Биллиардная реализация неботтовских особенностей интегрируемых гамильтоновых систем

Ведюшкина В.В.

МГУ имени М.В.Ломоносова

Пусть дана интегрируемая гамильтонова система на компактном невырожденном изоэнергетическом многоразии Q^3, где через h обозначен гамлтониана системы, а через F – дополнительный интеграл. Тогда согласно теореме Лиувилля компактные слои функции F в Q^3 гомеоморфны несвязному объединению двумерных торов. Как при этом устроены особые слои? В силу того, что поверхность Q^3 является неособой можно заключить что особые точки, где дифференциалы функций H и F зависимы не могут быть изолированы. В этом случае на подмножестве поверхности уровня интеграла F, состоящей из особых точек, существует гладкое векторное поле без особенностей (а именно поле $sgrad\ H$). Если предположить что данное множество является многообразием, то тогда она может быть диффеоморфно либо окружности, либо тору, либо бутылке Клейна. Последние два случая как правило, отвечают особым связям между F и H и с помощью накрытия и подходящей замены F могут быть сведены к случаю окружности (или регулярного тора).

Как устроена окрестность особого уровня в случае если данный слой содержит лишь критические окружности? В классической теории Фоменко-Цишанга от функции F при этом требуют выполнения условия т.н. боттовости. Данное условие означает, что локально в ограничении на двумерную трансверсаль к критической окружности функция F является функцией Морса. Тогда, согласно теореме А.Т.Фоменко весь особый слой имеет структуру многообразия Зейферта. Слои этого расслоения согласованы со слоением Лиувилля – каждый слой расслоения Зейферта лежит на некотором слое слоения Лиувилля (регулярном торе или на особом слое). Базой данного расслоения Зейферта является так называемый 2-атом (брат может со звёздочками). Он определяется следующим образом. Рассмотрим функцию Морса на двумерном компактном ориентируемом многообразии. Если значение данной функции неособое, то в его прообразе лежит несвязный набор окружностей. Если же значение особое, то в прообразе лежит некоторый конечный граф, все степени вершин которого либо равны 0 либо 4. Случай нуля отвечает случаям локальных максимумов или минимумов. Рассмотрим связную компоненту данного графа и её расслоенную на окружности окрестность в двумерном многообразии. Эта расслоенная окрестность и называется 2-атомом. Отметим теперь на рёбрах четырехвалентного графа в нём произвольным образом конечное число точек, называемых звёздочками. Тогда, согласно теореме А.Т.Фоменко, окрестность особого слоя боттовского интеграла в трехмерной невырожденной изоэнергетической поверхности интегрируемой гамильтоновой системы имеет структуру расслоения Зейферта, базой которого является некоторый 2-атом, а точки-звездочки отвечают особым слоям данного слоения. Причем в случае если интеграл F является функцией Ботта, то все имеющиеся особые слои расслоения Зейферта имеют тип (2,1). Напомним, что последнее означает, что окрестность такого слоя в изоэнергетической поверхности послойно гомеоморфна скрученному на π полноторию (см. подробнее ниже).

Все такие особенности были успешно промоделированы интегрируемыми биллиардами. А именно, для каждой седловой особенности существует интегрируемая биллиардная книжка (склеенная из биллиардов A_0'), такая что траектории, продолжения которых проходят через фокусы, лежат на особом слое данной особенности. Указанные листы книжки – биллиарды A_0' – ограничены софокусными эллипсом, гиперболой и двумя осями данного семейства.

Однако, в случае если функция F не является функцией Морса, возможно появление бифуркации следующего вида. Пусть вершины особого графа 2-атома имеют произвольную степень $n = 2k,\ k > 1$. Окрестность таких вершин будем называть мультиседлами (в литературе встречается иногда термин обезьянье седло). Поместим на ребра графа конечное число вершин-звездочек и принимаем припишем каждой пару взаимно простых натуральных чисел $(p, q),\ p > q$. Пусть трехмерная особенность имеет структуру расслоения Зейферта, база которого имеет вид 2-атома, содержащего мультиседла, а особые слои отвечают точкам звёздочкам. Причем тип особого слоя для каждой точки-звездочки определяется приписанной ей парой чисел p и q.

