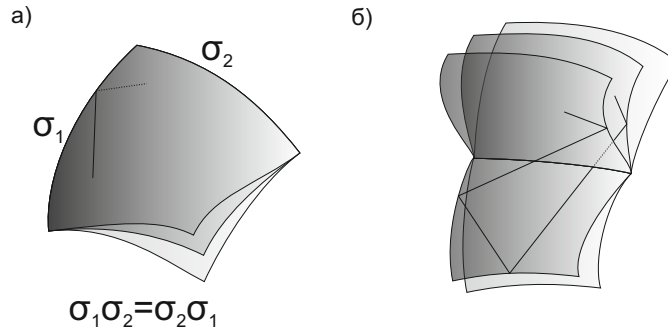


Рис. 2: Локальная структура окрестности вершины склейки бильярдной книжки.

Бильярдное движение по книжке определено следующим образом. Внутри двумерных клеток движение не меняется. Пусть при движении по листу с номером  $i$  материальная точка попадает на корешок книжки, тогда после удара она продолжит своё движение по листу  $\sigma(i)$ . Если листы с номерами  $i$  и  $\sigma(i)$  расположены по одну сторону от корешка, то при ударе происходит отражение, а если по разные — то точка не отражается, а проходит корешок “насквозь” (см. рис. 2).

**Замечание 2** *Условие коммутирования перестановок в углах книжки является необходимым и достаточным условием для того чтобы продолжение траектории, попавшей в вершину угла, было корректно определено. Обозначим через  $l_1$  и  $l_2$  дуги квадрик, которые имеют общую точку  $O$  и обозначим через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  приписанные им коммутирующие перестановки. Траектория попавшая в  $O$  с одной стороны является пределом близких траекторий, которые сначала ударяются о корешок  $l_1$ , а потом о корешок  $l_2$ . Такие траектории меняют номер бильярда по перестановке  $\sigma_2 \circ \sigma_1$ . С другой стороны, попавшая в вершину угла  $O$  траектория является пределом траекторий, которые ударяются о корешки в другом порядке и меняет лист по перестановке  $\sigma_1 \circ \sigma_2$ . Получается, что материальная точка при попадании в вершину угла поменяет лист по перестановке  $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$  вследствие коммутирования  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .*

Полученный класс весьма велик и в настоящее время не получена полная классификация бильярдов из этого класса. Задача сводится к описанию наборов перестановок, обладающих определенными свойствами. Ряд продвижений получено В.В.Ведюшкиной и В.А.Кибкало в недавней статье [10]. В ней В.А. Кибкало было доказано следующее утверждение.

**Утверждение 1** Пусть даны две коммутирующие перестановки  $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ . Тогда выполнено одно из двух.

- Одна из перестановок является степенью другой (такие перестановки будем в дальнейшем называть “незацепленными”).
- Перестановки раскладываются в объединение независимых циклов, так что все циклы в каждой из перестановок имеют одинаковую длину. При этом с помощью перенумерации элементов можно считать, что перестановки имеют вид

$$\sigma_1 = (1 \dots k) (k+1 \dots 2k) \dots (n-k+1 \dots n),$$

$$\sigma_2 = (1 \quad k+1 \quad 2k+1 \quad \dots \quad n-k+1 \quad l \quad l+k \quad \dots),$$

где  $l \in [1, k]$ . Т.е. перестановка  $\sigma_2$  последовательно пробегает по всем первым элементам циклов перестановки  $\sigma_1$ , а затем при переходе на первый цикл попадает на номер  $l$  (назовем число  $l$  смещением перестановки  $\sigma_2$  по отношению к перестановке  $\sigma_1$ ). Назовем такие перестановки “зацепленными”.

В работе [10] изучаются бильярдные книжки малой сложности, а именно, такие, что количество образов корешков дуг книжки в проекции на плоскость равно двум. Описаны всевозможные пары коммутирующих перестановок. Для некоторых бильярдных книжек вычислены инварианты Фоменко–Цишанга возникающих слоений Лиувилля. Изученные бильярдные книжки, в частности принадлежат к классу бильярдных книжек, полученных склейками из областей  $A_1$ .

Рассмотрим выпуклую часть плоскости, ограниченную дугой гиперболы и дугой эллипса. Обозначим такую область через  $A_1$  следуя обозначениям статьи [5]. Рассмотрим бильярдную книжку  $\mathbb{B}(A_1)$ , склеенную из  $n$  экземпляров области  $A_1$ , причем на гиперболическом корешке фиксирована перестановка  $\sigma$ , а на эллиптическом — перестановка  $\rho$ . Вследствие определения бильярдной книжки эти перестановки обязаны коммутировать, так как в этом случае движение материальной точки, попавшей в угол бильярдной книжки корректно определено.

