

**КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТИ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ИНТЕГРИРУЕМОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
БИЛЛИАРДА С ПОТЕНЦИАЛОМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ¹**
Пустовойтов С.Е.

1 Введение.

Биллиард внутри области на $\mathbb{R}^2(x, y)$, ограниченной эллипсом, как динамическая система известен со времен Биркгофа [1], который рассмотрел предельный переход задачи Якоби [2] о геодезических на трехосном эллипсоиде при устремлении одной из полуосей к нулю. Здесь же была показана и интегрируемость такой системы. В явном виде гамильтониан биллиарда Биркгофа H_0 и его дополнительный первый интеграл F_0 были явно предложены, например, В. В. Козловым и Д. В. Трещевым в [3]. Также отметим, что интегрируемость непосредственно связана с теоремой Якоби-Шаля о системе касательных квадрик для геодезического потока на n -мерном эллипсоиде. Биллиард Биркгофа был изучен многими авторами с разных точек зрения. В той же работе [3] были описаны регулярные траектории, а также изучена устойчивость критических движений. Нас же будет интересовать структура *слоения Лиувилля* фазового многообразия M^4 (пространства состояний точка-ковектор импульса) такого биллиарда. Здесь под слоением Лиувилля мы понимаем разбиение фазового пространства на поверхности совместный уровней значений интегралов $\{H_0 = const, F_0 = const\}$. Согласно классической теореме Лиувилля-Арнольда компонента связности регулярного компактного слоя этого слоения гомеоморфна двумерному тору, называемому тором Лиувилля, а слоение в четырехмерной окрестности этого тора устроено тривиально. Однако помимо этого есть нерегулярные слои, в которых теорема нарушается. Слоение Лиувилля биллиарда Биркгофа в ограничении на изоэнергетическое многообразие $\{H_0 = 1\}$ было изучено В. В. Ведюшкиной в [5]. Здесь расслоенная окрестность каждого невырожденного критического слоя ранга 1 была описана в терминах *3-атомов*, введенных А. Т. Фоменко в [6] и классифицированных в [4] и описывающих бифуркации торов Лиувилля, а структура слоения всего изоэнергетического многообразия описана в терминах *инвариантов Фоменко-Цишанга*, представляющих собой базу слоения или граф, снабженный числовыми метками, вершинам которого соответствуют 3-атомы. См. подробнее в [6]-[16].

Предположим, что при движении биллиардного шара между ударами от границы на него действует некоторая потенциальная сила с потенциалом $W(x, y)$. Встает вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять потенциал, чтобы полученная динамическая система вновь была интегрируемой. На этот вопрос был дан ответ В. В. Козловым в [17], где было предложено дифференциальное уравнение на потенциал при допущении, что дополнительный первый интеграл имеет вид $F = F_0 + f(x, y)$. Одним из потенциалов, удовлетворяющих уравнению Козлова, является классический упругий потенциал Гука, притягивающий или отталкивающий биллиардный шар к центру стола. Устойчивость критических траекторий такого биллиарда была так же изучена в [3], а анализ слоения Лиувилля в ограничении на невырожденные изоэнергетические многообразия $\{H_0 = const\}$ был проведен И. Ф. Кобцевым в [18]. Кроме того, здесь были построены *образы отображения момента* $\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(H, F)$, сопоставляющего точке фазового пространства значения интегралов в ней, и бифуркационные диаграммы как подмножества критических значений этих образов. Отметим, что полученный биллиард с потенциалом Гука, как и в случае классического биллиарда Биркгофа, можно получить предельным переходом от задачи Якоби движения точки по эллипсоиду под действием упругой силы.

Рассмотрим теперь следующее по порядку полиномиальное решение уравнения Козлова. Получим двухпараметрическое семейство потенциалов четвертой степени, которые можно рассматривать как некоторые возмущения потенциала Гука. Автором в [19] был проведен анализ слоения Лиувилля эллиптического биллиарда с таким потенциалом. А именно, были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для каждого невырожденного изоэнергетического многообразия, построены образы отображения момента и бифуркационные диаграммы а также изучена их зависимость от параметров потенциала. Настоящая работа является продолжением предыдущей. Здесь нас будет интересовать структура слоения Лиувилля в четырехмерной окрестности слоев, содержащих невырожденные точки ранга 0 или же вырожденные орбиты ранга 1 потоков первых интегралов. Как известно (см., например, [4]), четырехмерные особенности ранга 0 интегрируемых систем с двумя степенями свободы бывают четырех видов: центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус. Для описания их слоений Лиувилля используется понятие *2-атома*, являющегося классом эквивалентности

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 22-71-10106) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

расслоенных окрестностей особых слоев функций Морса на ориентируемых компактных двумерных многообразиях. Все 2-атомы также были классифицированы в [4]. Итак, структура слоения Лиувилля в окрестности точки центр-центр устроена как прямое произведение двух минимаксных 2-атомов A . Слоение в четырехмерной окрестности слоя центр-седло устроено как прямое произведение 2-атома A и некоторого седлового 2-атома (доказательство этого факта см. в [4]). Слоение же в окрестности слоя седло-седло устроено сложнее. Так, Т. З. Нгуеном в [20] было показано, что такие особенности устроены как почти прямые произведения двух седловых 2-атомов $P_1 \times P_2/G$, где конечная группа G свободно действует на каждом множителе прямого произведения, сохраняя при этом их слоения.