Настоящая работа посвящена моделированию указанных особенностей. Ранее в работах А. Кузнецовой было показано моделирование подобных особенностей с не более чем одним особым слоем расслоения Зейферта. В данной работе представлен общий алгоритм. Как и в работах автора с И.С. Харчевой для данного моделирования потребуются исключительно биллиарды A_0'.

Опишем подробнее конструкцию интегрируемой биллиардной книжки. Для начала напомним, что если область биллиарда ограничена дугами софокусных квадрик, то такой биллиард оказывается интегрируемым. Более точно, зафиксируем множество софокусных квадрик уравнением

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (b-\lambda)(a-\lambda). \tag{1}$$

Здесь параметры $0 < b < a$ — квадраты полуосей граничного эллипса. Большая полуось эллипса лежит на оси Ox и содержит фокусы (будем иногда называть Ox фокальной осью), а малая — она вертикальной оси Oy. Они входят в семейство (1) при $\lambda = b, \lambda = a$ соответственно.

Тогда для каждой траектории биллиарда, ограниченного дугами софокусных квадрик данного семейства сохраняется параметр Λ – значение параметра эллипса или гиперболы, которой касаются прямые, содержащие траектории биллиарда. При этом уровню $\Lambda = b$ (в данной статье данный уровень назван *фокальным*) отвечают траектории проходящие через фокусы (более точно, лежащие на прямых, проходящих через фокусы).

Следующим шагом в изучении интегрируемых биллиардов стало открытие конструкции биллиардной книжки. Рассмотрим клеточный комплекс, двумерные клетки которого являются плоскими биллиардными столами – частями плоскости, ограниченными дугами софокусных квадрик. Занумеруем все двумерные клетки и оснастим одномерные клетки комплекса циклическими перестановками, показывающими как меняется номер листа, по которому движется биллиардная частица, после удара о соответствующую границу. Теперь спроектируем все листы книжки на плоскость. Каждая нульмерная клетка при этом будет отвечать пересечению дуги некоторого эллипса и некоторой гиперболы. Припишем данным квадрикам перестановки, циклы которых ранее были заданы на соответствующих одномерных клетках комплекса. Наконец потребуем, чтобы в каждой нульмерной клетке указанные перестановки коммутировали.

В работе нам потребуются биллиардные книжки, склеенные из областей плоскости (биллиардов) A'_0. Такие биллиарды ограничены дугой эллипса, дугой гиперболы и осями софокусного семейства – фокальной прямой (отвечающей параметру $\lambda = b$) и осью ординат – вырожденной гиперболой (отвечающей параметру $\lambda = a$).

Здесь и далее мы рассматриваем изоэнергетическую поверхность Q^3, на которой предполагается равным единице квадрат длины вектора скорости. Для биллиардной книжки $\mathbb{B}$ обозначим через $p(x, v) = x$ отображение проекции $h : Q^3 \to \mathbb{B}$ изоэнергетической поверхности на биллиардный стол.

Вначале уточним структуру моделируемой особенности. Напомним, что мы предполагаем, что на двумерной ориентируемой компактной поверхности задана гладкая функция f. Мы рассматриваем некоторое седловое значение c данной функции, такое что прообраз данного значения (особый слой) гомеоморфен некоторому графу K, все вершины которого имеют четные степени $2k,\ k > 1$. Расслоенная на регулярные линии уровня функции f окрестность данного особого слоя называется мультиседловым 2-атомом. Заметим, что регулярные линии уровня разбиваются на два класса на тех, для точек x которых $f(x) < c$ (назовём такие окружности белыми) и на тех, для которых $f(x) > c$ (назовём такие окружности черными). На 2-атоме определён поток $sgradf$, особыми точками которого являются вершины графа K. Каждой вершине степени $2k$ инцидентны k входящих и k исходящих сепаратрис, а её окрестность может быть разбита разрезами трансверсально белым окружностям в объединение k "полукрестов". Каждый полукрест в этом случае содержит одну входящую и одну исходящую сепаратрису. Предлагаемый в работе алгоритм, аналогично алгоритму для моделирования невырожденных седловых атомов, сопоставляет каждому полукресту лист A'_0.