Наша задача состоит в описании слоения Лиувилля бильярдной книжки  $\mathbb{B}(A_1)$ , склеенной из  $n$  листов  $A_1$  с коммутирующими перестановками  $\sigma$  и  $\rho$  на её корешках. Отметим, что если одна из перестановок является степенью другой, то бильярдная книжка является несвязной. При разложении в независимые циклы перестановок на корешках номера из разных циклов “не перемешиваются” друг с другом. Поэтому книжка распадется в объединение книжек, где путем перенумерации листов можно добиться того, что перестановка на одном корешке циклическая, а другая — её степень. В дальнейшем мы рассмотрим этот случай в рамках случая зацепленных перестановок (где в обозначениях выше  $k = n$ ).

Отметим уже существующие продвижения в задаче описания слоения Лиувилля данной бильярдной книжки. Если бильярдная книжка тривиальна, т.е. состоит из одного листа  $A_1$  то её слоение Лиувилля описывается молекулой Фоменко–Цишанга вида  $A - A^* - A$ , где все метки  $r = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $n = 0$ .

Если бильярдная книжка состоит из двух листов, т.е. является топологическим бильярдом, тогда инварианты имеют вид, изображенный на рис. 3.

Этот результат был обобщен в работе автора и В.А. Кибкало.

**Утверждение 2** Пусть  $\sigma = (1 \ 2 \dots t)$  — циклическая перестановка из  $t$  элементов. Рассмотрим бильярдные книжки, склеенные из  $t$  экземпляров бильярда  $A_1$ , где на гиперболическом корешке стоит циклическая перестановка  $\sigma = (1 \ 2 \dots t)$ , а на эллиптическом корешке — тождественная или обратная ей перестановка. Тогда их инварианты Фоменко–Цишанга, описывающие слоение Лиувилля изоэнергетических поверхностей изображены на рисунке 4а) (если перестановка тождественна) и 4б) (если перестановка обратна).

Рассмотрим общий случай произвольного вида перестановок, на корешках книжки  $\mathbb{B}(A_1)$  (считая эту книжку связной, т.е. перестановки должны быть “зацеплены”).

Опишем вначале все критические движения бильярдной книжки  $\mathbb{B}(A_1)$ . Напомним, что для бильярда в области  $A_1$  таких критических движений три. Во-первых, это движения по эллиптической и гиперболической границам. Они соответствуют максимуму и минимуму дополнительного интеграла (параметру каустики).



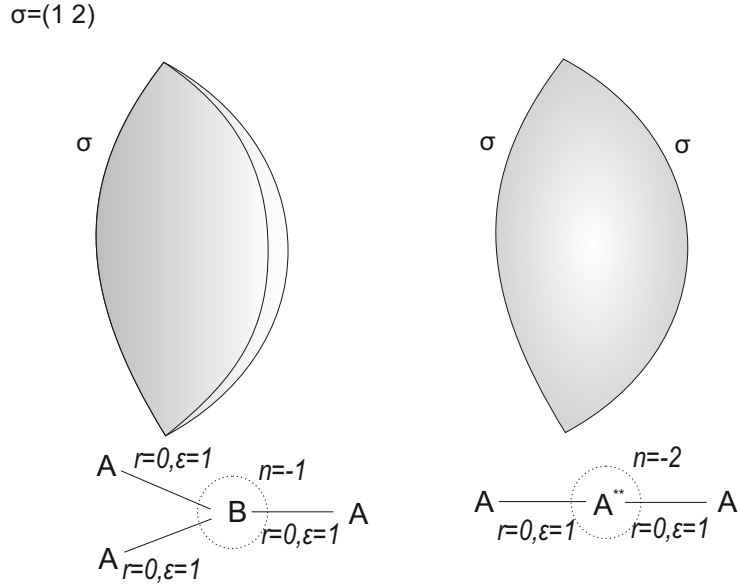


Рис. 3: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических билиардов, склеенных из двух листов  $A_1$ .