Кратко сформулируем основные результаты нашей работы.

Теорема 1 • *Невырожденные точки ранга 0 эллиптического бильярда с потенциалом четвертой степени имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля в окрестности слоев типа центр-седло имеет вид прямого произведения 2-атома A на один из 2-атомов B, B_2, C_2, C_4 . В окрестности слоев типа седло-седло оно имеет вид полупрямого произведения $B \times C_2/Z_2, B_2 \times C_2/Z_2$ или $B \times C_4/Z_2$.*

- *Всего существует шесть типов окрестностей особых слоев, содержащих вырожденную орбиту, с точностью до лиувиллевой эквивалентности.*

Более подробное их описание, а также доказательства представлены в разделах 3 и 4.

2 Напоминание предыдущего результата. Метод.

Рассмотрим бильярд на плоскости внутри эллипса, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1,$$

где $a > b > 0$. Положим, что на бильярдную материальную точку действует потенциал вида

$$W(x, y) = -c_0(x^2 + y^2 - a - b) - c_1((x^2 + y^2 - a - b)^2 + ay^2 + bx^2 - ab),$$

где c_0 и c_1 – вещественные параметры потенциала. Такой бильярд задает гамильтонову систему на фазовом пространстве M^4 с гамильтонианом

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + W(x, y).$$

Более того, такая система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, т. е. существует функция F вида

$$F = \frac{bp_x^2 + ap_y^2}{2} - \frac{(yp_x - xp_y)^2}{2} + (-c_1(x^2 + y^2 - a - b) - c_0)(ay^2 + bx^2 - ab),$$

которая сохраняется на траекториях движения бильярдного шара и функционально независима с гамильтонианом H .

Для дальнейшего анализа воспользуемся методом разделения переменных, предложенным, например, в [...] для анализа поведения траекторий бильярда Биркгофа. Зафиксируем некоторый уровень первых интегралов $H = h$ и $F = f$ и найдем значения компонент импульса в каждой точке бильярда. Для этого выразим их через эллиптические координаты (λ_1, λ_2) , введенные Якоби в [...], и их сопряженные импульсы (μ_1, μ_2) . Формулы связи эллиптических координат с исходными декартовыми (x, y) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b}, \\ y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a}. \end{cases} \quad (1)$$

Замечание 1 Эллиптические координаты принимают значения на промежутках $\lambda_1 \in [-a, -b]$ и $\lambda_2 \in [-b, +\infty]$, а их координатными линиями служат гиперболы и эллипсы, принадлежащие одному семейству софокусных квадрик, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1.$$

Так, координатная линия $\lambda_1 = \text{const}$ является гиперболой, принадлежащей семейству и параметр которой равен λ_1 . В дальнейшем, говоря про квадрики данного семейства, мы будем называть их просто софокусными эллипсами и гиперболами, указывая, если потребуется, их параметр $\lambda = \text{const}$. Кроме того, граница бильярда также принадлежит семейству, ее параметр равен нулю. Следовательно, координата λ_2 любой точки на бильярде принимает значение не больше нуля.

Имеем

$$H = \frac{H_1 - H_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad F = \frac{\lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где

$$H_i = 2(a + \lambda_i)(b + \lambda_i)\mu_i^2 - c_1\lambda_i^3 - c_0\lambda_i^2.$$

Выразив значения μ_1, μ_2 через эллиптические координаты и значения первых интегралов h и f , получим

$$\mu_i^2 = \frac{V(\lambda_i)}{2(a + \lambda_i)(b + \lambda_i)},$$

где $V(t) = c_1 t^3 + c_0 t^2 + ht + f$ – кубический многочлен. Выражения импульсов p_x, p_y при этом имеют вид

$$\begin{cases} p_x = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-1)^I \sqrt{V(\lambda_1)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} + (-1)^J \sqrt{V(\lambda_2)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} \right) \\ p_y = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-1)^I \sqrt{-V(\lambda_1)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} + (-1)^J \sqrt{-V(\lambda_2)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} \right) \end{cases} \quad (2)$$

где $I, J \in \{0, 1\}$, $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}$.

Заметим, что если хотя бы одно из подкоренных выражений системы 2 становится отрицательным в точке (λ_1, λ_2) , то в этой точке не определен импульс, а значит и движение. Также верно и обратное. Следовательно, множество точек на бильярде, удовлетворяющих системе 2, является образом слоя слоения Лиувилля $T_{(h,f)} = \{\bar{x} \in M^4 : H(\bar{x}) = h, F(\bar{x}) = f\}$ при проекции $\Pi(p_x, p_y, x, y) = (x, y)$ из фазового пространства на бильярд. Назовем это множество *областью возможного движения* для заданных значениях первых интегралов. Учитывая области значений эллиптических координат, получим систему неравенств, задающих область возможного движения:

$$\begin{cases} V(\lambda_1) \leq 0, & \lambda_1 \in [-a, -b] \\ V(\lambda_2) \geq 0, & \lambda_2 \in [-b, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, область возможного движения зависит только от поведения многочлена $V(t)$ на отрезке $[-a, 0]$. Пример этой области и соответствующего ей многочлена изображен на рис. 1. Отметим, что согласно формулам 2 в прообразе почти всех точек области возможного движения лежат четыре точки фазового пространства. Это нарушается только в граничных точках области, а также в точках, являющихся образами критических точек в M^4 .

