УДК 511

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В НАКРЫТИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

М. А. Никулин[1]

Изучается стационарное уравнение Шрёдингера в ограниченной двумя софокусными эллипсами области и в ее накрытиях. Для собственных значений оператора Лапласа установлен порядок их зависимости от малых значений расстояния между фокусами. Вычислены и приведены коэффициенты разложения собственных значений по степеням половины фокального расстояния до второго порядка включительно.

Ключевые слова: Функции Матьё, стационарное уравнение Шрёдингера, спектр оператора Лапласа, зависимость собственных значений от фокусного расстояния.

The stationary Schrödinger equation is studied in a domain bounded by two confocal ellipses and in its coverings. The order of dependence of the Laplace operator eigenvalues on sufficiently small distance between the foci is established. Coefficients of the power series expansion of said eigenvalues are obtained up to and including the square of half the focal distance.

Key words: Mathieu funtions, stationary Schrodinger equation, Laplace operator spectrum, eigenvalue dependence on focal distance.

1 Введение

Хорошо известно, что биллиард в ограниченной софокусными квадриками области интегрируем. Недавние работы А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной (см. [6–9], а также другие работы этих авторов) снова привлекли к этой теме внимание специалистов. В частности, в работе [6] изучались особенности биллиарда в кольце, ограниченном софокусными эллипсами. В настоящей работе рассматривается соответствующая квантовая система. А именно, мы изучаем спектр оператора Шрёдингера в этой области и её накрытиях. Мы получаем асимптотики собственных значений при стремящемся к нулю расстоянию между фокусами.

Заметим, что задача поиска собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа в круге с условием, что функция на границе круга равна нулю, является классической (см. [11, §200, стр. 262], [9]). Соответствующее уравнение расщепляется в полярных координатах, зависимость от угла описывается (ко)синусом, а зависимость от полярного радиуса — функцией Бесселя первого рода. В частности, собственные числа пропорциональны квадратам нулей функций Бесселя.

Аналогичная задача для эллипса расщепляется в эллиптических координатах и сводится к двум уравнениям Матьё: угловому и радиальному (необходимые сведения мы приведем в разделе 3).

Аналогичная задача в круговом кольце, ограниченном концентрическими окружностями, расщепляется в полярных координатах, и в определенном смысле аналогична задаче в диске. Отличие состоит в том, что в радиальном уравнении будут наложены другие граничные условия. Поэтому в решении появится линейная комбинация функций Бесселя первого и второго рода (этот результат тоже классический: см. [11, §207, стр. 276]).

Задача в конечнолистном накрытии кругового кольца является несложным обобщением предыдущей и решается теми же методами; для полноты мы приводим вывод собственных функций и собственных значений. Для накрытия кратности $p = 1$ результаты совпадают с классическими (для кругового кольца).

Наш основной результат касается конечнолистного накрытия эллиптического кольца, т. е. области, ограниченной двумя эллипсами с одинаковыми фокусами (см. теоремы 2 и 3). А именно, мы получаем асимптотики собственных значений в зависимости от расстояния между фокусами до второго порядка

[1] *Никулин Михаил Александрович* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ. Московский центр фундаментальной прикладной математики. e-mail: nikmihale@gmail.com.

Nikulin Mikhail Aleksandrovich — Postgraduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications. Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

включительно (это равносильно разложению по степеням эксцентриситета внутреннего или внешнего эллипса). Для совпадающих фокусов (для нулевого эксцентриситета) результаты совпадают с формулами для накрытия кругового кольца (см. теорему 1).

2 Модельная задача

Прежде чем переходить к основному результату статьи, рассмотрим небольшое обобщение классической задачи. Пусть Ω — область, p–листно накрывающая кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями радиусов $0 < r_0 < r_1$. Случай $p = 1$ относится к классической теории колебаний, см. [11]. Будем считать, что обе окружности имеют центр в начале координат. В области Ω удобно рассматривать аналог полярных координат: расстояние r до начала координат и угол φ, определенный $\mod 2\pi p$. В Ω рассмотрим стационарное уравнение Шрёдингера

$$\hat{H}\psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(r)\right)\psi = E\psi, \tag{1}$$

здесь потенциал $V(r)$ внутри области Ω равен 0, а вне ее обращается в бесконечность. Такая задача равносильна поиску собственных функций и собственных значений оператора Лапласа в области Ω для функций, обращающихся в 0 на границе Ω. Положим $\varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$. Далее J_ν и Y_ν — функции Бесселя первого и второго рода, соответственно.

Теорема 1.*[для $p = 1$, например, см. 10, стр. 165.] В области Ω (p-листном накрытии кругового кольца) собственные функции $\psi_{k,m}(r,\varphi)$ и собственные значения $E_{k,m}$ оператора $\hat{H}$ имеют вид*

$$\psi_{k,m}(r,\varphi) = \left[Y_\nu(\alpha_{k,\nu})J_\nu\left(\frac{\alpha_{k,\nu}r}{r_0}\right) - Y_\nu\left(\frac{\alpha_{k,\nu}r}{r_0}\right)J_\nu(\alpha_{k,\nu})\right]\cos(\nu\varphi+\varphi_0), \quad E_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2\hbar^2}{2M}, \tag{2}$$

где $\nu = \frac{m}{p}$, $\lambda = \frac{r_1}{r_0}$, $\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2}, k,m \in \mathbb{N}$, $\alpha_{k,\nu}$ — k-ый нуль функции $f(x) = Y_\nu(x)J_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)J_\nu(x)$.