Лемма 1 *Рассмотрим книжку $\mathbb{B}(A'_0, n)$ склеенную из n экземпляров биллиардных листов A'_0, единственный корешок которой снабжен циклической перестановкой и отвечает отрезку фокальной прямой. Тогда прообраз окрестности фокального значения дополнительного интеграла $\Lambda^{-1}(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ послойно гомеоморфен прямому произведению окружности и плоского 2-атома с одним мультиседлом. Указанный 2-атом имеет одну особую точку, отвечающей в графе вершине степени $2n$.*

Доказательство. Рассмотрим прообраз $U := \Lambda^{-1}(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ в изоэнергетической поверхности Q^3. Зафиксируем дугу α некоторого софокусного эллипса, имеющего непустое пересечение с листами биллиардной книжки. Рассмотрим прообраз $p^{-1}(\alpha) \cap U$ такой дуги. Данный прообраз расслоен на уровни интеграла Λ, каждый из которых гомеомоморфен несвязному объединению двух окружностей s^-_Λ и s^+_Λ. В самом деле, каждый слой данного прообраза получается оснащением точек дуги α векторами скорости, так чтобы прямая проходящая через данную точку, с данным направляющим вектором касалась квадрики с параметром Λ. Через каждую точку (в фиксированном листе) можно провести ровно две касательных, следовательно, определить четыре возможных вектора, удовлетворяющих указанным условиям. При этом вектора направленные к (или соответственно “от”) эллиптической границе биллиарда должны быть отождествлены в граничных точках либо в силу биллиардного закона на границе стола. Окружность, соответствующую векторам скорости к эллиптической границе обозначим через s_Λ^+, а к фокальной прямой через s_Λ^-. Меняя параметр эллипса, фиксирующий дугу α, а также параметр Λ дополнительного интеграла получаем слои искомого расслоения Зейферта. Если дуга эллипса лежит на эллиптической границе листа книжки, то окружности s_Λ^- и s_Λ^+ отождествляются в силу биллиардного закона. Аналогичное отождествление происходит на особом слое $\Lambda = b$ на фокальной прямой. Все эти слои, очевидно, расслаивают прообраз U, причем каждый из них имеет окрестность послойно гомеоморфную тривиально расслоенному полноторию.

Базу найденного расслоения Зейферта можно указать так. Рассмотрим гиперболу из софокусного семейства, имеющую непустое пересечение с листами биллиардной книжки, и объединение $\beta = \bigcup_{i=1}^n \beta_i$ её дуг β_i, склеенных вдоль фокальной прямой. Если дуги гипербол лежит во внтуренности листов биллиардной книжки, то пересечение $p^{-1}(\beta) \cap U$ естественным образом распадается в два гомеоморфных друг другу куска P^+ и P^-, отличающихся направлением векторов скорости (с положительной абсциссой и отрицательной). Рассмотрим один из них, например P^+, вектора скорости точек которого имеют положительную абсциссу (то есть направлены вправо). Покажем, что P^+ образует искомую базу слоения. Действительно, оснастим точки дуг β_i подходящими векторами скорости. Тогда каждая окружность пересекает $p^{-1}(\beta) \cap U$ ровно в одной точке.

Пересечение слое $\Lambda = b$ с P^+ гомеоморфно графу с одной вершиной и n петлями. В самом деле, оснащая каждую дугу β_i подходящими векторами скорости при $\Lambda = b$ получаем окружность (она естественным образом состоит из двух половин, на одной вектора направлены к граничному эллипсу, на другой к фокальной прямой). Точки этих окружностей, проектирующиеся на фокальный отрезок, отвечают одной особой точке – вершине графа. При $\Lambda < b$ пересечение слоя с P^+ гомеоморфно объединению n окружностей, так как оснащения дуг β_i векторами скорости уже не имеют общих точек (нет подходящих векторов скорости на фокальной прямой). При $\Lambda > b$ пересечение слоя с P^+ гомеоморфно одной окружности. В прообразе точки на фокальной прямой расположены n точек, склеивающих прообразы дуг (отрезки) друг с другом в одну окружность. Следовательно, P^+ (а также P^-) послойно гомеоморфны искомой двумерной бифуркации. ■

