

СЛОЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ БИЛЛИАРДНОЙ КНИЖКИ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ, СОДЕРЖАЩЕЙ ФОКУСЫ

Д. А. Ткаченко¹

В статье изучена топология невырожденной изоэнергетической поверхности бильярдной книжки, склеенной из k пар половинок эллипса, посредством вычисления грубой молекулы Фоменко и инвариантов Фоменко-Цишинга.

Ключевые слова: бильярд, бильярдная книжка, изоэнергетическая поверхность, динамическая система.

1. Введение. Дадим определение бильярда.

Определение 1. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – гладкая регулярная кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограничивающая некоторую область Ω . *Бильярдом в области Ω* называется динамическая система, состоящая из области Ω и материальной точки, движущейся равномерно прямолинейно без трения внутри этой области, на границе которой точка отражается абсолютно упруго и согласно стандартному закону отражения: угол падения равен углу отражения. При этом задан *бильярдный закон*: на фазовом пространстве M^4 динамической системы вводится следующее отношение эквивалентности $\sim$:

$$(x, v) \sim (y, w) \iff x = y = x_0, \|v\| = \|w\|, (v - w) \perp T_{x_0} \partial\Omega.$$

Отметим тот факт, что материальная точка, начавшая движение в определённом направлении с фиксированным модулем вектора скорости, будет описывать ту же траекторию, если ей изначально придать другое значение модуля вектора скорости. В этой динамической системе при движении материальной точки сохраняется энергия $H = v_1^2 + v_2^2$, где v_1, v_2 – координаты вектора скорости в некоторый момент времени.

Определение 2. Бильярд называется *интегрируемым*, если существует функция F такая, что она сохраняется вдоль траектории материальной точки и функционально независима с функцией H , то есть вектора dH и dF почти всюду линейно независимы.

Изоэнергетической поверхностью Q_h^3 называется линия уровня функции H при значении $H = h$, то есть

$$Q_h^3 := \{(x, v) \in M^4 \mid H(x, v) = h\}.$$

Интегрируемость бильярда в эллипсе была замечена Дж.Д. Биркгофом. Им также была сформулирована гипотеза, утверждающая, что на плоскости на самом деле мало интегрируемых бильярдов. Фактически этот список ограничивается бильярдами в областях, ограниченных прямоугольником или дугами софокусных квадрик. Гипотеза была доказана А.Е. Мироновым.

Рассмотрим на плоскости семейство софокусных квадрик, задаваемое следующим уравнением:

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda),$$

где $a > b$ – фиксированные параметры данного семейства, λ – нефиксированный параметр, меняющийся в пределах отрезка $[0, a]$. Звенья траектории материальной точки в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик, касаются или некоторого эллипса, или некоторой гиперболы из указанного семейства, причём одного и того же эллипса или гиперболы для выбранной траектории. Такая квадрика называется *каустикой*. Параметр $\lambda = \lambda_0$ этой каустики является первым интегралом этой динамической системы, при этом этот параметр вычисляется по следующей формуле:

$$\lambda_0 = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_1x - v_2y)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

¹ Ткаченко Даниил Андреевич – студент 2-го курса мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: daniil.tkachenko@math.msu.ru.

Tkachenko Daniil Andreevich – Second Year Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

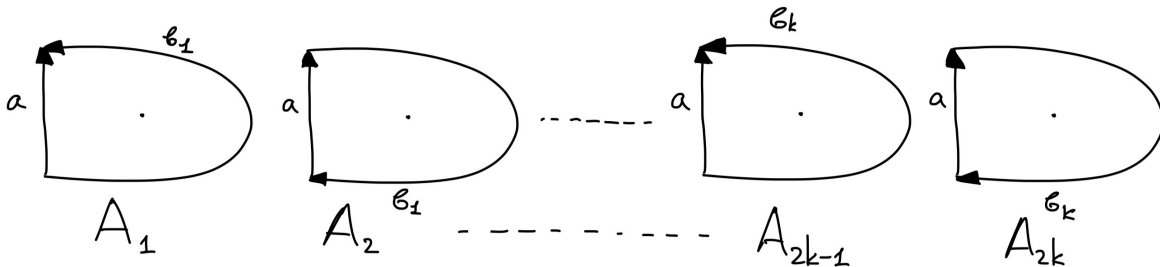
Интегрируемость бильярда в такой области очевидна, так как звенья траектории или их продолжения будут касаться этой каустики.

