

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ПАРАБОЛАМИ ИНТЕГРИРУЕМОГО БИЛЛИАРДА С ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. В. Ведюшкина¹ А. В. Зайцева²

В работе изучается бильярд в гравитационном поле на плоском столе, ограниченном дугами софокусных парабол. В зависимости от формы стола, построены бифуркационные диаграммы и описаны перестройки торов Лиувилля, отвечающие их дугам. Для неособых зон энергии вычислены инварианты Фоменко–Цишанга.

Ключевые слова: интегрируемый бильярд, софокусные параболы, бильярд в потенциальном поле, инвариант Фоменко–Цишанга, бифуркационная диаграмма.

We study billiards in a gravitational field on a flat table bounded by arcs of confocal parabolas. Depending on the shape of the table, bifurcation diagrams are constructed and bifurcations of Liouville tori corresponding to their arcs are described. For non-singular energy zones, the Fomenko-Zieschang invariants are calculated.

Key words: integrable billiard, confocal parabolas, billiard in a potential field, Fomenko-Zieschang invariant, bifurcation diagram.

1. Введение. Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам был развит в работах А.Т.Фоменко, его соавторов и учеников, см. [1]. Изучается слоение Лиувилля, т.е. разбиение фазового пространства системы на совместные уровни набора функционально независимых первых интегралов. Инвариантом послойной гомеоморфности такого слоения в неособой зоне энергии (на уровне энергии $Q_h^3 : H = h$, где $dH \neq 0$) является граф-молекула, ребра которого отвечают одноараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — особенностям слоения, называемым 3-атомам. Трехмерная поверхность Q_h^3 склеивается из атомов по диффеоморфизмам их граничных регулярных торов. Числовые метки r, ε, n , которыми дополнительно оснащается молекула, кодируют выбранный набор склеек этих торов. Получаемая молекула с метками также называется инвариантом Фоменко–Цишанга. Вычисление этих инвариантов для широкого класса известных интегрируемых систем механики позволило обнаружить эквивалентность замыканий систем разной природы [1].

В последние годы топологический подход удалось успешно расширить на класс интегрируемых бильярдных систем. Интегрируемость классического бильярда в эллипсе показана Дж.Биркгофом, см. [2]. Инварианты плоских софокусных бильярдных систем были вычислены В.Драговичем, М.Раднович [3], а также независимо В.В.Ведюшкиной [4]. Введенные в работах [5-6] классы топологических бильярдных систем и бильярдных книжек позволили существенно расширить класс интегрируемых бильярдных систем с точки зрения послойной гомеоморфности слоений Лиувилля.

Сформулированная в работе [7] гипотеза Фоменко о бильярдах предполагает, что широкий класс слоений Лиувилля реализуется (до кусочно-гладкой послойной эквивалентности) интегрируемыми бильярдами. Ряд положений этой гипотезы доказан. Например, алгоритмически задаваемыми бильярдными книжками реализованы произвольные боттовские 3-атома [6], получены продвижения по реализации неботтовских особенностей бильярдными книжками [8].

¹Ведюшкина Виктория Викторовна — докт. физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фонд. и прикл. матем., e-mail: arinir@yandex.ru.

Vedyushkina Viktoria Viktorovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

²Зайцева Анастасия Владимировна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, email: AnastasiaZay12@mail.ru.

Zaytseva Anastasiya Vladimirovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Другое расширение класса интегрируемых билиардов порождается добавлением подходящего потенциала. Примеры таких билиардов были рассмотрены в [9]. Топология слоений плоских билиардов с полиномиальными потенциалами изучалась С.Е.Пустовойтовым [10, 11]. В работах [12, 13] билиардные книжки с потенциалом Гука применялись для моделирования особенностей ранга 0, т.е. содержащих невырожденные положения равновесия. В работе [14] был рассмотрен билиард на софокусном столе с потенциалом Гука и метрикой Минковского.

В настоящей работе изучаются билиарды с гравитационным потенциалом. Рассмотрим выпуклую неограниченную область с плоской метрикой, ограниченную параболой. Зададим билиардное движение в ней, происходящее в поле силы тяжести, направленной вдоль оси параболы в направлении вершины. В работе [9] показана интегрируемость такого билиарда, и приведена явная формула первого интеграла. Мы покажем, что данная функция сохраняется при отражении от других парабол, софокусных с данной (т.е. имеющих те же фокус и ось), и проведем топологический анализ систем билиарда в гравитационном поле на нескольких столах, ограниченных дугами софокусных парабол. Билиардов без потенциала на таких столах были изучены в [15].