Для того чтобы промоделировать трехмерную особенность гамильтоновой системы, гомеоморфную прямому произведению мультиседлового 2-атома на окружность (расслоение Зейферта без особенностей), необходимо поступить следующим образом. Разрежем базу данной особенности на мультисёдла. Каждому такому седлу согласно лемме сопоставим книжку $\mathbb{B}(A_0', k)$, где k – число исходящих из особой точки сепаратрис. Занумеруем все листы всех книжек для всех мультиседел натуральными числами. В соответствии с нумерацией листов книжек занумеруем полукресты всех мультиседел, разрезав их по трансверсально белым окружностям. Если два мультиседла в исходной базе были склеены, то существует сепаратриса, их соединяющая, т.е. исходящая из одного мультиседла и входящая в другое. Фиксируем полукресты, отвечающие данным сепаратрисам. Отождествим вдоль эллиптической границы биллиарды A_0', соответствующие данным полукрестам. На полукресте, на котором данная сепаратриса была входящей найдём исходящую сепаратрису. Найдем мультиседло и полукрест на котором она входящая. Повторим процедуру, приклеив к найденному на предыдущем шаге корешку новый корешок биллиарда A_0', отвечающий новому найденному полукресту. Повторяем до тех пор, пока не вернёмся в исходное седло. Припишем эллиптическому корешку циклическую перестановку из номеров последовательной найденных биллиардов.

Теперь перейдём к моделированию звездочек.

Лемма 2 *Рассмотрим биллиардную книжку $\mathbb{B}(A_0', n, k)$, склеенную из n экземпляров биллиарда A_0', так что на корешке, который проецируется на фокальную прямую стоит циклическая перестановка $\sigma = (1..n)$, на вогнутой гиперболической и эллиптической – тождественные перестановки, а на выпуклой гиперболической дуге перестановка σ^k, $k < n$, $(n, k) = 1$. Тогда атом, описывающий бифуркацию слоения Лиувилля на фокальном слое, имеет вид расслоения Зейферта с двумерной базой P, которая является вырожденным двумерным атомом с одной вершиной. Соответствующие слоение Зейферта имеет один особый слой типа (n, k).*

Доказательство. Вначале отметим, что в силу того что числа k и n взаимно-просты следует, что перестановка на гиперболическом корешке данной биллиардной книжки также циклическая.

Воспользуемся предыдущим результатом. Отменим в книжке $\mathbb{B}(A'_0, n)$ из леммы 1 биллиардный закон на вертикальном корешке и определим его по-новому, так, чтобы в результате получилась книжка $\mathbb{B}(A'_0, n, k)$. Как такое переопределение отразится на слоении изоэнергетической поверхности? Отмена биллиардного закона – это разрез $U := \Lambda^{-1}(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ трансверсально критической окружности. Границей разреза являются две гомеоморфных друг другу базы P^+ и P^-. Переопределение биллиардного закона – это отождествление краёв разреза с поворотом на $2\pi k/n$. Что при этом происходит с расслоением Зейферта? Критическая окружность – движение по фокальной прямой — остается на месте. Однако её окрестность, по определению, теперь является нетривиально расслоенным полноторием с параметрами (n, k). Слои расслоения это по прежнему прообразы дуг софокусных эллипсов, заполняющих листы биллиардной книжки.

■

Другие доказательства данных утверждений можно найти в работе []. Однако выше было приведено другое доказательство, явно задающее структуру искомого расслоения Зейферта.

Осталось добавить к седловому мультиатому звездочки. Проблема состоит в том, что это пока нельзя сделать склейкой вдоль эллиптических дуг биллиардов A'_0. Несовпадение корешков приводит к тому что частичная склейка породит некоммутирующие перестановки. Для того чтобы этого избежать модифицируем найденные книжки, унифицировав вид эллиптического корешка.