Полученный метод построения областей возможного движения позволяет изучать структуру слоения Лиувилля, исследуя поведение многочлена $V(t)$. А именно, варьируя значения первых интегралов h и f , проследим за изменением области возможного движения. Прообразы же областей в фазовом пространстве восстанавливаются, исходя из системы 2. Так, было доказано следующее утверждение (аналог теоремы Лиувилля для нашей кусочно-гладкой системы).

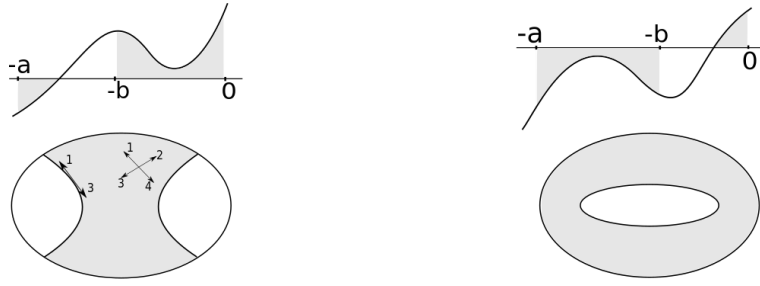


Рис. 1: Пример областей возможного движения и соответствующих им многочленов. Стрелками 1, 2, 3 и 4 изображены импульсы, соответствующие точке областей

Утверждение 1 Пусть при фиксированных значениях первых интегралов $H = h$ и $F = f$ каждая компонента связности области возможного движения имеет непустую внутренность, и каждой внутренней точке области возможного движения соответствует четыре вектора скорости. Тогда прообраз этой области при проекции Π гомеоморфен объединению нескольких двумерных торов. При этом каждой односвязной компоненте связности области возможного движения соответствует один тор Лиувилля, а каждой неодносвязной (кольцевой) компоненте – два тора. Более того, слоение Лиувилля в инвариантной четырехмерной окрестности устроено тривиально.

На рис. 2 схематично изображено доказательство этого утверждения.

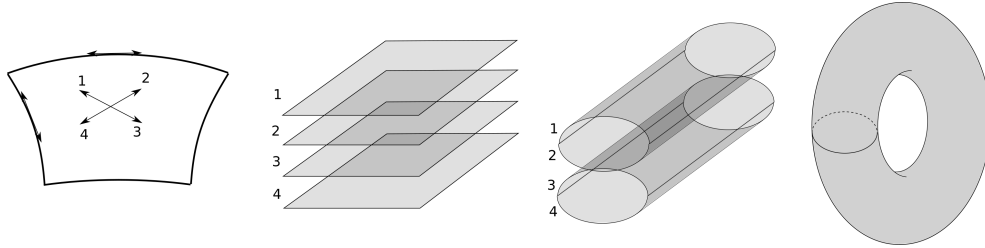


Рис. 2: Схема доказательства утверждения 1. Внутренность области возможного движения накрывается четырехлистно своим прообразом в M^4 . Причем четыре таких листа склеиваются по своим границам в один двухмерный тор согласно слиянию векторов скорости на границе области возможного движения.

Условия утверждения нарушаются, если выполнено одно из следующих условий: многочлен $V(t)$ имеет корень $t = -a$ или $t = -b$ (в этом случае критические точки лежат на осях $x = 0$ или $y = 0$ в областях возможного движения); имеет корень $t = 0$, при этом возрастает в этой точке (здесь в качестве критических точек выступают точки на границе биллиарда); имеет кратный корень второго порядка $t = \lambda'$ (критические точки в этом случае лежат на дуге софокусной квадрики $\lambda = \lambda'$). Таким образом, было доказано следующее утверждение.

Утверждение 2 Бифуркационная диаграмма эллиптического биллиарда с потенциалом четвертого порядка состоит из дуг следующих кривых:

- $f = l_{-a}(h) := ah - c_0a^2 + c_1a^3$;
- $f = l_{-b}(h) := bh - c_0b^2 + c_1b^3$;
- $f = 0$ при $h \geq 0$;
- $f = d_-(h) := \frac{-2c_0^3 + 9c_0c_1h - 2(c_0^2 - 3c_1h)^{\frac{3}{2}}}{27c_1^2}$;

- $f = d_+(h) := \frac{-2c_0^3 + 9c_0c_1h + 2(c_0^2 - 3c_1h)^{\frac{3}{2}}}{27c_1^2}$

Дуги этих кривых делят плоскость значений первых интегралов $\mathbb{R}^2(h, f)$ на несколько открытых областей (камер). При этом точки камеры лежат в образе отображения момента \mathcal{F} лишь в том случае, если решение системы неравенств 3 для соответствующего многочлена $V(t)$ не пусто. Согласно этому были построены образы отображения момента для всевозможных значений параметров потенциала c_1 и c_0 . Примеры изображены на рис. 3.