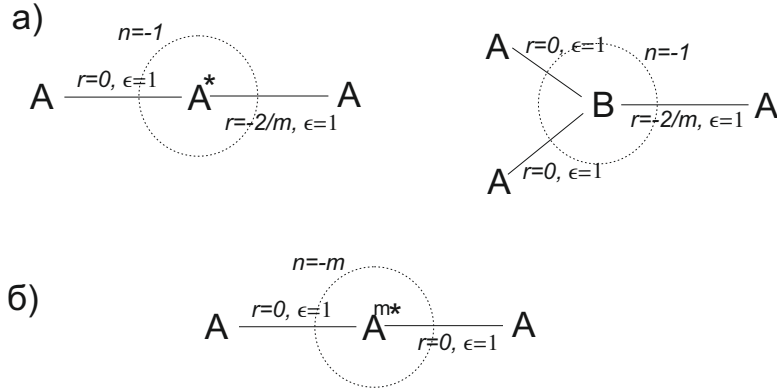


Рис. 4: Инварианты Фоменко-Цишанга для книжки, склеенной из  $n$  экземпляров билиарда  $A_1$ , где на гиперболическом корешке стоит циклическая перестановка  $\sigma = (1\ 2 \dots n)$ , а на эллиптическом корешке – тождественная (а) или обратная ей (б) перестановка. В случае а) вид грубой молекулы зависит от четности  $n$ . Для нечетного  $n$  – молекула слева, а для четного – справа.

Во-вторых, движение по фокальной прямой образует неустойчивую критическую окружность. Она лежит на особом слое, образованном траекториями, которые проходят (или проходят их продолжения) через фокусы семейства квадрик. Особый слой гомеоморфен особому слою атома  $A^*$ . В случае билиардной книжки  $\mathbb{B}(A_1)$  критические движения также распадаются на три класса. Опишем каждый из них.

**Утверждение 3** Пусть  $\mathbb{B}(A_1)$  – связная билиардная книжка, склеенная из выпуклых областей  $A_1$ , каждая из которых ограничена одной дугой эллипса и одной дугой гиперболы. Корешкам книжки приписаны коммутирующие перестановки  $\rho$  (эллиптической границе) и  $\sigma$  (гиперболической).

- Разложим перестановки  $\rho$  и  $\sigma$  в произведение независимых циклов. Если число циклов в разложении

нечетно, то в бильярдной книжке будет только одно критическое движение вдоль соответствующего корешка. Если число циклов четно, то таких движений ровно два.

- Разложим перестановку  $\omega = \sigma \circ \rho$  в произведение независимых циклов. Число критических окружностей равно числу этих циклов. Причем в каждом цикле записаны номера листов книжки по которым соответствующая критическая траектория имеет одинаковое направление.

**Доказательство.** Пусть дополнительный интеграл принимает своё минимальное значение. Оно равно параметру софокусного эллипса, образующего границу бильярдной области  $A_1$ . В этом случае проекция слоя на бильярдный стол расположена только на дугах софокусного эллипса с параметром  $\Lambda$ . Тогда эта проекция состоит из эллиптических корешков бильярдной книжки, которые в силу связности бильярдной книжки  $\mathbb{B}(A_1)$  имеют две общие точки (вершины бильярдной книжки – углы области  $A_1$ ). Легко понять, что эта проекция устроена как граф, состоящий из двух вершин и нескольких кратных ребер, число которых совпадает с числом независимых циклов в разложении перестановки  $\rho$ . Применим к перестановкам  $\rho$  и  $\sigma$  указанную выше лемму, где в качестве перестановки  $\sigma_1$  взята перестановка  $\rho$ . Тогда вторая перестановка  $\sigma$  – циклически действует на циклах перестановки  $\rho$ . Занумеруем эти циклы и соответствующие им ребра вышеуказанного графа. Материальная точка при движении по эллиптическому корешку с номером  $i$  после попадания в угол продолжает своё движение по корешку с номером  $i + 1$ . При этом возможны две ситуации. Если число циклов нечетно, то при таком движении материальная точка пройдет каждый корешок в обоих направлениях. Если число циклов четно, то возможны две различные траектории. Для случая когда интеграл принимает максимальное значение доказательство аналогично.

Пусть дополнительный интеграл принимает седловое значение, равное  $b$ . Все траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы семейства квадрик. Особая траектория походит вдоль фокальной оси. Разложим перестановку  $\omega = \sigma \circ \rho$  в произведение независимых циклов. Фиксируем какой-либо цикл и в нём первый элемент  $j$ . Рассмотрим особую траекторию, которая движется по листу с номером  $j$  по направлению к эллиптической границе. Тогда после удара об эллиптическую границу она будет двигаться влево по листу с номером  $\rho(i)$ , в после удара о гиперболическую границу по листу с номером  $\sigma(\rho(i)) = \omega(i)$ . Следовательно, циклы перестановки  $\omega$  указывают номера листов, на которых седловые критические траектории движутся от гиперболической границы к эллиптической. При этом количество особых траекторий находится во взаимном однозначном соответствии с циклами перестановки  $\omega$ . В заключение отметим, что для каждой траектории можно выделить два цикла перестановки  $\omega$ , причем один цикл будет указывать листы, по которым данная траектория движется от гиперболической границы к эллиптической, а другой – от эллиптической к гиперболической. Последнее связано с тем, что перестановка  $\omega = \sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$ . ■