Введём конструкцию бильiardной книжки. Зафиксируем некоторую плоскую область, ограниченную дугами софокусных квадрик. Возьмём конечное число дубликатов этих областей и склеим их по граничным дугам. Пусть вдоль некоторой граничной дуги склеено k плоских бильiardных листов. Занумеруем их числами от 1 до k включительно и припишем склеенной дуге перестановку $\sigma \in S_k$. То есть если материальная точка двигалась на бильiardном листе с номером i , то после отражения от этой дуги она продолжит движение уже на бильiardном листе с номером $\sigma(i)$. Так как звенья траектории или их продолжения по-прежнему будут касаться той же каустики, что и до отражения, бильiardная система останется интегрируемой. Такая конструкция, называемая *бильiardной книжкой*, была предложена В.В. Ведюшкиной. Также можно получить новые конструкции, если менять метрику, рассматривать действие потенциального и/или магнитного поля в бильiardной области, а также если ввести проскальзывание. В настоящей статье изучается пример интегрируемого бильiardа, который является бильiardной книжкой с проскальзыванием. Рассмотрение бильiardов с проскальзыванием было введено А.Т. Фоменко. Так как дальше будет рассматриваться бильiardная книжка, составленная из k пар половинок эллипса, то покажем, что означает проскальзывание на примере эллиптического бильiardа. Это значит, что точка, ударяясь о границу эллипса, проскальзывает вдоль границы на пол оборота и вылетает уже из противоположной точки эллипса. То есть точка, столкнувшись о границу эллипса в точке с координатами (x, y) , переходит в точку с координатами $(-x, -y)$ и продолжает своё движение внутри эллипса, при этом с вектором скорости, имеющим противоположные координаты относительно вектора скорости, который возникает при обычном отражении материальной точки о границу.

Для исследования слоений Лиувилля невырожденной (т.е. при $\|v\| > 0$) изоэнергетической поверхности бильiardной книжки будем вычислять грубую молекулу Фоменко и меченую молекулу Фоменко-Цишанга [1].

2. История вопроса. Изучая слоение Лиувилля невырожденной изоэнергетической поверхности эллиптического бильiardа совместно с В.В. Ведюшкиной, мы перешли к рассмотрению эллиптического бильiardа с проскальзыванием. Эта задача сводилась к бильiardу, состоящему из двух половинок эллипса с проскальзыванием на эллиптических дугах. Это навело нас на мысль изучить слоение Лиувилля невырожденной изоэнергетической поверхности бильiardной книжки с проскальзыванием, склеенной из произвольного количества пар половинок эллипса.

3. Постановка задачи. Рассмотрим совокупность $2k$ половинок эллипса, $k \in \mathbb{N}$, и занумеруем их числами от 1 до $2k$ включительно. Разобьём их по парам и зададим на эллиптических дугах пар проскальзывание (см. рисунок ниже). Границы этих половинок состоят из вырожденной гиперболической и эллиптической дуг. Склеим все эти половинки по соответствующим дугам. Получили CW-комплекс. Одномерной гиперболической клетке припишем перестановку $\sigma = (1\ 3\ 5 \dots 2k-1\ 2\ 4\ 6 \dots 2k)$, а одномерной эллиптической клетке – перестановку $\pi = (12)(34)(56) \dots (2k-1\ 2k)$. Тем самым получим бильiardную книжку с проскальзыванием. Обозначим i -тый бильiardный лист через A_i , произвольный бильiardный лист – через A без индекса, а сам бильiard – через $\mathcal{D}$. В настоящей статье изучена топология изоэнергетической поверхности бильiardа $\mathcal{D}$.



Утверждение. 1 Траектории на данном билиарде определены корректно.

Доказательство. Для того, чтобы траектории были определены корректно, достаточно, чтобы перестановки σ и π коммутировали. Покажем, что перестановки $\pi\sigma$ и $\sigma\pi$ каждый элемент из множества $X = \{1, 2, \dots, 2k\}$ переводят в одно и то же. Пусть $j \in X$.