2. Билиард в гравитационном поле и его интегралы. Зададим на плоскости Oxy семейство софокусных парабол следующим уравнением:

$$x^2 = 4py + 4p^2.$$

Здесь p - параметр параболы. Фокус данного семейства находится в начале координат. При $p > 0$ параболы направлены ветвями вверх, а при $p < 0$ ветвями вниз. Включим в это семейство вырожденную параболу, соответствующую параметру $p = 0$ — ось Oy . Отметим, что софокусные параболы всегда пересекаются под прямыми углами.

Пусть Ω — есть часть плоскости, ограниченная софокусными параболой из семейства выше. Рассмотрим динамическую систему билиарда в данной области Ω , описывающую движение материальной точки с абсолютно упругим отражением на границе. Широко известный факт, что вдоль траекторий этой системы сохраняется не только квадрат вектора скорости материальной точки, но также параметр софокусной параболы, которой касаются звенья (или их продолжения) фиксированной траектории. При этом значению $p = 0$ отвечают траектории, звенья которых либо проходят через фокус, либо параллельны оси Oy .

Добавим к системе силу тяжести с ускорением свободного падения g , направленную вдоль оси Oy вниз. Примем массу билиардной частицы за единицу. Тогда внутри области Ω движение происходит согласно уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = -g. \end{cases}$$

Оказывается, что данная система останется интегрируемой, так как вдоль траекторий (и при отражениях) сохраняются следующие функции

$$\begin{aligned} H &= \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + gy; \\ F &= \dot{x}(\dot{x}y - x\dot{y}) - \frac{gx^2}{2}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Функции $H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + gy$ и $F = \dot{x}(\dot{x}y - x\dot{y}) - \frac{gx^2}{2}$ сохраняются вдоль траекторий билиарда с потенциалом в области, ограниченной дугами софокусных парабол.*

Доказательство. Функция H является аналогом полной энергии системы, где первое слагаемое играет роль кинетической энергии, а второе — потенциальной. Тем не менее, явно покажем, что данная функция сохраняется при движении материальной точки внутри области:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} \right) + g \frac{dy}{dt} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2} + g\dot{y} = \dot{y}\ddot{y} + g\dot{y} = \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0$$

При абсолютно-упругих отражениях сохраняется квадрат длины вектора скорости, т.е. и выражение $\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}$. Слагаемое gy от скорости не зависит, следовательно, и вся функция H сохраняется при отражении.

Аналогично, сохранение функции F при движении внутри области проверяется прямым подсчетом:

$$\frac{dF}{dt} = \ddot{x}(\dot{x}y - x\dot{y}) + \dot{x}(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \ddot{x}y - \dot{x}\dot{y}) + g\dot{x}x = x\ddot{x}\dot{y} + x\dot{x}g = x\dot{x}(\ddot{y} + g) = 0.$$

Далее, заметим, что при отражениях сохраняется добавка $-\frac{gx^2}{2}$. Выражение $\frac{\dot{x}(\dot{y}x - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ есть параметр p софокусной параболы, которой касается прямая, проходящая через точку с координатами (x, y) в направлении вектора (\dot{x}, \dot{y}) . Биллиард в области, ограниченной софокусными параболой (без потенциала) интегрируем, что равносильно сохранению данного выражения при отражениях. Но так как отражения предполагаются абсолютно упругими, то сохраняется и выражение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Это позволяет утверждать, что в биллиарде с потенциалом выражение $\frac{\dot{x}(\dot{y}x - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ также сохраняется, а значит при отражениях сохраняется и функция F .

Для дальнейшего анализа нам необходимо переписать функции H и F в параболических координатах.

Утверждение 1. *В параболических координатах (λ_1, λ_2) первые интегралы динамической системы биллиарда с гравитационным потенциалом в области, ограниченной дугами софокусных парабол имеют вид*

$$H = \frac{\lambda_1 \mu_1^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \mu_2^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - g(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$F = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \mu_1^2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \mu_2^2 + 2g\lambda_1 \lambda_2.$$

Здесь $\mu_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}$ суть сопряженные импульсы.