**Утверждение 4** Пусть  $\mathbb{B}(A_1)$  – связная бильярдная книжка, склеенная из выпуклых областей  $A_1$ , каждая из которых ограничена одной дугой эллипса и одной дугой гиперболы. Корешкам книжки приписаны коммутирующие перестановки  $\rho$  (эллиптической границе) и  $\sigma$  (гиперболической).

Рассмотрим перестановку  $\omega = \sigma \circ \rho$  и разложим её в произведение независимых циклов. Перенумеруем листы бильярдной книжки так, чтобы

$$\omega = (1 \dots k)(k + 1 \dots 2k) \dots (n - k + 1 \dots n).$$

Тогда число  $t = \frac{n}{k}$  (число независимых циклов в разложении перестановки  $\omega$ ) равно числу критических окружностей 3-атома, описывающего бифуркацию на фокальном уровне  $\Lambda = b$ . Сам атом имеет следующий вид в зависимости от перестановок  $\sigma$  и  $\rho$ .

1. Если  $k$  нечетно, то атом на фокальном слое – это атом  $A^{*m}$ .
2. Если числа  $k$  и  $l$  четны (где  $l$  есть смещение перестановки  $\rho$  относительно перестановки  $\omega$ ), то атом принадлежит к серии максимально симметричных атомов  $Y_m$  (см. рис. 5).
3. Если число  $k$  четно, а число  $l$  нечетно, то атом принадлежит к серии максимально симметричных атомов  $X_m$  (см. рис. 5).

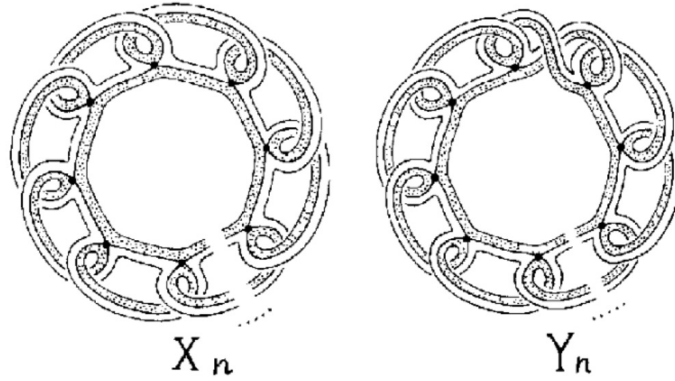


Рис. 5: Базы расслоения Зейферта максимально симметричных атомов серий  $X_n$  и  $Y_n$ .

### Доказательство.

Во-первых, напомним, что мы рассматриваем случай, когда перестановки  $\sigma$  и  $\rho$  зацеплены друг с другом: если одна из них является степенью другой, то обе перестановки есть степень одной и той же циклической перестановки. Это условие возникает, так как мы предполагаем что наша книжка является связной.

Рассмотрим перестановку  $\omega = \sigma \circ \rho$ . Отметим, что такая перестановка коммутирует с обеими перестановками на корешках и является зацепленной с ними. Разложим перестановку  $\omega$  в произведение  $m$  независимых циклов. Пусть длина каждого цикла равна  $k$ . Переобозначим листы бильярдной книжки через  $a_{i,j}$  следующим образом. Первый индекс  $i$  – это номер цикла перестановки  $\omega$ , т.е.  $i \in \{1..m\}$ . Вторым индексом – это номер листа в цикле. При этом можно считать, что перестановка  $\rho$  действует следующим образом. Для  $j < m$   $\rho(a_{i,j}) = a_{i+1,j}$ , а для последнего цикла  $\rho(a_{m,j}) = a_{1,j+l \bmod k}$ .

В силу того что перестановка  $\omega$  распадается в объединение одинаковых циклов, каждый из которых соответствует некоторой критической окружности, то на атоме-бифуркации есть естественная симметрия. Перенумерация листов книжки, переставляющая местами циклы перестановки  $\omega$  не меняет атом. Следовательно, все критические движения “равноправны”. Поэтому все критические окружности в расслоении Зейферта 3-атома имеют одинаковый тип. Иначе говоря, атом либо содержит  $m$  звездочек, либо не содержит звездочек вовсе.