Лемма 3 *Рассмотрим биллиардную книжку, полученную из m экземпляров биллиардной книжки $\mathbb{B}(A'_0, n)$. Занумеруем все листы книжек номерами (i, j), где i – номер листа, а j – номер биллиардной книжки. Склеим их вдоль вертикального корешка друг с другом. Зададим на данном корешке следующий биллиардный закон. Точка двигаясь по листу с номером i биллиардной книжки с номером j после удара о вертикальный корешок продолжает движение по листу с тем же номером i на биллиардной книжке с номером $j+1 \mod m$. Полученную биллиардную книжку обозначим через $\mathbb{B}_m(A'_0, n)$.*

Рассмотрим биллиардную книжку, полученную из m экземпляров биллиардной книжки $\mathbb{B}(A'_0, n, k)$. Занумеруем все листы книжек номерами (i, j), где i – номер листа, а j – номер биллиардной книжки. Склеим их вдоль вертикального корешка друг с другом. Зададим на данном корешке следующий биллиардный закон. Пусть $j < m$. Точка двигаясь по листу с номером i биллиардной книжки с номером j после удара о вертикальный корешок продолжает движение по листу с тем же номером i на биллиардной книжке с номером $j+1$. Двигаясь по листу с номером i книжки с номером m после удара о вертикальный корешок движение продолжается по книжке с номером 1 на листе $i+k \mod n$ (смена номера листа как на исходной книжке). Полученную биллиардную книжку обозначим через $\mathbb{B}_m(A'_0, n, k)$.

Тогда у модифицированных биллиардных книжек $\mathbb{B}_m(A'_0, n)$ и $\mathbb{B}_m(A'_0, n, k)$ структура слоения Лиувилля (особый слой и его окрестность) послойно гомеоморфны слоению Лиувилля исходных книжек $\mathbb{B}(A'_0, n)$ и $\mathbb{B}(A'_0, n, k)$ соответственно (т.е. атомы-бифуркации сохраняются).

Доказательство. Вначале проверим коммутирование перестановок в нульмерных клетках. Достаточно сделать это в начале координат, так как перестановка на эллиптическом корешке осталась тождественной.

Для книжки $\mathbb{B}_m(A'_0, n)$ биллиардный закон на фокальной прямой $(i, j) \to (i+1 \mod n, j)$, биллиардный закон на вертикальном корешке $(i, j) \to (i, j+1 \mod m)$.

Для книжки $\mathbb{B}_m(A'_0, n, k)$ биллиардный закон на фокальной прямой $(i, j) \to (i+1 \mod n, j)$, а на вертикальном корешке при $j < m : (i, j) \to (i, j+1 \mod m)$, а при $j = m : (i, j) = (i, m) \to (i+k \mod n, 1)$.

В обоих случаях коммутирование очевидно.

Отмена биллиардного закона на вертикальных корешках книжек $\mathbb{B}(A'_0, n)$ и $\mathbb{B}(A'_0, n, k)$ также как и в предыдущей лемме, приводит к тому, что в трехмерной окрестности U особого слоя происходит разрез трансверсально критической окружности. А берега разреза – это плоские атомы P^+ и P^- (здесь предполагаем, что P^+ отвечает исходящим из листов векторам, а P^- входящим). Склейка разрезанных книжек в единую книжку есть отождествление границы P^+ книжки с номером j и границы P^- книжки с номером $j+1$. При этом так как в книжке $\mathbb{B}_m(A'_0, n, k)$ на последнем шаге происходит "подкрутка" при склейке, то окрестность особого слоя также остаётся нетривиально расслоенным полноторием с параметрами (n, k). Слои расслоения это по прежнему прообразы дуг софокусных эллипсов, заполняющих листы биллиардной книжки. ■