Доказательство. Запишем искомую функцию в виде $\psi(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, тогда уравнение $(\nabla^2 + \varkappa^2)\psi = 0$ приобретает вид $\frac{R(r)\Phi''(\varphi)}{r^2} + \frac{R'(r)\Phi(\varphi)}{r} + \Phi(\varphi)R''(r) + \varkappa^2 R(r)\Phi(\varphi) = 0$. Умножим обе части уравнения на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$:

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} + \frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \varkappa^2r^2 = 0. \tag{3}$$

Введем разделяющий параметр ν и получим два уравнения (далее переменные явно не указываем, подразумевая, что $\Phi = \Phi(\varphi), R = R(r)$):

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi''}{\Phi} = -\nu^2, \\ \dfrac{rR'}{R} + \dfrac{r^2R''}{R} + \varkappa^2r^2 = \nu^2. \end{cases} \tag{4}$$

Решением углового уравнения является функция $\Phi(\varphi) = \cos(\nu\varphi + \varphi_0)$ для некоторого вещественного φ_0. Из условия периодичности $\Phi(0) = \Phi(2\pi p)$ следует, что $\nu = \frac{m}{p}$, где m — произвольное неотрицательное целое число.

Решение радиального уравнения ищется в виде линейной комбинации функций Бесселя первого и второго рода [2, §9, p. 358]:

$$R(r) = AJ_\nu(\varkappa r) + BY_\nu(\varkappa r). \tag{5}$$

Из граничного условия $R(r_0) = 0$ установим значения констант: $A = Y_\nu(\varkappa r_0), B = -J_\nu(\varkappa r_0)$ (либо пропорциональные им).

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = Y_\nu(x)J_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)J_\nu(x)$, где $\lambda = \frac{r_1}{r_0}$. Тогда граничное условие $R(r_1) = Y_\nu(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) - J_\nu(\varkappa r_0)Y_\nu(\varkappa r_1) = 0$ можно записать в виде $f(\varkappa r_0) = 0$. Обозначим k–ый положительный нуль этой функции через $\alpha_{k,\nu}$ (см. также нижеследующую лемму 1). Тогда $\varkappa r_0 = \alpha_{k,\nu}$ для какого-то k, откуда следует, что $\varkappa$ может принимать только значения $\varkappa_{k,m}^2$, приведенные в формулировке теоремы. □

Лемма 1. *[3][2, §9.5, стр. 374] Асимптотически m–тый положительный нуль $\alpha_{m,\nu}$ функции $f(x) = Y_\nu(x)J_\nu(\lambda x) - Y_\nu(\lambda x)J_\nu(x)$ при $m \to \infty$ ведет себя как*

$$\alpha_{m,\nu} = \sigma + \frac{\chi}{\sigma} + \frac{\omega - \chi^2}{\sigma^3} + \frac{\eta - 4\chi\omega + 2\chi^3}{\sigma^5} + \dots, \tag{6}$$

где $\mu = 4\nu^2$, $\sigma = \frac{\pi m}{\lambda - 1}$, $\chi = \frac{\mu - 1}{8\lambda}$, $\omega = \frac{(\mu-1)(\mu-25)(\lambda^3-1)}{6(4\lambda)^3(\lambda-1)}$, $\eta = \frac{(\mu-1)(\mu^2-114\mu+1073)(\lambda^5-1)}{5(4\lambda)^5(\lambda-1)}$. □

3 Предварительные сведения

3.1 Разделение переменных в уравнении в эллипсе

Рассмотрим область, ограниченную эллипсом с большой и малой полуосями, соответственно равными w и h. Обозначим половину расстояния между фокусами эллипса через $\delta = \sqrt{w^2 - h^2}$. Введем эллиптические координаты ρ, φ, $\rho \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, где

$$(x, y) = (\delta \cosh \rho \cos \varphi, \delta \sinh \rho \sin \varphi). \tag{7}$$

Они регулярны вне отрезка, соединяющего фокусы $(\pm\delta, 0)$. Рассматриваемая область задается неравенством $0 \leqslant \rho \leqslant arccosh(\frac{w}{\delta})$. При фиксированном $w = r_0$ и $\delta \to 0$ область «стремится» к кругу радиуса r_0.

В этой системе координат оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}{\delta^2(\cosh^2 \rho - \cos^2 \varphi)} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}{\frac{\delta^2}{2}(\cosh 2\rho - \cos 2\varphi)}. \tag{8}$$

Стационарное уравнение Шрёдингера переписывается как

$$\nabla^2 \psi + \varkappa^2 \psi = 0, \text{ где } \varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2} \tag{9}$$

с условием, что ψ на границе области обращается в 0. Разделяя переменные $\psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, приведем уравнение к виду

$$\Phi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R + R \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi + \frac{(\varkappa\delta)^2}{2}(\cosh 2\rho - \cos 2\varphi) R\Phi = 0. \tag{10}$$

В скобках добавим и вычтем разделяющий параметр $\frac{2a}{(\varkappa\delta)^2}$, получим *уравнения Матьё*, в которых $q = \frac{(\varkappa\delta)^2}{4}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Phi + (a - 2q\cos 2\varphi)\Phi = 0 & \textit{(угловое уравнение Матьё)}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}R - (a - 2q\cosh 2\rho)R = 0 & \textit{(радиальное уравнение Матьё)}. \end{cases} \tag{11}$$

3.2 Некоторые свойства функций Матьё

Рассмотрим угловое уравнение Матьё $\frac{d^2}{dz^2}\Phi(z) + (a - 2q\cos 2z)\Phi(z) = 0$. Поскольку коэффициенты углового уравнения Матьё периодичны по z, по теореме Флоке [2] существует решение в виде $F_\nu(z) = e^{i\nu z}P(z)$, где ν зависит от параметров a и q, а функция $P(z)$ имеет тот же период π, что и коэффициенты уравнения. Постоянную ν называют характеристической экспонентой. При $\nu \notin \mathbb{Z}$ функции $F_\nu(z)$ и $F_\nu(-z)$ являются независимыми решениями дифференциального уравнения. При $\nu \in \mathbb{Z}$ функции $F_\nu(z)$ и $F_\nu(-z)$ являются пропорциональными и имеют период π или 2π, см. [2].