Рассмотрим на торах Лиувилля циклы, предел которых совпадает с критическими окружностями седлового 3-атома. Такие циклы при проекции на листы бильярдной книжки изображены на рисунке 6а). Стрелками указаны вектора скорости, которыми необходимо оснастить эти кривые чтобы поднять их до кривых на соответствующих торах Лиувилля. Отметим, что каждая пара кривых изображенных на рисунке соответствует некоторому однократному действию перестановки  $\omega$ . В самом деле, пусть верхняя кривая на листе  $i$  проходит слева направо, её конец склеивается с началом нижней кривой, проходимой в направлении справа налево, расположенной на листе с номером  $\rho(i)$ . Однако после отражения при движении слева направо по нижней кривой происходит на листе с номером  $\sigma(\rho(i)) = \omega(i)$ .

Рассмотрим первый цикл перестановки  $\omega$ . Пусть  $k$  четно. На листах с номерами  $a_{1i}$  будут расположены части циклов  $\lambda$ , оснащенные векторами по направлению к граничному эллипсу (на рисунке это направление “направо”). Причем если  $i$  нечетно, то эти части кривых расположены выше оси  $Ox$ , в если четно – то ниже. При этом предел цикла  $\lambda$  обходит критическую траекторию один раз. Это означает, что в атоме данная траектория соответствует неособому слою расслоения Зейферта.

Пусть теперь число  $k$  элементов в цикле перестановки  $\omega$  нечетно. Тогда на каждом листе  $a_{1i}$  будут расположены обе кривые (с одинаковым направлением). В этом случае цикл  $\lambda$  в пределе накроет критическую траекторию дважды. Это означает, что данная критическая траектория в атоме есть особый слой типа  $(2, 1)$ . Далее, так как все критические окружности равноправны, а атом-бифуркация перестраивает один тор в один (согласно утверждению 2), то этот атом бифуркация однозначно восстанавливается из классификации атомов как атом  $A^{*m}$ .

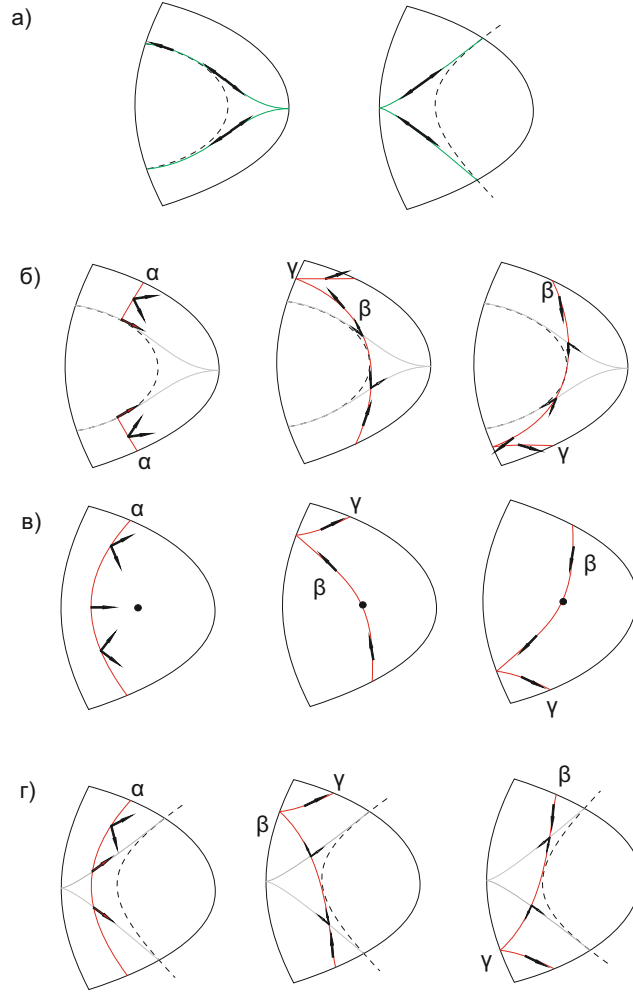


Рис. 6: Циклы  $\lambda$  и  $\mu$  на граничных торах Лиувилля седловых атомов.

Пусть теперь число  $k$  четно. Предъявим базу слоения Зейферта 3-атома, т.е. два атом. Рассмотрим кривые, изображенные на рисунке 7. Эти кривые  $\alpha, \beta, \gamma$  выбираются в проекции как регулярных торов Лиувилля, так и для особого слоя. На рисунке указаны вектора скорости, которые позволяют поднять эти кривые до одноименных кривых на соответствующих слоях лиувиллева слоения.