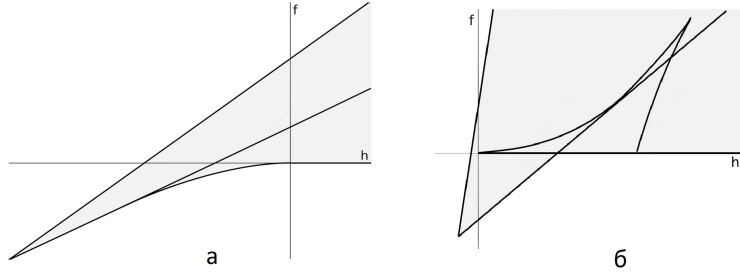


Рис. 3: Примеры бифуркационных диаграмм. Серым закрашены камеры образа отображения момента.

С помощью описанного выше метода для каждой неособой точки бифуркационной диаграммы (h_c, f_c) была изучена структура слоения Ливуилля изоэнергетической поверхности $Q_{h_c}^3 = \{\bar{x} \in M^4 : H(\bar{x}) = h_c\}$ в окрестности соответствующего критического слоя, т.е. вычислены всевозможные 3-атомы. Более того, была изучена глобальная структура слоения неособых изоэнергетических многообразий в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга. В частности было показано, что для нашей системы имеют место следующие 3-атомы: A , B , B_2 , C_2 , C_4 и A^* (см. рис. 4). На рис. 5 изображена схема доказательства этого утверждения.

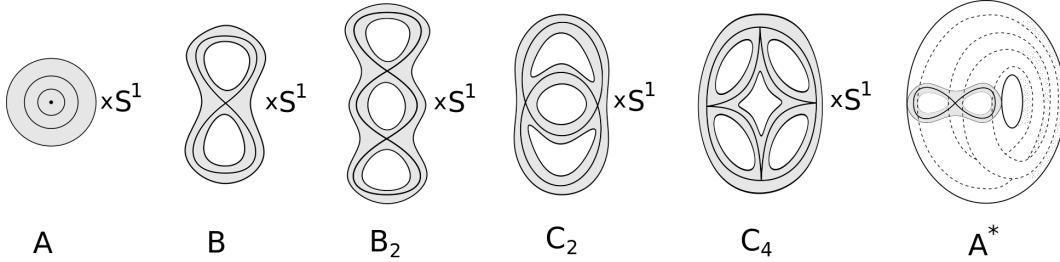


Рис. 4: Примеры 3-атомов.

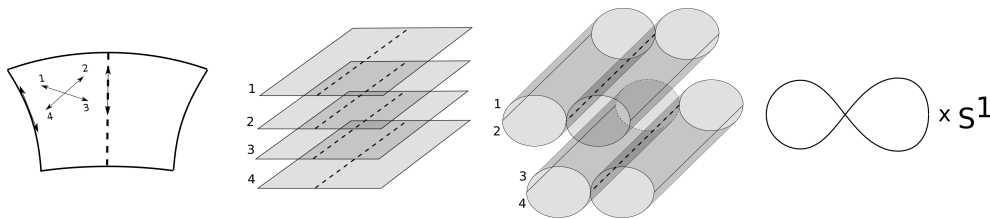


Рис. 5: Схема доказательства утверждения о 3-атомах. Прерывистый отрезок делит область возможного движения на две части, каждая из которых накрывается четырехлистно своим прообразом. При замыкании этого прообраза восемь листов склеиваются в один комплекс, который является особым слоем 3-атома B_2 .

Настоящая работа посвящена изучению структуры слоения Ливуилля в инвариантной четырехмерной окрестности особых критических слоев, а именно тех, которые содержат невырожденные точки ранга 0 или

вырожденные орбиты ранга 1 потоков первых интегралов $sgrad(H)$ и $sgrad(F)$. Отметим, что образы таких слоев при отображении момента лежат в трансверсальном пересечении дуг бифуркационной диаграммы или в точках их касания соответственно.

3 Описание всех четырехмерных особенностей ранга 0 исследуемой системы.