Доказательство. Введем параболические координаты:

$$\begin{cases} x^2 = -4\lambda_1 \lambda_2; \\ y = -\lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$$

Имеем

$$2x\dot{x} = -4(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2) \Rightarrow x\dot{x} = -2(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2) \Rightarrow x^2 \dot{x}^2 = 4(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2)^2 \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2)^2}{-\lambda_1 \lambda_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H &= \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + gy = \frac{1}{2} \left(\frac{(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2)^2}{-\lambda_1 \lambda_2} + (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2)^2 \right) - g(\lambda_1 + \lambda_2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\dot{\lambda}_1^2 \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 - \lambda_1^2 \dot{\lambda}_2^2}{\lambda_1 \lambda_2} + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + 2\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 \right) - g(\lambda_1 + \lambda_2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{\lambda}_1^2 \lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\dot{\lambda}_2^2 \lambda_1}{\lambda_2} + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 \right) - g(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\dot{\lambda}_1^2}{2\lambda_1} (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{\dot{\lambda}_2^2}{2\lambda_2} (\lambda_2 - \lambda_1) - g(\lambda_1 + \lambda_2). \end{aligned}$$

Выпишем приведённые импульсы:

$$\mu_1 = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_1} = \frac{\dot{\lambda}_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_2} = \frac{\dot{\lambda}_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2}.$$

Откуда находим

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \dot{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2 \mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

$$H = \frac{\lambda_1^2 \mu_1^2}{2\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)^2} (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{\lambda_2^2 \mu_2^2}{2\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2} (\lambda_2 - \lambda_1) - g(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \mu_1^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \mu_2^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - g(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Аналогично для F :

$$\begin{aligned} F &= \dot{x}(y\dot{x} - \dot{y}x) - \frac{gx^2}{2} = \dot{x}^2 y - (x\dot{x})\dot{y} - \frac{gx^2}{2} = \frac{(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2)^2}{-\lambda_1 \lambda_2} (-\lambda_1 - \lambda_2) + 2(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2)(-\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) - \frac{g(-4\lambda_1 \lambda_2)}{2} = \\ &= \frac{(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2)^2}{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 + \lambda_2) - 2(\dot{\lambda}_1 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2)(\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) + 2g\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_2 \dot{\lambda}_1^2 + \frac{\dot{\lambda}_1^2}{\lambda_1} \lambda_2^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 + \frac{\dot{\lambda}_2^2}{\lambda_2} \lambda_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 \lambda_1 - \\ &\quad - 2\lambda_2 \dot{\lambda}_1^2 - 2\lambda_1 \dot{\lambda}_2^2 - 2(\lambda_1 + \lambda_2) \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 + 2g\lambda_1 \lambda_2 = \dot{\lambda}_1^2 \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} - \lambda_2 \right) + \dot{\lambda}_2^2 \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} - \lambda_1 \right) + 2g\lambda_1 \lambda_2 = \\ &= \frac{\lambda_1^2 \mu_1^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2^2 \mu_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2} + 2g\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \mu_1^2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} + \frac{\lambda_2 \mu_2^2 \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} + 2g\lambda_1 \lambda_2 = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \mu_1^2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \mu_2^2 + 2g\lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Выпишем уравнения движения в параболических координатах. Для начала зафиксируем уровень интегралов $H = h$, $F = f$ и выразим из полученной системы μ_i .

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1 \mu_1^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 \mu_2^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - g(\lambda_1 + \lambda_2) = h \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \mu_1^2 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \mu_2^2 + 2g\lambda_1 \lambda_2 = f \end{cases}$$

Данная система линейна относительно μ_i^2 . Получаем

$$\mu_i^2 = \frac{2h\lambda_i + 2g\lambda_i^2 + f}{\lambda_i}.$$

Используем полученные выражения для $\dot{\lambda}_i$ и подставим в них найденные μ_i :

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\pm \lambda_i}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\frac{2h\lambda_i + 2g\lambda_i^2 + f}{\lambda_i}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\lambda_i \left(g\lambda_i^2 + h\lambda_i + \frac{f}{2} \right)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{V(z)}$$

где $V(z) = gz^2 + hz + \frac{f}{2}$.

Таким образом, движение возможно в том случае, когда подкоренное выражение $V(z)z$ неотрицательно. Получаем следующую систему (напомним, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$):

$$\begin{cases} g\lambda_1^2 + h\lambda_1 + f/2 \geq 0 \\ g\lambda_2^2 + h\lambda_2 + f/2 \leq 0 \end{cases}$$

Отметим, что данная система уравнений имеет решения, в том случае если дискриминант квадратного трехчлена $V(z)$ неотрицателен. Если ξ и η – корни данного трехчлена ($\xi < \eta$) то множество решений имеет вид $\lambda_1 \in [\eta, +\infty]$, $\lambda_2 \in [\xi, \eta]$.