При этом предполагаем что эти кривые (на торах Лиувилля) ориентированы по направлению векторов скорости, приписанным точкам их проекций на листы бильярдной книжки.

Рассмотрим следующий набор листов книжки с кривыми, изображенными на рисунке 7.

- Листы  $a_{i,1}$ ,  $i \in 1..m$  (т.е. первые листы в каждом цикле перестановки  $\omega$ ), на которых выбрана дуга некоторой гиперболы из семейства софокусных квадрик и приписаны вектора по направлению к граничному эллипсу (левые части рисунков а)-в)7).
- Листы  $a_{1,j}$ ,  $j \in l..k$  (листы в первом цикле перестановки  $\omega$  с номерами, начинающиеся с номера  $l$  – смещения перестановки  $\rho$  относительно перестановки  $\omega$ ). Выберем на них кривые  $\beta$ . Эти кривые проходят через фокус.
- Листы  $a_{2,j}$ ,  $j \in l..k$  (листы во втором цикле перестановки  $\omega$  с номерами, начинающиеся с номера  $l$ ). Выберем на них кривые  $\gamma$ .

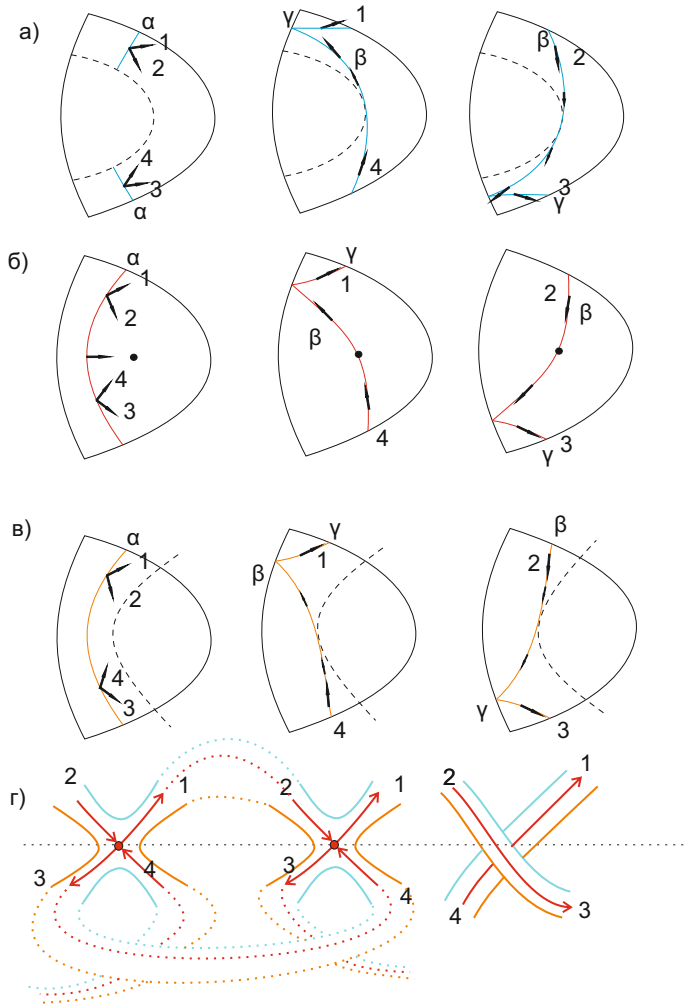


Рис. 7: База атома-бифуркации.

Покажем, что если оснастить кривые  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  указанными на рисунках 7 векторами скорости, то мы получим либо замкнутые кривые на торе Лиувилля, либо остов некоторого двумерного атома.

Оснащенные кривые  $\alpha$  на каждом листе  $a_{i,1}$ ,  $i \in 1..m$  задают так называемый “крест” – локальный прообраз особого значения функции Морса. Обозначим вектора номерами так как указано на рисунке. На особом слое векторами с номерами 1 (3) оснащаются точки кривой  $\alpha$ , расположенные не ниже (не выше) фокальной оси. Эти вектора направлены от второго фокуса, не лежащего в области  $A_1$ . Вектора 2 (4) направлены к фокусу, лежащему в области  $A_1$ . На особом слое все эти четыре вектора необходимо отождествить в точке пересечения кривой  $\alpha$  и фокальной осью. В этом случае они задают точку критической окружности (центр “креста”). Если уровень интеграла  $\Lambda < b$ , то траектории касаются эллипсов, кривая  $\alpha$  распадается на две кривые, концы которой отождествляются, так как вектора 1 и 2, а также 3 и 4 являются касательными к каустике. Эти кривые на кресте (рисунок 7а),г)) изображены голубым цветом. В случае когда траектории касаются гипербол на фокальной оси отождествляются пары 1 и 4, а также 2 и 3. Соответствующие кривые в “крестах” (рисунок 7) изображены оранжевым цветом.