Отметим, что процедура модификации книжки в расслоении Зейферта фактически "удлинняет" слои расслоения Зейферта исходных книжек в m раз. Как устроены корешки модифицированных биллиардных книжек, лежащие на эллипсе? Для книжки $\mathbb{B}(A_0', n)$ этот корешок был несвязным объединением n отрезков (дуг эллипса). Для книжки $\mathbb{B}_m(A_0', n)$ каждая из n компонент связности этого корешка гомеоморфна отождествлению m отрезков по одной граничной точке (на вертикальном корешке), т.е. графу с m ребрами и $m+1$ вершиной. Для книжки $\mathbb{B}_m(A_0', n, k)$ эллиптический корешок гомеоморфен графу с mn ребрами и число вершин которого равно $mn+1$. То есть, сама структура корешков теперь при подходящих значениях числа листов совпадает – это связный граф, число вершин которого на единицу больше числа ребер. Это позволяет, правильным образом подбирая число листов, склеивать эти книжки друг с другом, "вклеивая" особые слои-звёздочки в расслоение Зейферта типа прямого произведения.

Замечание 1 *Удобно перенумеровать листы книжки $\mathbb{B}_m(A_0', n, k)$. В самом деле, напомним, что по построению числа n и k взаимно-просты. В исходной книжке перестановка σ на фокальном корешке циклическая длины n, а на вертикальном – степень σ^k. В силу взаимной простоты n и k перестановка σ^k также имеет один цикл длины n, т.е. "пробегает" по всем листам биллиардной книжки. Перестановка в модифицированной книжке $\mathbb{B}_m(A_0', n, k)$ на вертикальном корешке также циклическая, её длина уже mn. Следовательно, можно сделать нумерацию листов таким образом, чтобы перестановка на вертикальном корешке имела вида $(1\ 2\ \ldots\ mn)$. Тогда на фокальной прямой перестановка будет её некоторой степенью.*

Теорема 1 *Пусть дан вырожденный 3-атом некоторой интегрируемой гамильтоновой системы, который является расслоением Зейферта с базой некоторого ориентируемого 2-атома S, критический граф K которого содержит вершины произвольной четной степени, а на ребрах отмечены точки, отвечающие особым слоям расслоения Зейферта, имеющие произвольный тип. Тогда для такой трехмерной бифуркации алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов A_0', такая что её слоение Лиувилля на фокальном слое описывается заданным 3-атомом.*

Доказательство.

Алгоритм построения книжки Пусть особые слои-звездочки имеют типы $(p_1, q_1), \ldots (p_l, q_l)$. Рассмотрим число $M = \text{НОК}(q_1, \ldots, q_l)$. Каждому мультиседлу, отвечающему вершине степени $2k_i$ в графе K поставим в соответствие книжку $\mathbb{B}_M(A_0', k_i)$. Каждой точке-звездочке с параметрами (p_i, q_i) сопоставим книжку $\mathbb{B}_{m_i}(A_0', q_i, p_i)$, где $m_i := M/q_i$. Каждую из построенных книжек назовём *главой*.

Все главы имеют одинаковую структуру компонент связности эллиптических корешков – это графы, в которых к одной вершине примыкают M рёбер. Для книжек отвечающих седловым вершинам степени $2k_i$ число таких корешков равно k_i, а для вершин звездочек – такой корешок ровно один. Теперь легко определить корректную склейку глав друг с другом вдоль эллиптических корешков. Занумеруем листы всех книжек символами a_{ij} так, чтобы каждой склейке M биллиардов A_0' вдоль общего корешка отвечала перестановка $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{Mj})$. Индекс $j \in 1..N$, где $N = \sum k_i + \sum p_i$, где k_i – это числа исходящих сепаратрис всех седловых точек, т.е. MN – это число всех листов A_0' всех биллиардных книжек. После склейки биллиардный закон определим так – при ударе о эллиптический корешок не меняется номер листа, но меняется номер главы. Тогда отражение в точке на вертикальной оси корректно – в ней происходит одновременная замена и номера листа (циклически) и номера главы. Мы не будем явно выписывать перестановки, для удобства изложения. Опишем только биллиардный закон.