Рассмотрим три различных случая области Ω (во всех случаях область некомпактна). Область $\Omega = \Omega_1$ ограничена одной параболой с параметром $\Lambda_1 > 0$. Область Ω_2 ограничена двумя параллельными параболой с параметрами Λ_1 и Λ_2 , таких, что $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$. Область Ω_3 ограничена двумя пересекающимися параболой с параметрами $\Lambda_1 > 0$ и $\Lambda_3 < 0$.

Рассмотрим случай области Ω_1 . Большой корень η квадратного трехчлена $V(z)$ может быть или положительным или отрицательным (особый случай равенства нулю разберем отдельно).

Если $\eta > 0$ то решения системы имеют вид $\lambda_1 \in [\eta, \Lambda_1]$, $\lambda_2 \in [\xi, 0]$. Положение квадратного трехчлена однозначно фиксируется соотношениями $V(\Lambda_1) > 0$, $V(0) < 0$. Из этих соотношений получаем

$$\begin{cases} V(\Lambda_1) > 0 \\ V(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g\Lambda_1^2 + h\Lambda_1 + f/2 > 0 \\ f/2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2(g\Lambda_1^2 + h\Lambda_1) < f < 0.$$

Если $\eta < 0$ то решения системы имеют вид $\lambda_1 \in [0, \Lambda_1]$, $\lambda_2 \in [\xi, \eta]$. Положение квадратного трехчлена однозначно фиксируется соотношениями $h^2 - 2fg > 0$, $V(0) > 0$, $\frac{-h}{2g} < 0$ (первое условие это положительность дискриминанта трехчлена $V(z)$, а последнее фиксирует отрицательность абсциссы вершины соответствующей параболы). Из этих соотношений получаем

$$\begin{cases} h^2 - 2fg > 0 \\ V(0) > 0 \\ \frac{-h}{2g} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f < \frac{h^2}{2g}, \quad h > 0.$$

Таблица 1: Регулярные области возможного движения гравитационного бильярда в области, ограниченной одной параболой.

Положение квадратного трехчлена $V(z) = gz^2 + hz + f/2$	Вид области возможного движения	Условия на параметры
[width=3.5cm, height=3.5cm]PolOmega1	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion2Omega1	$\begin{cases} h^2 - 2fg > 0 \\ V(0) > 0 \\ \frac{-h}{2g} < 0 \end{cases}$
[width=3.5cm, height=3.5cm]Pol2Omega1	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion1Omega1	$\begin{cases} V(\Lambda_1) > 0 \\ V(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

Таблица 2: Регулярные области возможного движения гравитационного бильярда в области, ограниченной двумя пересекающимися параболой с параметрами $\Lambda_2 < 0 < \Lambda_1$.

Положение квадратного трехчлена $V(z) = gz^2 + hz + f/2$	Вид области возможного движения	Условия на параметры
[width=3.5cm, height=3.5cm]Pol1Omega2	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion1Omega2	$\begin{cases} h^2 - 2fg > 0 \\ V(\Lambda_2) > 0 \\ \frac{-h}{2g} < \Lambda_2 \end{cases}$
[width=3.5cm, height=3.5cm]Pol2Omega2	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion2Omega2	$\begin{cases} V(\Lambda_2) < 0 \\ V(0) > 0 \end{cases}$
[width=3.5cm, height=3.5cm]Pol3Omega2	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion3Omega2	$\begin{cases} V(\Lambda_1) > 0 \\ V(0) < 0 \\ V(\Lambda_2) < 0 \end{cases}$

Проведём аналогичный анализ для бильярдов в областях Ω_2 и Ω_3 . Полученные результаты оформим в виде таблиц 1-3.

Эти четыре вектора скорости имеют квадрат длины $2(h - gy)$, причем прямые, проходящие через данную точку в направлении каждого из четырёх векторов касаются софокусной параболы с параметром $2(\frac{gx^2}{2} - f)(h - gy)$.

Почему таких векторов ровно четыре? Во-первых, покажем, что их длина ненулевая. Рассмотрим два случая. Пусть $f > 0$. Тогда больший корень η квадратного трёхчлена $V(z)$ отрицателен, внутри области возможного движения имеем $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \in (\xi, \eta)$. Получаем

$$y = -\lambda_1 - \lambda_2 < -\xi < \frac{h + \sqrt{h^2 - 2gf}}{2g} < \frac{h}{g}.$$

Таблица 3: Регулярные области возможного движения гравитационного бильярда в области, ограниченной двумя не пересекающимися софокусными параболой с параметрами $\Lambda_1 > \Lambda_3 > 0$.