Согласно теории Штурма, при $q \neq 0$ возможно существование не более чем одного периодического решения с периодом π или 2π. В зависимости от чётности и периода этого решения, параметр[3] a относится к одному из двух типов:

$$a = \left[\begin{array}{ll} a_\nu(q), & \nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \\ b_{-\nu}(q), & -\nu \in \mathbb{N}, \end{array}\right. \tag{12}$$

более точно $(n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ (см. таблицу 1).

a	Периодическое решение углового уравнения Матьё[4]	Период	Четность функции
$a_{2n}(q)$	$ce_{2n}(z,q)$	период π	четная
$a_{2n+1}(q)$	$ce_{2n+1}(z,q)$	антипериод[5] π	четная
$b_{2n+1}(q)$	$se_{2n+1}(z,q)$	антипериод π	нечетная
$b_{2n+2}(q)$	$se_{2n+2}(z,q)$	период π	нечетная

Таблица 1: Периодические функции Матьё целого порядка.

a	Периодическое решение углового уравнения Матьё	Период	Четность функции
$\lambda_\nu(q)$	$ce_\nu(z,q)$	период πp	четная
$\lambda_\nu(q)$	$se_\nu(z,q)$	антипериод πp	нечетная

Таблица 2: Периодические функции Матьё нецелого порядка ν.

Отдельно выделяют также третий тип, $a = \lambda_\nu(q), \nu \notin \mathbb{Z}$, которому соответствуют функции Матьё нецелого порядка $ce_\nu(z,q), se_\nu(z,q)$. В общем случае при $\nu \notin \mathbb{Q}$ обе функции являются непериодическими, однако для $\nu \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \nu = \frac{n}{p}$, обе имеют период не более $2\pi p$. Таблица 1 для $\nu = \frac{n}{p}$ может быть продолжена (см. таблицу 2).

Смысл параметра ν становится понятным при подстановке $q = 0$ в угловое уравнение Матьё (11). В этом случае угловая функция получается той же, что и в случае диска, следовательно, $\lambda_\nu(0) = \nu^2, ce_\nu(z,0) = \cos(\nu z), se_\nu(z,0) = \sin(\nu z)$.

Ряды Фурье для угловых функций Матьё сходятся равномерно и абсолютно на всех компактных множествах в комплексной плоскости. В приведенных ниже формулах предполагается $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ll}
ce_{2n}(z,q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{2n}(q)\cos 2mz, & ce_{2n+1}(z,q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2n+1}(q)\cos(2m+1)z,\\
se_{2n+1}(z,q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{2n+1}(q)\sin(2m+1)z, & se_{2n+2}(z,q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}^{2n+2}(q)\sin(2m+2)z,\\
ce_\nu(z,q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m}^{\nu}(q)\cos(\nu+2m)z, & se_\nu(z,q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m}^{\nu}(q)\sin(\nu+2m)z.
\end{array} \quad (13)$$

Коэффициенты A_k^l, B_k^l, c_k^ν удовлетворяют определенным рекуррентным соотношениям, см. [2].

Теперь обратимся к радиальным функциям Матьё. Радиальные функции Матьё первого рода и целого порядка определяются как $Ce_n(z,q) = ce_n(\pm iz,q)$, $Se_n(z,q) = \mp i se_n(\pm iz,q)$, например, см. [1]. Для них и для радиальной функции нецелого порядка $M_\nu^{(1)}(z,q)$ имеют место разложения по функциям Бесселя первого рода (здесь равенство понимается с точностью до умножения на не зависящую от z постоянную, не важную в целях настоящей работы):

$$\begin{array}{ll}
Ce_{2n}(z,q) \propto \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A_{2m}^{2n}(q) J_{2m}(x), & Ce_{2n+1}(z,q) \propto \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1} A_{2m+1}^{2n+1}(q) J_{2m+1}(x)\\
Se_{2n}(z,q) \propto \tanh z \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m 2m B_{2m}^{2n}(q) J_{2m}(x), & Se_{2n+1}(z,q) \propto \tanh z \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m (2m+1) B_{2m+1}^{2n+1}(q) J_{2m+1}(x)\\
M_\nu^{(1)}(z,q) \propto \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m c_{2m}^{\nu}(q) J_{\nu+2m}(x), & \text{везде для краткости } x = 2\sqrt{q}\cosh z.
\end{array} \quad (14)$$

Здесь коэффициенты A_k^l, B_k^l, c_k^ν те же, что и в разложении функций $ce_l(z,q), se_l(z,q), ce_\nu(z,q)$ в ряды Фурье [см. 1, VIII, стр. 158—169]. Заменой функций Бесселя первого рода $J_m(x)$ на функции Бесселя второго рода $Y_m(x)$ в вышеизложенных формулах можно получить независимые решения соответствующих уравнений. Так, для радиальных функций первого рода целого порядка $Ce_n(z,q)$ получается второе

[3] Можно рассмотреть уравнение Матьё как задачу на собственные значения и собственные функции оператора $D(y) = \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2q\cos(2x)y$ (или оператора $D(y) = \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2q\cosh(2x)y$). Поэтому в литературе a часто называют собственными значениями.

[4] В таблице 1 приведены только собственные функции периода π или 2π.

[5] Антипериод π: $f(x+\pi) = -f(x)$

решение $Fey_n(z,q)$, а для функций $Se_n(z,q)$ такое второе решение обозначают как $Gey_n(z,q)$ [см. 1, VIII, §8.11-13]. Из того же соображения применительно к $M_\nu^{(1)}(z,q)$ появляется независимое решение $M_\nu^{(2)}(z,q)$ для случая нецелого порядка.

4 Основной результат

Рассмотрим область («эллиптическое кольцо»), ограниченную двумя эллипсами с длинными полуосями $0 < r_0 < r_1$ и с общими фокусами в точках $(\pm\delta, 0)$. В эллиптических координатах (ρ,φ) эта область задается неравенствами $\rho_0 = arccosh(\frac{r_0}{\delta}) \leqslant \rho \leqslant arccosh(\frac{r_1}{\delta}) = \rho_1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Для p–листного накрытия Ω_δ эллиптического кольца неравенство на угловую координату другое: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi p$. Для удобства введем $\varkappa^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$.

Мы хотим получить решения стационарного уравнения Шредингера в p-листном накрытии Ω_δ, а также асимптотику соответствующих уровней энергии при фокусном расстоянии 2δ, стремящемся к 0.