Найдем все точки в фазовом многообразии M^4 , в которых не нарушается гладкость и ранг системы дифференциалов dH и dF равен 0. Для этого распишем эти дифференциалы.

$$dH = (p_x, \quad p_y, \quad -4c_1x(x^2 + y^2 - a - b) - 2c_1bx - 2c_0x, \quad -4c_1y(x^2 + y^2 - a - b) - 2c_1ay - 2c_0y)$$

$$dF = (bp_x - y(y p_x - x p_y), \quad ap_y + x(y p_x - x p_y), \quad +p_y(y p_x - x p_y) - 2c_1x(ay^2 + bx^2 - ab) - 2c_1bx(x^2 + y^2 - a - b) - 2c_0bx, \\ -p_x(y p_x - x p_y) - 2c_1y(ay^2 + bx^2 - ab) - 2c_1ay(x^2 + y^2 - a - b) - 2c_0ay)$$

Приравнивая полученные выражения к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p_x = p_y = 0 \\ -2c_1x(x^2 + y^2 - a - b) - c_1bx - c_0x = 0 \\ -2c_1y(x^2 + y^2 - a - b) - c_1ay - c_0y = 0 \\ -c_1x(ay^2 + bx^2 - ab) - c_1bx(x^2 + y^2 - a - b) - c_0bx = 0 \\ -c_1y(ay^2 + bx^2 - ab) - c_1ay(x^2 + y^2 - a - b) - c_0ay = 0 \end{cases}$$

Решениями этой системы при $c_1 \neq 0$ являются точки

$$P_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{a}{2} + b - \frac{c_0}{2c_1} \end{cases} \quad P_3 : \begin{cases} x^2 = a + \frac{b}{2} - \frac{c_0}{2c_1} \\ y = 0 \end{cases}$$

При $c_1 = 0$ решением является лишь первая точка P_1 .

Определим теперь, являются ли полученные критические точки невырожденными, т.е. подалгебра, порожденная операторами $\langle A_H = \Omega^{-1}d^2H, A_F = \Omega^{-1}d^2F \rangle$, является двумерной и картановой. Вычислим вторые дифференциалы. В первой точке P_1 они имеют вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4c_1a + 2c_1b - 2c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_1a + 4c_1b - 2c_0 \end{pmatrix} \quad d^2F = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4c_1ab + 2c_1b^2 - 2c_0b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_1a^2 + 4c_1ab - 2c_0a \end{pmatrix}$$

Следовательно, образующие матрицы A_H и A_F имеют вид

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4c_1a - 2c_1b + 2c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c_1a - 4c_1b + 2c_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4c_1ab - 2c_1b^2 + 2c_0b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c_1a^2 - 4c_1ab + 2c_0a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операторы линейно зависимы, если $p = -4c_1a - 2c_1b + 2c_0 = 0$ или $q = -2c_1a - 4c_1b + 2c_0 = 0$. В противном случае точка невырождена, а собственные значения матрицы $\lambda A_H + \mu A_F$ имеют вид

$$t_{1,2} = \pm(\lambda + a\mu)\sqrt{q} \quad t_{3,4} = \pm(\lambda + b\mu)\sqrt{p}.$$

Следовательно, точка имеет тип центр-центр при отрицательных значениях p и q , тип седло-седло при положительных и тип центр-седло при различных знаках значений p и q .

Аналогично для второй точки P_2 образующие матрицы имеют вид

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2c_1(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4c_0 + 2c_1(2a+4b) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-c_0 + c_1a)(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(-4c_0 + 2c_1(2a+4b)) \\ \frac{c_0}{2c_1} - \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операторы независимы при любой конфигурации параметров c_0 и c_1 . Обозначим $p = -4c_0 + 2c_1(2a+4b)$ и $q = \frac{c_0}{2c_1} - \frac{a}{2}$. Тогда собственные числа матрицы $\lambda A_H + \mu A_F$ примут вид

$$t_{1,2} = \pm(\lambda + q\mu)\sqrt{-2c_1(a-b)} \quad t_{3,4} = \pm(\lambda + a\mu)\sqrt{p}.$$

Заметим, что $p = 8c_1y^2$. Следовательно, знаки подкоренных выражений собственных чисел всегда различны. Иными словами, точка имеет тип центр-седло.

Наконец, образующие матрицы для третьей точки P_3 имеют вид

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4c_0 + 8c_1a - 4c_1b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c_1(b-a) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b(4c_0 - 8c_1a - 4c_1b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(c_0 - c_1b)(b-a) \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_0}{2c_1} - \frac{b}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операторы линейно зависимы, если $c_0 = 3c_1$. В противном случае, как и ранее, обозначим $p = -4c_0 + 8c_1a + 4c_1b$ и $q = \frac{c_0}{2c_1} - \frac{b}{2}$. Тогда собственные числа примут вид

$$t_{1,2} = \pm(\lambda + q\mu)\sqrt{-2c_1(b-a)} \quad t_{3,4} = \pm(\lambda + b\mu)\sqrt{p}.$$

Осталось заметить, что $p = 8c_1x^2$. Следовательно, знаки подкоренных выражений собственных чисел совпадают, а точка имеет тип центр-центр при $c_1 < 0$ или седло-седло при $c_1 > 0$.