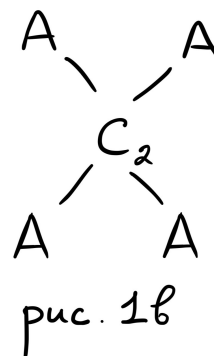
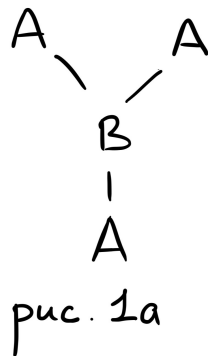
1. Если j – чётное число. Тогда если $j \neq 2k$, то $\pi(\sigma(j)) = \pi(j+2) = j+1 = \sigma(j-1) = \sigma(\pi(j))$.
Если $j = 2k$, то $\pi(\sigma(2k)) = \pi(1) = 2 = \sigma(2k-1) = \sigma(\pi(2k))$.
2. Если j – нечётное число. Тогда если $j \neq 2k-1$, то $\pi(\sigma(j)) = \pi(j+2) = j+3 = \sigma(j+1) = \sigma(\pi(j))$.
Если $j = 2k-1$, то $\pi(\sigma(2k-1)) = \pi(2) = 1 = \sigma(2k) = \sigma(\pi(2k-1))$.

Значит, $\pi\sigma = \sigma\pi$. ■

Утверждение 2. Пусть имеется билиардная книжка, описанная выше. Тогда особый слой невырожденной изоэнергетической поверхности данного билиарда гомеоморфен особому слою 3-атома B , если k – чётное, и особому слою атома C_2 , если k – нечётное. (Описание перестроек торов Лиувилля см. [1].)

Из этого утверждения следует

Теорема 1. Граф Фоменко, кодирующий слоение Лиувилля данного билиарда, изображён в случае чётного k на рис. 1а, а в случае нечётного k – на рис. 1б.



Доказательство утверждения 2. Как было сказано выше, данный билиард интегрируем. Также напомним, что нас интересуют траектории, проходящие через фокусы и любая точка особого слоя отождествляется с точкой, принадлежащей некоторому листу билиарда. Поэтому каждая точка области оснащена четырьмя векторами скорости (см. рисунок А).

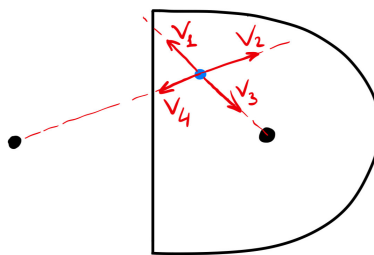
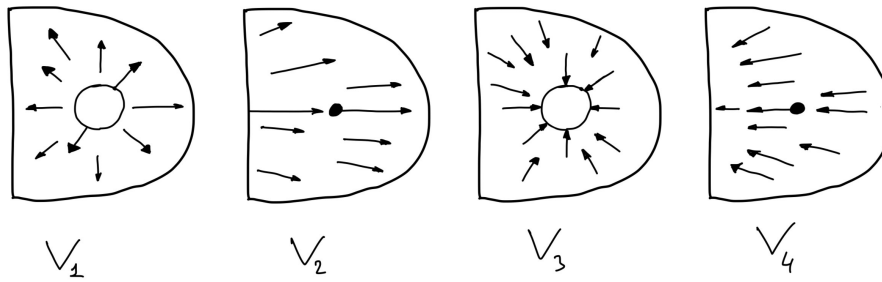


рис. А

Обозначим их следующим образом: вектор v_1 – направлен от фокуса области A , v_2 – от фокуса, лежащего вне области A , v_3 – к фокусу области A , v_4 – к фокусу, лежащему вне области A . При этом на границах областей имеются следующие отождествления (без учёта смены области A):

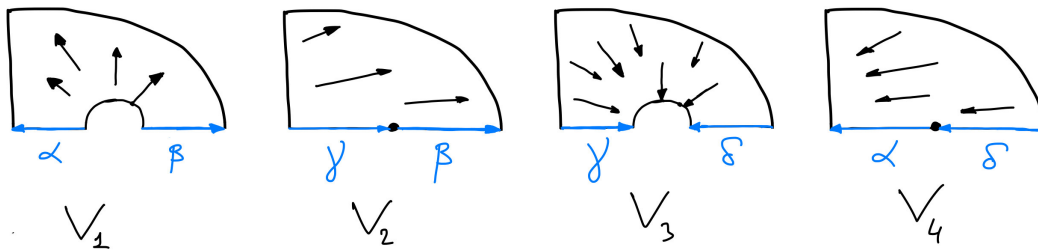
1. На «гиперболе»: $v_1 \sim v_2, v_3 \sim v_4$.
2. На эллипсе: $v_1 \sim v_4, v_2 \sim v_3$.