Теорема 2. *В области Ω_δ (p–листном накрытии эллиптического кольца) собственные функции $\psi_{k,m}(\rho,\varphi)$ и собственные значения $E_{k,m}$ оператора $\hat{H}$ имеют вид*

$$\psi_{k,m}(\rho,\varphi) = \left[\begin{array}{l} \Big[Ce_\nu(\rho_0,q)Fey_\nu(\rho,q) - Ce_\nu(\rho,q)Fey_\nu(\rho_0,q)\Big]ce_\nu(\varphi,q)\Big|_{q=\beta_{k,\nu}}, \\ \qquad E_{k,m} = \dfrac{\varkappa_{k,m}^2\hbar^2}{2M}, \nu \in \{0\}\cup\mathbb{N} \\ \Big[Se_{-\nu}(\rho_0,q)Gey_{-\nu}(\rho,q) - Se_{-\nu}(\rho,q)Gey_{-\nu}(\rho_0,q)\Big]se_{-\nu}(\varphi,q)\Big|_{q=\beta_{k,\nu}}, \\ \qquad E_{k,m} = \dfrac{\varkappa_{k,m}^2\hbar^2}{2M}, -\nu \in \mathbb{N} \\ \Big[M_\nu^{(1)}(\rho_0,q)M_\nu^{(2)}(\rho,q) - M_\nu^{(1)}(\rho,q)M_\nu^{(2)}(\rho_0,q)\Big](A_1ce_\nu(\varphi,q) + A_2se_\nu(\varphi,q))\Big|_{q=\beta_{k,\nu}}, \\ \qquad E_{k,m} = \dfrac{\varkappa_{k,m}^2\hbar^2}{2M}, \textit{иначе}, \end{array}\right. \tag{15}$$

где $\nu = \frac{m}{p}$, $\varkappa_{k,m}^2 = \frac{4\beta_{k,\nu}}{\delta^2}, k, m \in \mathbb{N}$, $\beta_{k,\nu}$ — k-ый нуль функции

$$f(q) = \left[\begin{array}{ll} Ce_\nu(\rho_0,q)Fey_\nu(\rho_1,q) - Ce_\nu(\rho_1,q)Fey_\nu(\rho_0,q) & \nu \in \{0\}\cup\mathbb{N} \\ Se_{-\nu}(\rho_0,q)Gey_{-\nu}(\rho_1,q) - Se_{-\nu}(\rho_1,q)Gey_{-\nu}(\rho_0,q), & -\nu \in \mathbb{N} \\ M_\nu^{(1)}(\rho_0,q)M_\nu^{(2)}(\rho_1,q) - M_\nu^{(1)}(\rho_1,q)M_\nu^{(2)}(\rho_0,q), & \textit{иначе.} \end{array}\right. \tag{16}$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения $\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi = E\psi$ в виде $\psi(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, где ρ и φ — эллиптические координаты. Тогда R и Φ являются решениями уравнений Матьё

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi + (a - 2q\cos 2\varphi)\Phi = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}R - (a - 2q\cosh 2\rho)R = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $q = \frac{(\varkappa\delta)^2}{4}$ и a — разделяющая переменная. Для начала рассмотрим угловое уравнение Матьё и определим, при каких a условие $\Phi(0) = \Phi(2\pi p)$ выполнено.

По теореме Флоке для некоторого ν существует решение $\Phi_\nu(\varphi)$ уравнения Матьё такое, что $\Phi_\nu(\varphi + 2\pi p) = e^{2i\pi p\nu}\Phi_\nu(\varphi)$. В случае p–листного накрытия необходимо наложить условие периодичности $\Phi_\nu(0) = \Phi_\nu(2\pi p)$. Следовательно, $e^{2i\pi p\nu} = 1$. Откуда, $p\nu = m \in \mathbb{Z}$ и, таким образом, $\nu = \frac{m}{p}$, где $m \in \mathbb{Z}$. Положим $\Phi(\varphi) = \Phi_\nu(\varphi)$.

Обозначим через $R_1(\rho,q), R_2(\rho,q)$ два независимых решения радиального уравнения Матьё (17), оба из которых зависят от параметра q. Решением (17) является и их линейная комбинация $R(\rho,q) =$

$AR_1(\rho, q) + BR_2(\rho, q)$. Из условия $R(\rho_0, q) = 0$ установим значения констант: $A = R_2(\rho_0, q), B = -R_1(\rho_0, q)$ (либо пропорциональные им). Теперь рассмотрим функцию $f(q) = R_2(\rho_0, q)R_1(\rho_1, q) - R_1(\rho_0, q)R_2(\rho_1, q)$, в зависимости от значения ν это одна из функций (16). Тогда условие $R(\rho_1, q) = 0$ можно записать как $f(q) = 0$. Обозначим k–ый положительный нуль этой функции через $\beta_{k,\nu}$, тогда $q = \beta_{k,\nu}$ для какого-то k, откуда следует, что $\varkappa^2 = \frac{4q}{\delta^2}$ может принимать только значения $\varkappa^2_{k,m}$, приведенные в формулировке теоремы.

В завершение доказательства остается только привести явный вид функций $\Phi(\varphi), R(\rho)$. В зависимости от значения $\nu = \frac{m}{p}$ разделяющий параметр a в системе дифференциальных уравнений (17) относится к одному из трех типов:

$$a = \begin{cases} a_\nu(q), & \nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \\ b_{-\nu}(q), & -\nu \in \mathbb{N}, \\ \lambda_\nu(q), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{18}$$

Периодическими угловыми решениями в первых двух случаях являются функции, описанные в таблице 1, они и будут функциями $\Phi(\varphi)$ в зависимости от значения ν.

Радиальные функции получаются в виде линейных комбинаций радиальных функций Матьё целого порядка. В качестве $R_1(\rho, q)$ возьмем радиальные функции Матьё первого рода (14): $Ce_\nu(\rho, q)$ при $\nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $Se_\nu(\rho, q)$ при $-\nu \in \mathbb{N}$. Независимыми решениями $R_2(\rho, q)$ для этих двух случаев являются $Fey_\nu(\rho, q)$ и $Gey_\nu(\rho, q)$, соответственно.