Найдем теперь все точки в фазовом многообразии M^4 , в которых гладкость системы нарушается (т.е. точки, являющиеся прообразами точек границы при проекции на бильярд) и которые являются точками равновесия системы (в таких точках система ведет себя схоже с точками ранга 0 в гладком случае). Иными словами, найдем все точки на границе бильярда, в которых вектор потенциальной силы $\vec{F}_W = -dW$ сонаправлен с вектором нормали $n = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$. Имеем

$$\begin{cases} ay^2 + bx^2 - ab = 0 \\ [\vec{F}_W \times n] = 0 \\ (\vec{F}_W, n) > 0 \end{cases}$$

Решением этой системы являются точки $P_4 : x = 0, y^2 = b$ при $c_0 > c_1a$; $P_5 : y = 0, x^2 = a$ при $c_0 > c_1b$ и $P_6 : x^2 = \frac{1}{a-b}(a^2 - \frac{c_0a}{2c_1}), y^2 = \frac{1}{a-b}(\frac{c_0b}{2c_1} - b^2)$ при $\frac{c_0}{2c_1} \in (b, a)$ и $c_0 > 0$. Тип этих точек нельзя установить аналитически, как это было в гладком случае. Тем не менее, будет показано, что в терминах слоения Лиувилля точки P_4 и P_5 ведут себя как точки типа центр-центр или центр-седло (в зависимости от знака параметра c_1), а точка P_6 ведет себя как точка типа центр-седло.

Изучим теперь слоения Лиувилля четырехмерных окрестностей особых слоев, содержащих найденные точки ранга 0. Докажем следующую теорему.

Теорема 2 *Невырожденные особые точки ранга 0 эллиптического бильярда с потенциалом четвертого порядка имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля четырехмерной окрестности точек центр-центр послойно гомеоморфно прямому произведению двух 2-атомов A . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки центр-седло, послойно гомеоморфно прямому произведению 2-атома A и одного из 2-атомов B, B_2, C_2 или C_4 . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки центр-седло, послойно гомеоморфно почти прямому произведению $B \times C_2/\mathbb{Z}_2, B_2 \times C_2/\mathbb{Z}_2$ или $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы уже было частично доказано для точек P_1 , P_2 и P_3 . Рассмотрим точку P_1 , при этом $2c_1a + c_1b - c_0 > 0$ и $c_1a + 2c_1b - c_0 > 0$, т.е. случай центр-центр. Вычислим значения интегралов в этой точке $H(P_1) = h_1$, $F(P_1) = f_1$. Заметим, что для таких значений многочлен $V(t)$ имеет корни $t = -a$ и $t = -b$, при этом в точке $-a$ он возрастает, а в точке $-b$ — убывает. На рис. 6, *a* изображен график этого многочлена. Область возможного движения состоит лишь из одной точки $(0, 0)$. Согласно работе [19] образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) заключен в угле между лучами прямых $f = l_{-a}(h)$ и $f = l_{-b}(h)$ (см. рис. 6, *b*). Рассмотрим прямоугольную окрестность вершины этого угла $O(h_1, f_1)$. Введем на ней координатную сетку, заданную прямыми двух видов:

$$f = l_{\varepsilon_1}(h) := -\varepsilon_1 h - c_0 \varepsilon_1^2 - c_1 \varepsilon_1^3, \quad f = l_{\varepsilon_2}(h) := -\varepsilon_2 h - c_0 \varepsilon_2^2 - c_1 \varepsilon_2^3,$$

при ε_1 , близком к $-a$, и ε_2 , близком к $-b$. Область возможного движения, соответствующая точке пересечения прямых этой сетки, ограничена софокусным эллипсом с параметром $\lambda = \varepsilon_2$ и софокусной гиперболой с параметром $\lambda = \varepsilon_1$ (рис. 6, *c*). На прямой $l_{-a}(h)$ эта область вырождается в отрезок оси $x = 0$, который соответствует критической окружности в M^4 , а на прямой $l_{-b}(h)$ она вырождается в отрезок фокальной оси $y = 0$, который также соответствует критической окружности. Найдем теперь прообраз окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_1, f_1))$

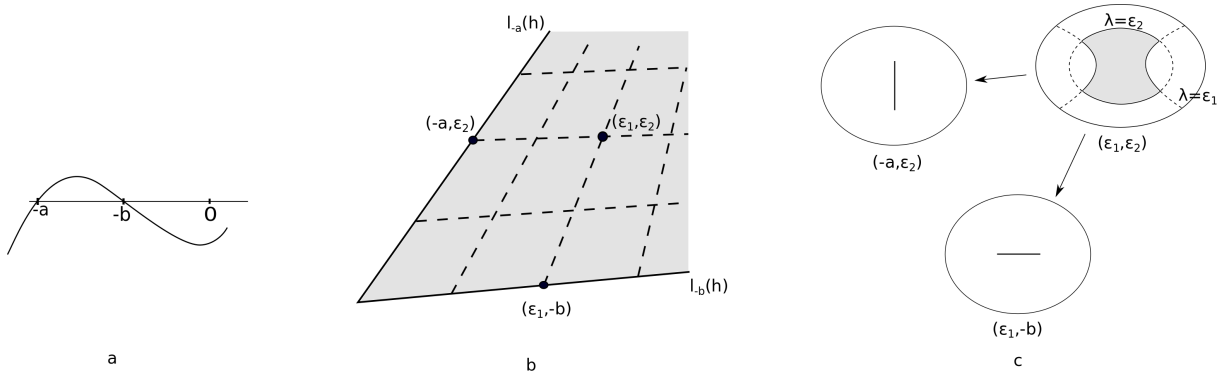


Рис. 6: Случай центр-центр точки P_1 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. *c* изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -b$.