Заметим, что вектора v_2 и v_4 в каждой точке области A однозначно задаются, однако вектора v_1 и v_3 не во всех точках задаются однозначно. Для того, чтобы исправить это, будем рассматривать вместо области A_i её четыре дубликата, на каждом из которых будут располагаться лишь соответствующие вектора скорости. Дубликаты области A_i обозначим через $A_i v_1, A_i v_2, A_i v_3, A_i v_4$, где $A_i v_j$ – дубликат области A_i с векторами скорости v_j . В копиях $A_i v_1$ и $A_i v_3$ вместо точки фокуса рассмотрим довольно маленькую окружность, не выходящую из области. Материальная точка, влетающая на эту окружность (в фокус), вылетает из противоположной точки этой окружности. Таким образом, теперь все вектора скорости однозначно задаются:



Всего получилось $8k$ областей. Разрежем каждую область вдоль горизонтальной прямой, являющейся осью симметрии этой области. Обозначим верхние части разрезанных областей через a^j , а нижние – через a_j , где j – номер соответствующей области A_j . Введём для дубликатов a_j и a^j аналогичные областям A_j обозначения: $a_j v_1, a^j v_1, \dots, a_j v_4, a^j v_4$. В итоге имеется $16k$ новых областей, которые дальше будем именовать кусочками или элементами и которые поделены на группы: у одних индекс располагается сверху буквы, у других – внизу буквы.

Векторы, располагающиеся на горизонтальных отрезках элементов av_i (через a будем обозначать произвольный кусочек), обозначим буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, как показано на рисунке ниже.



Через $\square_j$, где $\square \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, будем обозначать вектор $\square$, принадлежащий кусочку a_j или a^j .

В итоге имеем фигуры, гомеоморфные треугольникам и пятиугольникам. Задача свелась к их склеиванию. Будем строить следующую цепь из последовательных склеек:

весь цикл σ . При $m = k$ имеем, что $\pi^m = \pi$ и число j посредством σ^m переходит в число $\sigma^m(j)$, которое после π превращается в $\pi(\sigma^m(j)) = j$. По итогу $\pi^m \sigma^m = id$ при найденных m . ■

Факт 3. Начав построение цепи с элементов a_j и a^j , мы получим одинаковые по длине и верхним и нижним склейкам цепи.

Доказательство. Действительно, отметим лишь тот факт, что вторая цепь получается из первой только соответствующими опусканиями и поднятиями индекса у букв a . Очевидно, что это никак не скажется на верхних и нижних склейках. Боковые склейки, естественно, различны у этих цепей. ■

Рассмотрим случай, когда k – чётное. Тогда $m = 2k$. Так как m – количество цельных блоков, то количество использованных кусочков в цепи с началом, например, $a_1 v_1$ равно $8k$. Ввиду факта 3 есть другая цепь с началом $a^1 v_1$ и такой же длины. Поскольку всего элементов $16k$ штук, имеется лишь две цепи. Нетрудно заметить, что в этом случае склейки F и G равны. Поэтому после склейки цепей получим 3-атом B .

Рассмотрим случай, когда k – нечётное. Тогда $m = k$. Так как m – количество цельных блоков, то количество использованных кусочков в цепи с началом, например, $a^1 v_1$ равно $4k$. Пользуясь фактом 3, получаем ещё одну цепь с $4k$ кусочков и с началом $a_1 v_1$. Покажем, что кусочков $a^2 v_1$ и $a_2 v_1$ не может быть в построенных выше цепях.

Рассмотрим $\pi^t \sigma^t(1)$ при $1 \leq t \leq k - 1$. При больших t рассматривать не имеет смысла, поскольку цепь начнёт повторяться. Тогда $\sigma^t(1) = 1 + 2t \in \{1, 3, \dots, 2k - 1\}$, то есть $\sigma^t(1)$ – нечётное число. Если t – чётное, то $\pi^t \sigma^t(1) = 1 + 2t \neq 2$ ни при каких $1 \leq t \leq k - 1$. Если t – нечётное, то $\pi^t \sigma^t(1) = 2 + 2t \neq 2$ ни при каких $1 \leq t \leq k - 1$. Тем самым в первых двух цепях нет кусочков $a^2 v_1$ и $a_2 v_1$. Ввиду этого в одной и той же цепи верхняя и нижняя склейки будут *различными*. Построим две цепи, с началами $a^2 v_1$ и $a_2 v_1$. Из факта 3 следует, что эти цепи также будут длины k , потому будут иметь также по $4k$ кусочков.

По итогу у нас имеются четыре цепи, очевидно, с одинаковыми соответствующими верхними и нижними склейками. После их склейки получим 3-атом C_2 . Таким образом, утверждение 2 доказано. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 444с.
2. Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping / Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav'yalov V.N. // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2021. - N. 28 - С. 37-55.