В случае $\nu = \frac{m_1}{m_2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ обе угловые функции $ce_\nu(\varphi, q), se_\nu(\varphi, q)$ являются периодическими и имеют период не более $2\pi m_2$ (см. [2]), поэтому в качестве $\Phi(\varphi)$ подходит в том числе их линейная комбинация. Решение радиального уравнения Матьё представляется в виде линейной комбинацией функций $Ce_\nu(\rho, q)$ и $Se_\nu(\rho, q)$. Однако в следующей теореме будет удобнее использовать линейную комбинацию функций $M^{(1)}_\nu(\rho, q), M^{(2)}_\nu(\rho, q)$ [см. 5, §28.23], [см. 12, 2.4, p. 165], также образующих фундаментальную систему. $\square$

Введем функцию

$$W_{a,b}(u) = Y_a(u)J_b(\lambda u) - Y_a(\lambda u)J_b(u), \quad \lambda = \frac{r_1}{r_0}. \tag{19}$$

Теорема 3. *Обозначим* $\nu = \frac{m}{p}, m \in \mathbb{Z}$. *Значение* $\varkappa^2_{k,m}(\delta), k \in \mathbb{N}$, *зависит от половины фокусного расстояния* δ *с точностью до* $o(\delta^2)$ *как*

$$\varkappa^2_{k,m}(\delta) = \begin{cases} \frac{\alpha^2_{k,\nu}}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha^3_{k,\nu}}{8\nu r_0^4} \left.\frac{\frac{\nu-2}{\nu-1}(W_{\nu-2,\nu}(u)+W_{\nu,\nu-2}(u)) - \frac{\nu+2}{\nu+1}(W_{\nu+2,\nu}(u)+W_{\nu,\nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} & -\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}, \\ \frac{\alpha^2_{k,2}}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha^3_{k,2}}{12 r_0^4} \left.\frac{(W_{4,2}(u)+W_{2,4}(u))}{\frac{\partial W_{2,2}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,2}} & -\nu = 2, \\ \frac{\alpha^2_{k,1}}{r_0^2} - \delta^2 \frac{3\alpha^3_{k,1}}{16 r_0^4} \left.\frac{(W_{3,1}(u)+W_{1,3}(u))}{\frac{\partial W_{1,1}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,1}} & -\nu = 1, \\ \frac{\alpha^2_{k,0}}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha^3_{k,0}}{4 r_0^4} \left.\frac{(W_{2,0}(u)+W_{0,2}(u))}{\frac{\partial W_{0,0}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,0}} & \nu = 0, \\ \frac{\alpha^2_{k,1}}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha^3_{k,1}}{16 r_0^4} \left.\frac{(W_{3,1}(u)+W_{1,3}(u))}{\frac{\partial W_{1,1}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,1}} & \nu = 1, \\ \frac{\alpha^2_{k,\nu}}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha^3_{k,\nu}}{2 r_0^4} \left.\frac{\frac{1}{4(\nu-1)}(W_{\nu-2,\nu}(u)+W_{\nu,\nu-2}(u)) - \frac{1}{4(\nu+1)}(W_{\nu+2,\nu}(u)+W_{\nu,\nu+2}(u))}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} & \begin{cases} \nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \\ \nu \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \end{cases} \tag{20}$$

Замечание. Это равносильно разложению по эксцентриситету ε_s внутреннего или внешнего эллипса с большой полуосью $r_s, s = 0, 1$, которое получается из подстановки $\delta = \varepsilon_s r_s$.

Замечание. Случай $\delta = 0$ соответствует накрытию кругового кольца. Легко видеть, что в этом случае результат теоремы 3 (т.е. нулевые члены разложений) после умножения на $\frac{\hbar^2}{2M}$ соответствует результату теоремы 1.

Замечание. Производная $\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}$ допускает выражение через функции Бесселя первого и второго рода. Имеем тождества, см. [5]: $2\frac{\partial Y_\nu(u)}{\partial u} = Y_{\nu-1}(u) - Y_{\nu+1}(u)$, $2\frac{\partial J_\nu(u)}{\partial u} = J_{\nu-1}(u) - J_{\nu+1}(u)$. Непосредственным дифференцированием $W_{\nu,\nu}(u)$ получаем

$$\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u} = \lambda(Y_\nu(u)J_{\nu-1}(\lambda u) + Y_{\nu+1}(\lambda u)J_\nu(u)) - (Y_\nu(\lambda u)J_{\nu-1}(u) + Y_{\nu+1}(u)J_\nu(\lambda u)).$$

Доказательство.

По предыдущей теореме собственные значения $E_{k,m}$ оператора $\hat{H}$, а следовательно, числа $\varkappa_{k,m}^2 = \varkappa_{k,m}^2(\delta)$, связаны с нулями $\beta_{k,\nu}$ функции $f(q)$. Здесь функция $f(q)$ имеет один из трех возможных видов, см. (16).

Приведем две леммы, с помощью которых докажем (20).

Пусть $\nu = \frac{m}{p}, m \geqslant 0, a = \lambda_\nu(q), q = \frac{\varkappa^2\delta^2}{4}$ и пусть $ce_\nu(\varphi, q)$ – чётное решение углового уравнения Матьё с указанными параметрами a, q. Напомним, что для малых q справедливо разложение см. [12, §2.2, стр. 122—124]

$$ce_\nu(\varphi, q) = c_\nu \cos\nu\varphi + qc_{\nu+2}\cos(\nu+2)\varphi + qc_{\nu-2}\cos(\nu-2)\varphi + o(q). \tag{21}$$

Возможные значения $\varkappa^2$ определяются из условия обращения в нуль радиальной функции Матьё на граничных эллипсах. А именно, положим $R(\rho)$ — решение радиального уравнения Матьё с этими же параметрами и граничным условием $R(\rho_0) = R(\rho_1) = 0$, $\rho_0 < \rho_1$.