Концы кривых  $\alpha$  лежат на граничном эллипсе, поэтому на соответствующих парах точка-вектор действует

перестановка  $\rho$ . Напомним, что кривые  $\alpha$  выбирались на первых номерах циклов в перестановке  $\omega$ , на которых перестановка  $\rho$  действует либо так  $\rho(a_{i,1}) = a_{i+1,1}$ ,  $i < m$  либо  $\rho(a_{i,m}) = a_{i,1}$ . Это означает, что границы крестов, отвечающие исходящим сепаратрисам 1 и 3 (по номерам соответствующих векторов скорости) на листе  $a_{i,1}$ ,  $i < m$  необходимо отождествить с границами крестов, отвечающих входящим сепаратрисам 2 и 4 на листах  $a_{i+1,1}$ . Это отождествление схематично изображено на рисунке 7г). На этом рисунке пунктирная линия отмечает какие части “крестов” соответствуют точкам бильярдной книжки, расположенных выше фокальной оси, а какие ниже.

Последовательно склеим все кресты, лежащие в прообразах кривых  $\alpha$  на листах  $a_{i,1}$  друг с другом. В результате следующего действия перестановки  $\rho$  мы получаем лист, который снова лежит в первом цикле перестановки  $\omega$ . Если мы продолжим выбирать кривую  $\gamma$ , то в результате мы пересечем критическую окружность уже в двух точках. Для того чтобы этого избежать мы вместо кривой  $\alpha$  рассмотрим пары кривых  $\beta$  и  $\gamma$ . В каждой паре лист меняется по перестановке  $\omega$ . Оснастив эти кривые векторами скорости, изображенными на рисунке 7 мы получим в каждой паре листов  $a_{i,1}$  и  $a_{i,2}$ ,  $l \leq i \leq k$  две ленточки, которые удобно изображать перекрещенными, чтобы отметить сверху или снизу по отношению к фокальной оси расположены точки их концов.

Пусть мы такими действиями дошли до последнего элемента первого цикла перестановки  $\omega$ . Следующее применение вернёт нас начало цикла на лист  $a_{1,1}$  где уже выбрана кривая  $\alpha$ . В этом случае необходимо будет отождествить края 1 и 3 последней пары перекрещенных ленточек (соответствующих кривым  $\beta$  и  $\gamma$  на листах  $a_{1,k}$  и  $a_{2,k}$ ) с концами 2 и 4 “креста” лежащего в прообразе кривой  $\alpha$  на первом листе первого цикла перестановки  $\omega$ .

Посчитаем число пар перекрещенных ленточек. Оно равно числу применений перестановки  $\omega$  к элементу  $a_{1,l}$  так чтобы получился элемент  $a_{1,1}$ . Очевидно, что это число равно  $k - l + 1 \pmod k$ . Так как мы предположили что число  $k$  четно, то четность числа “перекруток” противоположна четности  $l$ .

В результате получится двумерный атом, гомеоморфный либо атому  $X_m$  (если число “перекруток”) четно, либо атому  $X_m$  (если число перекруток нечетно).

В результате было построено трансверсальное сечение искомого 3-атома. Вследствие теоремы А.Т.Фоменко данный 3-атом является прямым произведением найденного 2-атома на окружность. ■

**Замечание 3** *Может возникнуть вопрос, почему найденный по алгоритму атом сохраниться если в доказательстве заменить эллипсы на гиперболы. В этом случае мы будем рассматривать не пару перестановок  $\omega, \rho$ , а пару перестановок  $\omega, \sigma$ . Основной вопрос заключается в том, чтобы понять как связаны четности смещений перестановок  $\rho$  и  $\sigma$  относительно перестановки  $\omega$  с четностью  $m$ . Напомним, что при нечётном  $m$  атомы  $X_m$  и  $Y_m$  изоморфны. Однако воспользовавшись тем, что  $\sigma = \omega \circ (\rho)^{-1}$  несложно показать изоморфизм соответствующих атомов.*

Заключительным шагом в вычислении инварианта Фоменко-Цишанга является вычисление меток на торах Лиувилля. Основную сложность здесь представляет выбор циклов на граничных торах седловых атомов. Однако при построении базы соответствующего 3-атома мы фактически это уже сделали (см. рис. 6). Приведем здесь полный ответ для книжек малой сложности.