в фазовом пространстве M^4 . Разобьем произвольную регулярную область возможного движения на дуги софокусных эллипсов, каждая из которых оснащена четырьмя векторами скорости в соответствии с системой 2 (см. рис. 7). Прообразом внутренности каждой такой дуги являются четыре интервала $(-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$, соответствующих четырем векторам скорости. При этом два интервала, соответствующие векторам 1 и 4, должны быть склеены на своих границах в одну окружность. Аналогично, интервалы, соответствующие векторам 2 и 3, также должны быть склеены. Следовательно, в прообразе всей расслоенной окрестности лежат два цилиндра, полученные прямым умножением полученных окружностей на отрезок $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$, которые, в свою очередь, должны быть склеены по своим граничным окружностям. Полученный тор можно представить в виде прямого произведения двух пар склеенных отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$ и $2(b + \varepsilon_2)$, причем попарное произведение отрезков из каждой пары взаимно-однозначно проецируется на область возможного движения. Следовательно, прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ из окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из пары отрезков длины $2(b + \varepsilon_2)$, и 2-атома A , расслоенного на пары отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$. Прообраз же всей окрестности $O(h_1, f_1)$, разбитой на такие отрезки, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома A на 2-атом A , расслоенный на окружности длины $2(b + \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_2 \rightarrow -b$ (см. рис. 8).

Теперь рассмотрим случай центр-седло точки P_1 , для которого $2c_1a + c_1b - c_0 > 0$ и $c_1a + 2c_1b - c_0 < 0$. Многочлен $V(t)$ при соответствующих значениях интегралов $H = h_1$, $F = f_1$ имеет корни $-a$ и $-b$, в которых он возрастает (см. рис. 9, *a*). Бифуркационная диаграмма в окрестности точки (h_1, f_1) состоит из двух прямых $f = l_{-a}(h)$ и $f = l_{-b}(h)$. Как и в прошлом случае, введем на этой окрестности координатную

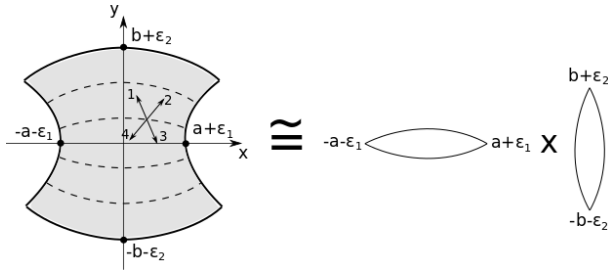


Рис. 7: Область возможного движения, разбитая на оснащенные векторами скорости дуги эллипсов, и ее прообраз в фазовом пространстве.

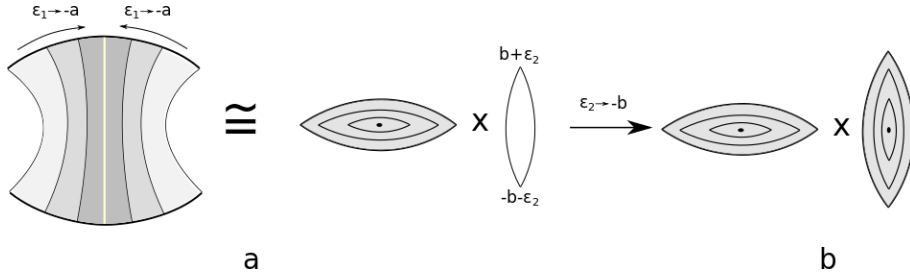


Рис. 8: На рис. а изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a + 0$, а также прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$. На рис. б изображен прообраз всей окрестности $O(h_a, f_a)$.

сетку, заданную прямыми двух видов: $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ при ε_1 , близком к $-a$, и $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ при ε_2 , близком к $-b$. Область возможного движения, соответствующая координатам $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, состоит из нескольких компонент связности, ограниченных гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > -a$, некоторой гиперболой $\lambda = \lambda_0$ и еще одной квадрикой $\lambda = \varepsilon_2$ (рис. 9, c). Прообраз же окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_1, f_1))$ состоит из трех компонент связности, при этом точка P_1 лежит в той компоненте, которая не соответствует перестройке области возможного движения через фокусы билиарда. Образ этой компоненты при отображении момента лежит ниже прямой $l_{-a}(h)$, а область возможного движения ограничена гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$, а также эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ в случае $\varepsilon_2 > -b$. Разобьем эту область на дуги софокусных гипербол, как изображено на рис. 10, a. При $\varepsilon_2 > -b$ одна