Лемма 2. *Пусть $r_0 = \delta\cosh\rho_0, r_1 = \delta\cosh\rho_1, \lambda = \frac{r_1}{r_0}$, $\alpha_{k,\nu}$ — k–тый нуль функции $W_{\nu,\nu}(u)$. Тогда $\varkappa^2$ при малых δ имеет вид*

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{2c_\nu r_0^4}\left.\frac{c_{\nu+2}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right) + c_{\nu-2}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{22}$$

Доказательство. При $a = \lambda_\nu(q), \nu = \frac{m}{p}, m \geqslant 0$ коэффициенты разложения Фурье четной угловой функции Матьё $ce_\nu(\varphi, q)$ связаны [2] с точностью до постоянного множителя с разложением радиальной функции Матьё $R_1(\rho, q) = \left[\begin{array}{l} Ce_\nu(\rho, q),\ \nu \in \{0\}\cup\mathbb{N} \\ M_\nu^{(1)}(\rho, q), \nu \notin \mathbb{Z}\end{array}\right.$ в бесконечную сумму функций Бесселя следующим образом:

$$R_1(\rho, q) = c_\nu J_\nu(2\sqrt{q}\cosh\rho) - qc_{\nu-2}J_{\nu-2}(2\sqrt{q}\cosh\rho) - qc_{\nu+2}J_{\nu+2}(2\sqrt{q}\cosh\rho) + o(q). \tag{23}$$

Второе решение $R_2(\rho, q)$ радиального уравнения Матьё можно получить из $R_1(\rho, q)$ заменой функций Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ на функции Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$. В частности, это будут функции $Fey_\nu(\rho, q)$ при $\nu \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ и $M_\nu^{(2)}(\rho, q)$ при $\nu \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \nu \geqslant 0$.

Напомним граничное условие $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$. Заметим, что аргументы имеют вид $2\sqrt{q}\cosh\rho_s = 2\sqrt{\frac{\varkappa^2\delta^2}{4}}\frac{r_s}{\delta} = \varkappa r_s, s = 0, 1$. Рассмотрим первое слагаемое в граничном условии:

$$\begin{gathered} R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) = \\ (c_\nu Y_\nu(\varkappa r_0) - qc_{\nu-2}Y_{\nu-2}(\varkappa r_0) - qc_{\nu+2}Y_{\nu+2}(\varkappa r_0) + o(q))\,(c_\nu J_\nu(\varkappa r_1) - qc_{\nu-2}J_{\nu-2}(\varkappa r_1) - qc_{\nu+2}J_{\nu+2}(\varkappa r_1) + o(q)) = \\ c_\nu^2 Y_\nu(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) - qc_\nu\Big(c_{\nu-2}\left(Y_{\nu-2}(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0)J_{\nu-2}(\varkappa r_1)\right) + \\ c_{\nu+2}\left(Y_{\nu+2}(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0)J_{\nu+2}(\varkappa r_1)\right)\Big) + o(q). \end{gathered} \tag{24}$$

Разделим обе части выражения на c_ν^2, для удобства определим $u = \varkappa r_0, \lambda = \frac{r_1}{r_0}, \varkappa r_1 = \lambda u$. Запишем полное выражение $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$: поскольку слагаемые отличаются друг от друга только перестановкой аргументов u и λu, использование формулы (24) приведет к появлению функций (19). Таким образом,

$$\begin{gathered} 0 = R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = \\ W_{\nu,\nu}(u) - q\left(\frac{c_{\nu-2}}{c_\nu}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)\right) + o(q). \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть $\alpha_{k,\nu}$ — k–тый ноль функции $W_{\nu,\nu}(u)$. Тогда в достаточно малой его окрестности справедливо

$$W_{\nu,\nu}(u) = (u-\alpha_{k,\nu})\left.\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + \frac{(u-\alpha_{k,\nu})^2}{2}\left.\frac{\partial^2 W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u^2}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o((u-\alpha_{k,\nu})^2). \tag{26}$$

Положим $u = \alpha_{k,\nu} + u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta^2)$ и подставим $q = \frac{\varkappa^2\delta^2}{4} = \frac{u^2\delta^2}{4r_0^2}$ в выражение (25):

$$(u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta^2))\left.\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + \frac{u_1^2\delta^2 + o(\delta^2)}{2}\left.\frac{\partial^2 W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u^2}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} -$$
$$-\frac{\alpha_{k,\nu}^2\delta^2 + o(\delta^2)}{4r_0^2}\left[\left.\left(\frac{c_{\nu-2}}{c_\nu}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)\right)\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta)\right] + o(\delta^2) = 0. \tag{27}$$

Поскольку равенство должно выполняться при каждой степени δ, получаем, в первую очередь, $u_1 = 0$, затем, приравнивая коэффициенты при δ^2:

$$u_2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{4r_0^2}\left.\frac{\left(\frac{c_{\nu-2}}{c_\nu}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}}. \tag{28}$$

Таким образом,

$$u = \alpha_{k,\nu} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^2}{4r_0^2}\left.\frac{\left(\frac{c_{\nu-2}}{c_\nu}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + \frac{c_{\nu+2}}{c_\nu}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2), \tag{29}$$

поскольку $u = \varkappa r_0$, получаем

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{2c_\nu r_0^4}\left.\frac{c_{\nu+2}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right) + c_{\nu-2}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{30}$$

Лемма доказана.

Пусть $a = \lambda_{-\nu}(q), \nu \in \mathbb{N}, q = \frac{\varkappa^2\delta^2}{4}$ и пусть $se_\nu(\varphi, q)$ – нечётное решение углового уравнения Матьё с указанными параметрами a, q. Напомним, что для малых q справедливо разложение, см. [12, §2.2, p. 122-124]:

$$se_\nu(\varphi, q) = c_\nu \sin\nu\varphi + qc_{\nu+2}\sin(\nu+2)\varphi + qc_{\nu-2}\sin(\nu-2)\varphi + o(q). \tag{31}$$

Возможные значения $\varkappa^2$ определяются из условия обращения в нуль радиальной функции Матьё на граничных эллипсах. А именно, положим $R(\rho)$ — решение радиального уравнения Матьё с этими же параметрами и граничным условием $R(\rho_0) = R(\rho_1) = 0$, $\rho_0 < \rho_1$.