**Утверждение 5** *Пусть  $\mathbb{B}(A_1)$  – бильярдная книжка, склеенная из выпуклых областей  $A_1$ , каждая из которых ограничена одной дугой эллипса и одной дугой гиперболы. На гиперболическом корешке стоит перестановка  $\sigma = (1\ 2 \dots n)$ , а на эллиптическом – перестановка  $\rho = \sigma^k$ . Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля такой бильярдной книжки изображён на рисунке 8 (для  $n = 3$ ) и в таблицах 1 (для  $n = 4$ ), 2 (для  $n = 5$ ) и 3 (для  $n = 6$ ,  $k < 4$ ).*

Работа выполнена в МГУ им. М.В.Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-10106.

## Список литературы

- [1] А.А. Глуцок, “О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны” // ДАН, 481:6 (2018), 594–598.

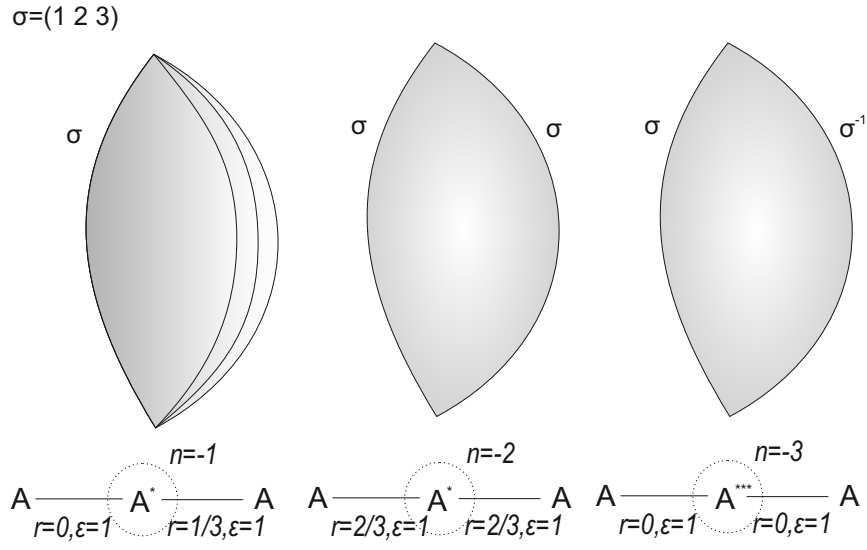


Рис. 8: Инварианты Фоменко-Цишанга для трехлистных биллиардных книжек  $\mathbb{B}(A_1)$

$k$	метка на эллиптических ребрах	атом на седловом уровне	метка на гиперболическом ребре	метка $n$
1	0	$C_1$	0	0
2	1/2	$B$	1/2	-1
3	0	$A^{****}$	0	-4
4	0	$B$	1/2	-1

Таблица 1: Инварианты Фоменко-Цишанга для четырехлистных биллиардных книжек  $\mathbb{B}(A_1)$

$k$	метка на эллиптических ребрах	атом на седловом уровне	метка на гиперболическом ребре	метка $n$
1	1/5	$A^*$	1/5	-1
2	3/5	$A^*$	1/5	-1
3	1/5	$A^*$	3/5	-1
4	0	$A^{*****}$	0	-5
5	0	$A^*$	3/5	-1

Таблица 2: Инварианты Фоменко-Цишанга для пятилистных биллиардных книжек  $\mathbb{B}(A_1)$

- [2] V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas" // Sb. Math., 205:8 (2014), 1201–1221
- [3] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», 1999
- [4] В.В. Козлов, Д.В. Трещёв, "Генетическое введение в динамику систем с ударами", М.: Изд-во МГУ, 1991.

$k$	метка на эллиптических ребрах	атом на седловом уровне	метка на гиперболическом ребре	метка $n$
1	1/3	$A^{**}$	1/3	-2
2	0	$E_1$	0	3
3	0	$A^{**}$	1/3	-1

Таблица 3: Инварианты Фоменко-Цишанга для некоторых шестилистных бильярдных книжек  $\mathbb{B}(A_1)$

- [5] В.В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдov в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176
- [6] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.
- [7] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдov” // Матем. сб., 210:3 (2019), 17–74
- [8] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдovми” // ДАН, 479:6 (2018), 607–610.
- [9] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем” // Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56.
- [10] V.V. Vedyushkina, V.A. Kibkalo, “Billiard books of low complexity and realization of liouville foliations of integrable systems”, *Chebyshevskii sbornik* 23(1), 53–82 (2022)