Положение квадратного трехчлена $V(z) = gz^2 + hz + f/2$	Вид области возможного движения	Условия на f
[width=3.5cm, height=3.5cm]Pol1Omega3	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion1Omega3	$\begin{cases} h^2 - 2fg > 0 \\ V(0) > 0 \\ \frac{-h}{2g} < 0 \end{cases}$
[width=3.5cm, height=3.5cm]Pol2Omega3	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion2Omega3	$\begin{cases} V(\Lambda_3) > 0 \\ V(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
[width=3.5cm, height=3.5cm]Pol3Omega3	[width=3.5cm, height=3.5cm]Motion3Omega3	$\begin{cases} V(\Lambda_3) < 0 \\ V(\Lambda_1) > 0 \\ V(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

Пусть теперь $f \leq 0$. Тогда больший корень η квадратного трёхчлена $V(z)$ неотрицателен, внутри области возможного движения имеем $\lambda_1 > \eta$, $\lambda_2 > \xi$. Получаем

$$y = -\lambda_1 - \lambda_2 < -(\xi + \eta) = \frac{h}{g}.$$

Значит $(h - gy) > 0$.

Далее, если точка (x, y) такова что $x \neq 0$ (т.е. не лежит на оси ординат), то тогда в ней существует ровно четыре ненулевых вектора фиксированной длины $\sqrt{2(h - gy)}$, таких что прямая, проходящая через данную точку в направлении любого из этих векторов касается софокусной параболы с произвольным фиксированным параметром. Если этот параметр оказался нулевым, то такие вектора направлены либо строго вертикально, либо в фокус (из фокуса). Если же $x = 0$, то при ненулевом f выражение $(\frac{gx^2}{2} - f) = -f$ также не обращается в ноль, следовательно таких векторов скорости снова ровно четыре.

Теорема 2. Бифуркационные диаграммы гравитационных бильярдов Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 изображены на рис. 1 а, б и в соответственно. Образ отображения момента ограничен параболой $f = \frac{h^2}{2g}$ и прямой $f = -2g\Lambda_1^2 - 2h\Lambda_1$. В случае бильярда Ω_2 он также ограничен прямой $f = -2g\Lambda_2^2 - 2h\Lambda_2$.

- Во всех трех случаях луч горизонтальной прямой $f = 0$ входит в бифуркационную диаграмму. При положительных значениях h в его прообразе лежит особый слой некоторого трехмерного атома, а именно, атома A^* для бильярда Ω_1 и атома B для бильярдов Ω_2 и Ω_3 . При $-g\Lambda_1 < h < 0$ в его прообразе лежит одна особая окружность. Критические окружности на этом уровне соответствуют вертикальным подскокам вдоль фокальной прямой.
- Точки прямой $f = -2g\Lambda_2^2 - 2h\Lambda_2$ при $h > -2g\Lambda_2$ и прямой $f = -2g\Lambda_3^2 - 2h\Lambda_3$ при $h > -g\Lambda_3$ не являются критическими, в их прообразе отображения момента лежит двумерный тор.
- Каждой точке параболы $f = \frac{h^2}{2g}$ при $h > 0$ в случае бильярдов Ω_1 и Ω_3 , и при $h > -2g\Lambda_2$ для бильярда Ω_2 соответствуют критические окружности, отвечающие движениям вдоль дуг некоторой фиксированной софокусной параболы.
- Каждой точке прямой $f = -2g\Lambda_1^2 - 2h\Lambda_1$ при $h > -g\Lambda_1$ в случае бильярдов Ω_1 и Ω_3 и при $h > -g(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ для бильярда Ω_2 соответствует одна или две критические окружности – движения по граничной параболы с параметром Λ_1 .
- Для бильярда Ω_2 каждой точке прямой $f = -2g\Lambda_2^2 - 2h\Lambda_2$ при $-g(\Lambda_1 + \Lambda_2) < h < -g\Lambda_2$ соответствуют две критические окружности. При $-g\Lambda_2 < h < -2g\Lambda_2$ – одна критическая окружность. Они отвечают движениям вдоль дуг граничной параболы с параметром Λ_2 .