Лемма 3. *Тогда, в обозначениях $r_0 = \delta\cosh\rho_0, r_1 = \delta\cosh\rho_1, \lambda = \frac{r_1}{r_0}$, $\alpha_{k,\nu}$ — k–тый ноль функции $W_{\nu,\nu}(u)$, $\varkappa^2$ зависит от δ как*

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{2\nu c_\nu r_0^4}\left.\frac{(\nu-2)c_{\nu-2}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + (\nu+2)c_{\nu+2}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{32}$$

Доказательство. При $a = \lambda_{-\nu}(q), \nu \in \mathbb{N}$ коэффициенты разложения Фурье нечетной угловой функции Матьё $se_\nu(\varphi, q)$ связаны [2] с точностью до постоянного множителя с разложением радиальной функции Матьё $Se_\nu(\rho, q)$ в бесконечную сумму функций Бесселя следующим образом:

$$Se_\nu(\rho, q) = \nu c_\nu J_\nu(2\sqrt{q}\cosh\rho) - q(\nu-2)c_{\nu-2}J_{\nu-2}(2\sqrt{q}\cosh\rho) - q(\nu+2)c_{\nu+2}J_{\nu+2}(2\sqrt{q}\cosh\rho) + o(q). \tag{33}$$

Второе решение радиального уравнения Матьё $R_2(\rho) = Gey_\nu(\rho, q)$ можно получить из $R_1(\rho) = Se_\nu(\rho, q)$ заменой функций Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ на функции Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$.

В граничном условии $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$ аргументы имеют вид $2\sqrt{q}\cosh\rho_s = 2\sqrt{\frac{\varkappa^2\delta^2}{4}}\frac{r_s}{\delta} = \varkappa r_s, s = 0, 1$. Рассмотрим первое слагаемое:

$$
\begin{aligned}
&R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) = \\
&\quad (\nu c_\nu Y_\nu(\varkappa r_0) - q(\nu-2)c_{\nu-2}Y_{\nu-2}(\varkappa r_0) - q(\nu+2)c_{\nu+2}Y_{\nu+2}(\varkappa r_0) + o(q)) \\
&\quad (\nu c_\nu J_\nu(\varkappa r_1) - q(\nu-2)c_{\nu-2}J_{\nu-2}(\varkappa r_1) - q(\nu+2)c_{\nu+2}J_{\nu+2}(\varkappa r_1) + o(q)) = \\
&\quad \nu^2 c_\nu^2 Y_\nu(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) - q\nu c_\nu \Big((\nu-2)c_{\nu-2}\left(Y_{\nu-2}(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0)J_{\nu-2}(\varkappa r_1)\right) + \\
&\quad (\nu+2)c_{\nu+2}\left(Y_{\nu+2}(\varkappa r_0)J_\nu(\varkappa r_1) + Y_\nu(\varkappa r_0)J_{\nu+2}(\varkappa r_1)\right)\Big) + o(q). \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Разделим обе части выражения на $\nu^2 c_\nu^2$, для удобства определим $u = \varkappa r_0, \lambda = \frac{r_1}{r_0}\varkappa r_1 = \lambda u$. Запишем полное выражение $R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = 0$ тем же способом, что и в лемме 2:

$$
\begin{aligned}
&0 = R_2(\rho_0)R_1(\rho_1) - R_2(\rho_1)R_1(\rho_0) = \\
&\quad W_{\nu,\nu}(u) - \frac{q}{\nu c_\nu}\Big((\nu-2)c_{\nu-2}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + \\
&\quad (\nu+2)c_{\nu+2}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)\Big) + o(q). \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Пусть $\alpha_{k,\nu}$ — k–ый нуль функции $W_{\nu,\nu}(u)$. Тогда в достаточно малой его окрестности справедливо

$$
W_{\nu,\nu}(u) = (u - \alpha_{k,\nu}) \left.\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + \frac{(u-\alpha_{k,\nu})^2}{2} \left.\frac{\partial^2 W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u^2}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o((u-\alpha_{k,\nu})^2). \qquad (36)
$$

Положим $u = \alpha_{k,\nu} + u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta)$ и подставим $q = \frac{\varkappa^2\delta^2}{4} = \frac{u^2\delta^2}{4r_0^2}$ в выражение (35):

$$
\begin{aligned}
&(u_1\delta + u_2\delta^2 + o(\delta^2)) \left.\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + \frac{u_1^2\delta^2 + o(\delta^2)}{2}\left.\frac{\partial^2 W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u^2}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} - \\
&\quad - \frac{\alpha_{k,\nu}^2\delta^2 + o(\delta^2)}{4r_0^2}\Bigg[\Bigg(\frac{(\nu-2)c_{\nu-2}}{\nu c_\nu}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + \\
&\quad \frac{(\nu+2)c_{\nu+2}}{\nu c_\nu}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)\Bigg)\Bigg|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta)\Bigg] + o(\delta^2) = 0. \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Приравнивая коэффициенты при каждой степени, получаем

$$
u = \alpha_{k,\nu} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^2}{4r_0^2}\frac{1}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\left(\frac{(\nu-2)c_{\nu-2}}{\nu c_\nu}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + \frac{(\nu+2)c_{\nu+2}}{\nu c_\nu}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)\right)\Bigg|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2), \qquad (38)
$$

откуда из определения $u = \varkappa r_0$ следует равенство

$$
\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{2\nu c_\nu r_0^4}\left.\frac{(\nu-2)c_{\nu-2}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) + (\nu+2)c_{\nu+2}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \qquad (39)
$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3.