Рассмотрим в базе S какое-нибудь седло и фиксируем исходящую сепаратрису. Данной сепаратрисе по построению отвечает в главе $\mathbb{B}(A_0', k_1)$ (где k это число исходящих сепаратрис седла) некий биллиард A_0'. В соответствующей модифицированной книжке $\mathbb{B}_M(A_0', k_1)$ – M экземпляров такого биллиарда, отождествленных вдоль вертикального корешка. Назовём его *параграф.* Рассмотрим седло, для которого выбранная сепаратриса является входящей. Найдём соответствующий полукрест и соответствующий параграф в книжке $\mathbb{B}_M(A_0', k_2)$, моделирующей данное седло. Корешки соответствующих книжек склеим друг с другом. Если на данной сепаратрисе были отмечены точки-звездочки, также подклеим их корешки к данному эллиптическому корешку. Биллиардный закон будет теперь определяться сепаратрисой – стартуя с параграфа отвечающего книжке $\mathbb{B}_M(A_0', k_1)$ последовательно проходим по главам, отвечающих точкам звездочкам (в той последовательности в которой они расположены на сепаратрисе), и заканчиваем параграфом книжки $\mathbb{B}_M(A_0', k_2)$. Теперь у полукреста, для которой данная сепаратриса была входящей фиксируем исходящую сепаратрису и повторим процедуру, фиксируя номера глав, отвечающих звездочкам и номер главы, отвечающей седлу, для которой эта сепаратриса входящая. Повторяем до тех пор пока не вернёмся в начальное седло в полукрест из которого стартовали. Повторим процедуру до тех пор, пока не пройдем вдоль всех сепаратрис.

Завершение доказательства.

Покажем, что у полученной биллиардной книжки искомое расслоение Зейферта подмногообразия $U := \Lambda^{-1}(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Действительно, в качестве слоёв расслоения Зейферта выступают точки дуг эллипсов, оснащенных подходящими векторами скорости. Для каждой главы расслоение Зейферта уже ранее было построено. Отметим, что каждый параграф главы $\mathbb{B}_M(A'_0, k_i)$ и каждая глава $\mathbb{B}_M(A'_0, p_i, q_i)$ склеены из одинакового числа M экземпляров биллиардов A'_0 вдоль вертикального корешка. Ранее мы занумеровали все листы через a_{ij}, где i отвечает номер листа, а j – или номер главы-звездочки или номер параграфа мультиседла. Перестановки на вертикальных корешках записываются в виде $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{Mj})$, а на эллиптических – $(..a_{il}, a_{ir}..)$. Выберем на всех листах a_{1j} дугу β софокусной гиперболы, целиком лежащую во внутренности биллиарда A'_0 и оснастим её векторами вправо, зафиксировав этим одну из двух гомеоморфных частей прообраза $p^{-1}(\beta) \cap U$. Обозначим эту часть через S'. Легко показать, чтолинии уровня функции Λ расслаивают S' : на критическом уровне $\Lambda = b$ слой гомеоморфен критическому графу K базы S, а при некритических значениях – объединению нескольких окружностей. Отсюда следует гомеоморфизм баз S и S'. Совпадение типов особых слоёв-звездочек следует из предыдущих лемм, так как их типы при склейке глав в книжку не менялись. ■

Работа выполнена в МГУ им. М.В.Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-10106.

Список литературы

[1] А.А. Глуцюк, “О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны” // ДАН, **481**:6 (2018), 594–598.

[2] V. V. Fokicheva, “Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas” // Sb. Math., 205:8 (2014), 1201–1221

[3] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы,* Изд. дом «Удмуртский университет», 1999

[4] В.В. Козлов, Д.В. Трещёв, “Генетическое введение в динамику систем с ударами”, М.: Изд-во МГУ, 1991.

[5] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

[6] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.

[7] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов” // Матем. сб., 210:3 (2019), 17–74

[8] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами” // ДАН, 479:6 (2018), 607–610.

[9] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56.

[10] V.V. Vedyushkina, V.A. Kibkalo, “Billiard books of low complexity and realization of liouville foliations of integrable systems”, Chebyshevskii sbornik 23(1), 53–82 (2022)