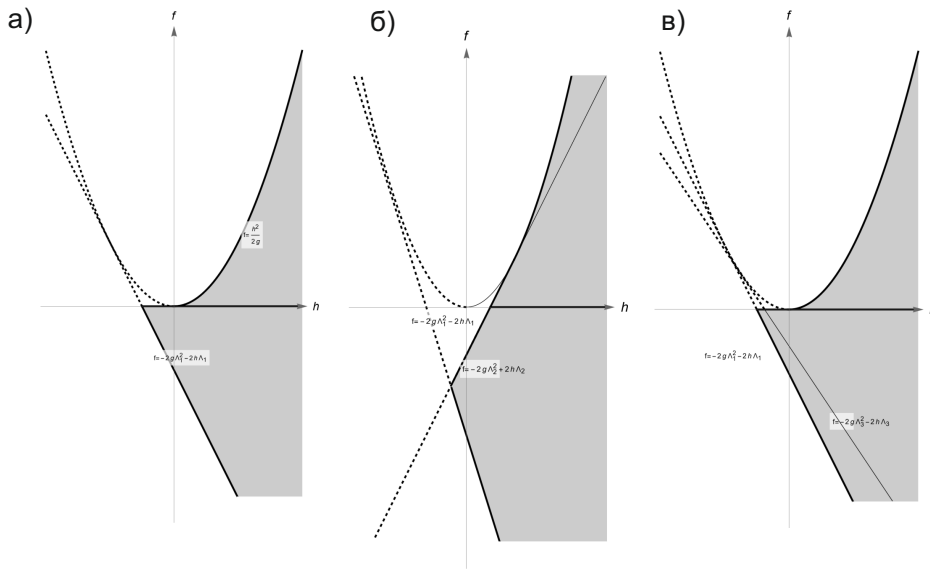


Рис. 1: Бифуркационные диаграммы гравитационных билиардов в областях Ω_1 (а), Ω_2 (б), Ω_1 (в).

Доказательство.

Кривые, объединение дуг которых содержит бифуркационную диаграмму извлекается из ограничений на каждый тип области возможного движения.

Во всех рассмотренных неособых случаях расположения корней получаем, что на соответствующих уровнях ($F = f, H = h$) интегралов системы движение происходит в области, состоящей из одного или двух криволинейных четырёхугольников, ограниченных дугами софокусных парабол. При проекции слоя в четырёхугольник оказывается, что прообраз каждой внутренней точки (x, y) четырёхугольника являются состоит из четырёх точек слоя (различающиеся направлением векторов скорости в ней). В самом деле, воспользуемся уравнениями движения в параболических координатах. При движении каждая координата λ_i монотонно возрастает или убывает до тех пор, пока не случится одно из трех. Либо материальная точка достигнет границы области, либо координата обратится в ноль (что соответствует пересечению оси парабол), либо если соответствующий полином $V(\lambda_i)$ обратится в ноль (что соответствует достижению границы области возможного движения, лежащих на параболах с параметрами ξ и η).

Каждому положению материальной точки, описываемому координатами (λ_1, λ_2) вектора скорости $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$ которые явно вычисляются из уравнений движения. Если материальная точка лежит во внутренности области возможного движения, то таких векторов ровно четыре. На границе области возможного движения вектора скорости попарно отождествляются либо в силу закона отражения, либо в силу того что парабола, которой они касаются, совпадает с границей области возможного движения. На оси парабол в случае общего положения отождествления не происходит, меняется лишь знак в уравнении движения для той координаты, которая обратилась в ноль. Эти отождествления позволяют показать, что каждой четырёхугольной области возможного движения (при фиксированных неособых значениях f и h) соответствует двумерный тор в M^4 .

Опишем теперь особые случаи расположения корней.

Сразу отметим, что случай при котором область возможного движения остаётся криволинейным четырёхугольником, одна из границ которого содержит границу билиарда не является бифуркационным. Такое изменение области возможного движения отвечает смене правила склейки векторов скорости на границе этого четырёхугольник. Но сам тип склеиваемых векторов не меняется.

Пусть больший корень η квадратного трехчлена $V(z)$ принял значение Λ_1 . В этом случае дви-

жения возможны только вдоль дуг граничной параболы с параметром Λ_1 . Соответствующие точки бифуркационной диаграммы лежат на прямой $f = -2g\Lambda_1^2 - 2h\Lambda_1$. Аналогично рассматривается случай, когда меньший корень ξ принимает значение Λ_2 .