4.1 Случай 1: $a = \lambda_\nu(q), \nu = \frac{m}{p}, m \geqslant 0$

В этом случае для малых q справедливо (см. [2]) представление четного решения углового уравнения Матьё $ce_\nu(\varphi, q)$ в виде

$$ce_\nu(\varphi, q) = \begin{bmatrix} \cos\nu\varphi + \frac{q}{4(\nu-1)}\cos(\nu-2)\varphi - \frac{q}{4(\nu+1)}\cos(\nu+2)\varphi + o(q), & \nu \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \text{ или } \nu \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z} \\ \cos\varphi - \frac{q}{8}\cos 3\varphi + o(q), & \nu = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q}{2}\cos 2\varphi + o(q), & \nu = 0. \end{bmatrix} \tag{40}$$

Пусть $\nu \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ **или** $\nu \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$**.** Тогда $c_\nu = 1, c_{\nu+2} = \frac{-1}{4(\nu+1)}, c_{\nu-2} = \frac{1}{4(\nu-1)}$. Применим лемму 2:

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{2r_0^4}\left.\frac{\frac{1}{4(\nu-1)}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) - \frac{1}{4(\nu+1)}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{41}$$

Пусть $\nu = 1$**.** Тогда $c_\nu = 1, c_{\nu+2} = \frac{-1}{8}, c_{\nu-2} = 0$, из леммы 2 получаем

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} - \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{16r_0^4}\left.\frac{\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{42}$$

Пусть $\nu = 0$**.** Тогда $c_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_{\nu+2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}, c_{\nu-2} = 0$, по лемме 2:

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} - \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{4r_0^4}\left.\frac{\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{43}$$

4.2 Случай 2: $a = \lambda_{-\nu}(q), \nu \in \mathbb{N}$

В этом случае для малых q справедливо (см. [2]) представление нечётного решения $se_\nu(\varphi, q)$ углового уравнения Матьё в виде

$$se_\nu(\varphi, q) = \begin{bmatrix} \sin\nu\varphi + \frac{q}{4(\nu-1)}\sin(\nu-2)\varphi - \frac{q}{4(\nu+1)}\sin(\nu+2)\varphi + o(q), & \nu \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\} \\ \sin 2\varphi - \frac{q}{12}\sin 4\varphi + o(q), & \nu = 2 \\ \sin\varphi - \frac{q}{8}\sin 3\varphi + o(q), & \nu = 1. \end{bmatrix} \tag{44}$$

Пусть $\nu \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$**.** Тогда $c_\nu = 1, c_{\nu-2} = \frac{1}{4(\nu-1)}, c_{\nu+2} = \frac{-1}{4(\nu+1)}$, и из леммы 3 получим

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} + \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3}{8\nu r_0^4}\left.\frac{\frac{\nu-2}{\nu-1}\left(W_{\nu-2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu-2}(u)\right) - \frac{\nu+2}{\nu+1}\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{45}$$

Пусть $\nu = 2$**.** Тогда $c_\nu = 1, c_{\nu-2} = 0, c_{\nu+2} = \frac{-1}{12}$, из леммы 3:

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} - \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3(\nu+2)}{24\nu r_0^4}\left.\frac{\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{46}$$

Пусть $\nu = 1$**.** Тогда $c_\nu = 1, c_{\nu-2} = 0, c_{\nu+2} = \frac{-1}{8}$, из леммы 3 получаем

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{r_0^2} - \delta^2\frac{\alpha_{k,\nu}^3(\nu+2)}{16\nu r_0^4}\left.\frac{\left(W_{\nu+2,\nu}(u) + W_{\nu,\nu+2}(u)\right)}{\frac{\partial W_{\nu,\nu}(u)}{\partial u}}\right|_{u=\alpha_{k,\nu}} + o(\delta^2). \tag{47}$$

Доказательство теоремы 3 закончено.

5 Заключительные замечания

Рассмотрим другую постановку задачи. Пусть дано круговое кольцо, ограниченное концентрическими окружностями с радиусами $r_1 > r_0 > \frac{c}{2}$.

Рассмотрим отображение $F_c(z) = z + \frac{c^2}{4z}$ (аналог функции Жуковского). Оно переводит наше круговое кольцо в эллиптическое кольцо, ограниченное эллипсами с фокусами в точках $(\pm\frac{c}{2}, 0)$ и длинными полуосями $F_c(r_0) = r_0 + \frac{c^2}{4r_0}, F_c(r_1) = r_1 + \frac{c^2}{4r_1}$.

С помощью функции $F_c(z)$ оператор Лапласа ∇^2 в эллиптическом кольце переносится в круговое кольцо. Полученный оператор ∇_c^2 можно рассматривать как возмущение исходного оператора Лапласа $\nabla^2 = \nabla_0^2$.

Асимптотика собственных чисел ∇_c^2 будет иметь дополнительные поправки по сравнению с нашей исходной задачей, поскольку под действием $F_c(z)$ полуоси меняются. Обсуждению асимптотики собственных чисел ∇_c^2 будет посвящен раздел в другой работе.

Автор выражает благодарность академику РАН А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

Автор признателен анонимному рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, позволившие улучшить изложение.

Работа М. А. Никулина выполнена в МГУ им. М.В.Ломоносова при поддержке Российского Научного фонда, проект №22-71-10106.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McLachlan, N.W.* Theory and Application of Mathieu Functions // Clarendon Press. 1947.
2. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables (10th print. 1972 with corrections) // U.S. Dept. of Commerce National Bureau of Standards. 1972. **20**
3. *McMahon, J.* On the Roots of the Bessel and Certain Related Functions // Annals of Mathematics 9, no. 1/6. 1894. 230–30. https://doi.org/10.2307/1967501.
4. *McLachlan, N. W.* Mathieu Functions of Fractional Order // Journal of Mathematics and Physics. 1947. **26**. doi: 10.1002/sapm194726129.
5. *F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.* NIST Digital Library of Mathematical Functions // https://dlmf.nist.gov/28
6. *В. В. Фокичева* Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2014. **4**. 18–27
7. *В. В. Фокичева* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**. 10. 127–176
8. *В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко* Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83:6**. 63–103
9. *R. F. A. Clebsch* Theorie der Elasticität fester Körper // Leipzig, Druck, B. G. Teubner 1862.
10. *J. R. Kuttler, V. G. Sigillito,* Eigenvalues of the Laplacian in Two Dimensions // SIAM Review. 1984. **26:2** 163–193
11.*Стретт Дж. В. (лорд Рэлей),* Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т. 1.
12*J. Meixner, F. W. Schäfke,* Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen // Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1954.