Пусть $V(z) \geq 0, \forall z$. Тогда система имеет решения только в том случае, когда вершина параболы $V(z)$ лежит на отрицательной полуоси Ox . В этом случае имеем следующие ограничения: $-h/2g < 0$ (положение вершины), а также $h^2 - 2gf = 0$ (равенство нулю дискриминанта). Откуда имеем $f = \frac{h^2}{2g}, h < 0$. Решения системы имеют вид $\lambda_2 = -h/2g, \lambda_1 \in [m, \Lambda_1]$. Здесь $m = 0$ в случае областей Ω_1 и Ω_2 и $m = \Lambda_3$ для области Ω_3 . Движения происходят только по дуге параболы с параметром $-h/2g$. Такие движения соответствуют одной или двум окружностям в M^4 , а соответствующая трехмерная окрестность послойно гомеоморфна одному или двум 3-атомам A в Q_h^3 .

Утверждение 2. *Окрестность особого слоя $f = 0$ в изоэнергетическом многообразии Q_h^3 гомеоморфна 3-атому A^* при $h > 0$ в области Ω_1 ; 3-атому B в области Ω_2 при $h > -g\Lambda_2$ и при $h > 0$ в области Ω_3 . При $h < 0$ соответствующая окрестность гомеоморфна 3-атому A .*

Доказательство. Равенство нулю значения f равносильно равенству нулю одного из корней квадратного трехчлена $V(z)$.

При $h < 0$ один из возможных корней трехчлена $V(z)$ положителен (т.к. абсцисса вершины соответствующей параболы имеет координаты $\frac{-h}{2g}$). Значит, в этом случае корень ξ принимает нулевое значение. Все возможные движения в этом случае – это вертикальные подскоки вдоль оси ординат между граничной параболой с параметром Λ_1 и параболой с параметром η (или Λ_3 в случае области Ω_3 и близкого к нулю значения h). Таким образом слой состоит из одной окружности, а соответствующая трехмерная окрестность в Q^3 гомеоморфна 3-атому A .

Пусть теперь h достаточно большое (больше 0 для областей Ω_1 и Ω_3 и больше $-g\Lambda_2$ для области Ω_2). Тогда аналогично рассуждению выше заключаем, что теперь равен нулю корень η . Разберем случай каждой области отдельно.

Рассмотрим отдельно область Ω_1 . Движение возможно при $\lambda_1 \in [0, \Lambda_1], \lambda_2 \in [\xi, 0]$. Восстановим слой $H = h, F = f = 0$, используя точки области возможного движения.

Заметим, что если точка в области движения не лежит на оси ординат, то в этой точке восстанавливаются (см. вывод выше) ровно четыре вектора скорости, которые будучи приписаны этой точке поднимают её до точки слоя. Если же точка лежит на оси ординат, то значение выражения $\dot{x}(\dot{x}y - \dot{y}x) = 0$. Это означает, что вектора скорости, приписываемые точкам на оси ординат должны задавать прямые, которые либо проходят через фокус, либо задают саму ось ординат. На границе отождествление векторов скорости остаётся стандартным, вектора по-прежнему попарно отождествляются.

Рассмотрим точку в области возможного движения и опишем вектора, которые будучи приписанными к ней восстанавливают её до точки на особом слое. Если точка (x, y) близка к началу координат, то вектор v_1, v_2 либо направлен почти вертикально, либо близок к направляющему вектору прямой, проходящей через точку x, y и начало координат. Вектора первого типа назовём “вертикальными”, а второго “фокальными”. Распространим это свойство на все вектора, приписываемые точкам области возможного движения, по непрерывности. Нетрудно понять, что на границе области возможного движения “фокальные” вектора отождествляются с “вертикальными” и наоборот.

Рассмотрим непрерывное заполнение области возможного движения набором следующих кривых, точки которых имеют определенное оснащение векторами скорости. Объединение всех кривых полностью опишет особый слой.

- Отрезок оси парабол, точки которого оснащены вертикальными векторами скорости – критическая окружность на особом слое.
- “Восьмерки”, центр которых расположен в начале координат, а четыре точки излома – на границе области возможного движения. Оснастим центральные отрезки данной кривой фокальными векторами, а остальные – “вертикальными”, при этом в фокусе вектора имеют направление $(\pm \cos(\varphi), \pm \sin(\varphi))$, для некоторого угла $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Таким образом каждая оснащенная “восьмерка” однозначно задаётся своим углом φ .

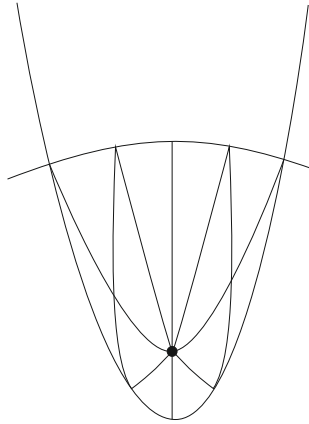


Рис. 2: Кривые, заполняющие критическую область возможного движения для гравитационного бильярда Ω_1 при значениях $h > 0$.

- “Вырожденная восьмерка”, являющаяся пределом “восьмерок” при $\varphi = 0$. Кривая, проходящая через фокус, оснащенная лишь фокальными векторами, начало и конец которой расположены в углах области возможного движения.

Каждая из описанных кривых, будучи оснащена указанными векторами скорости, в особом слое гомеоморфна окружности. Разрезанный по особой окружности слой будет гомеоморфен прямому произведению окружности, лежащей в прообразе восьмерки (вырожденной или невырожденной) на интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, т.е. цилиндру. Причем близкие границы окружности-восьмерки накрывают особую окружность двулистно. Следовательно, после склейки цилиндра в тор необходимо склеенной окружностью двулистно накрыть критическую, т.е. получить особый слой 3-атома A^* .

Для гравитационных бильярдов Ω_2 и Ω_3 область возможного движения на описываемом уровне не содержит фокус. Рассмотрим заполнение области возможного движения дугами софокусных парабол, ветви которых направлены вверх. Приписывая точкам дуги подходящие вектора скорости получаем, что в слое прообраз каждой дуги гомеоморфен одному или двум особым слоям двумерного атома B , т.е. восьмерке. Один слой получаем на границе области возможного движения, на других – два, которые можно различить направлением векторов скорости – вверх или вниз. Легко показать, что особый слой целиком гомеоморфен прямому произведению такой восьмерки на окружность.

Доказательство утверждения 2 завершает доказательство теоремы.

Для завершения Лиувиллева анализа систем гравитационных бильярдов осталось вычислить метки в графах Фоменко, которые описывают слоение Лиувилля неособых поверхностей Q_h^3 . Вычисление меток полностью аналогично вычислению меток для бильярдов без потенциала, однако с той же последовательностью областей возможного движения и критическими слоями – бифуркациями.

Работа выполнена в МГУ им. М.В.Ломоносова при поддержке гранта РФФ № 22-71-10106.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. Ижевск: // Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
2. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы // Изд. дом Удмуртский университет, 1999
3. Dragović V., Radnović M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn. 2009. 14, №4-5. 479–494.

4. *Fokicheva V.V.* Description of singularities for system “billiard in an ellipse” // Moscow Univ. Math. Bull. 2012. **67**, №5-6. 217–220.
5. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация бильярдных систем в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**, №10. 127–176.
6. *Ведюшкина В.В., Харчева И.С.* Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, №12. 17–56.
6. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестник Моск. Универ. Матем. Механ. 2019. №3. 15–25.
7. *Кузнецова А.А.* Моделирование вырожденных особенностей интегрируемых бильярдных систем бильярдными книжками // Вестник Моск. Универ. Матем. Механ. 2023. №5. 3–10.
8. *Козлов В.В., Трещёв Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами, М.: Изд-во МГУ, 1991.
9. *Пустовойтов С.Е.* Топологический анализ бильярда в эллиптическом кольце в потенциальном поле // Фундамент. и прикл. матем. 2019. **22**, №6. 201–225.
10. *Пустовойтов С.Е.* Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка // Вестник Моск. Универ. Матем. Механ. 2021. №5. 8–19.
12. *Fomenko A.T., Kibkalo V.A.* Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms // Contemp. Appr. Methods in Fundam. Math. and Mech., Understanding Complex Systems, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer, Cham, 2020, 3–26
13. *Ведюшкина В.В., Кибкало В.А., Пустовойтов С.Е.* Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем бильярдными книжками с потенциалом Гука // Чебышевский сб. 2021. **22**, №5. 44–57.
14. *Ведюшкина В.В., Скворцов А.И.* Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуксовским потенциалом // Вестник Моск. Универ. Матем. Механ. 2022. №1. 8–19.
15. *Fokicheva V.V.* Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas // Sb. Math. 2014. **205**, №8. 1201–1221.

Поступила в редакцию
16.04.2024