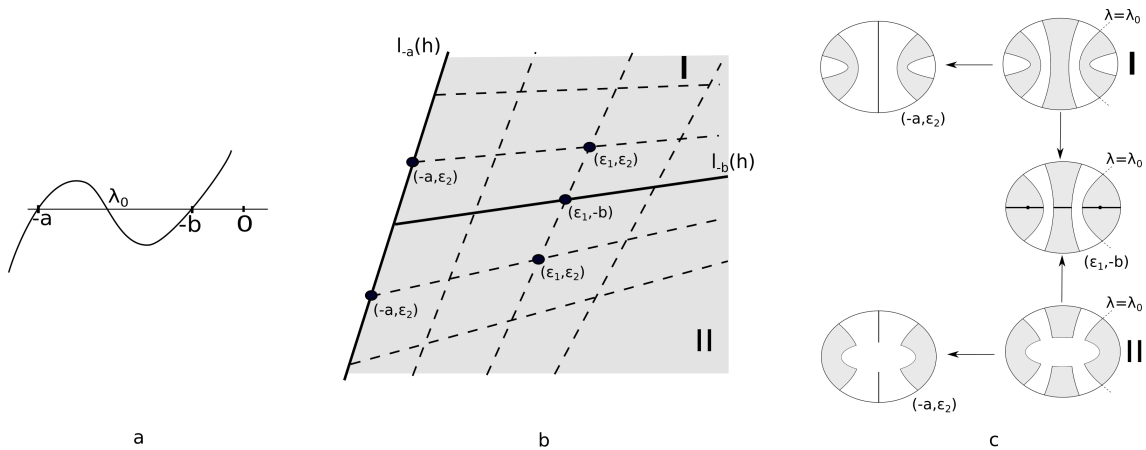


Рис. 9: Случай центр-седло точки P_1 . На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. с изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a + 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -b \pm$.

гипербола разбивается на две дуги, и прообраз каждой такой дуги состоит из четырех отрезков вида $[b + \varepsilon_2, b]$, склеенных, как и ранее, в две окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения, состоящей из двух компонент, гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из пары отрезков $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, и двух окружностей, также склеенных из пар отрезков длины $-\varepsilon_2$. При $\varepsilon_2 = -b$ две дуги гиперболы объединяются в одну, а в ее прообразе лежат две пары окружностей длины ε_2 , склеенных в одну “восьмерку” суммарной длины $-2\varepsilon_2$. При $\varepsilon_2 < -b$ прообраз дуги софокусной гиперболы, как и ранее, состоит из двух окружностей, склеенных из четырех отрезков длины $2b$. Следовательно, прообраз отрезка $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ в окрестности $O(h_1, f_1)$ имеет вид прямого произведения окружности, склеенной из двух отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$, и 2-атома B , расслоенного на окружности, полученные склейкой двух отрезков, и особый слой, полученный склейкой четырех отрезков. Прообраз же всей окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B на 2-атом A , расслоенный на пары отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$ (см. рис. 10, *b*).

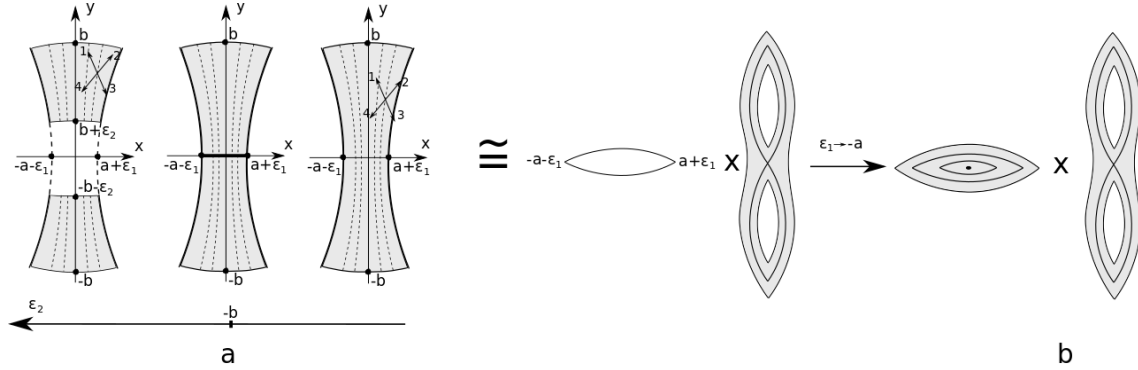


Рис. 10: На рис. а изображено изменение области возможного движения в зависимости от значения переменной ε_2 , а также проекция соответствующего отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$. На рис. б изображен прообраз всей окрестности $O(h_a, f_a)$.

Аналогично рассмотрим случай центр-седло точки P_1 при $2c_1a + c_1b - c_0 < 0$ и $c_1a + 2c_1b - c_0 > 0$. На этот раз многочлен $V(t)$ в своих корнях $-a$ и $-b$ убывает. Образ отображения момента в окрестности соответствующего уровня интегралов (h_1, f_1) лежит выше прямой $f = l_{-b}(h)$, при этом прямая $f = l_{-a}(h)$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Как и ранее, введем координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в окрестности точки (h_1, f_1) . Область возможного движения ограничена эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$, некоторой гиперболой $\lambda = \lambda_0$, а также гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > -a$. Повторяя те же рассуждения с заменой ε_1 на ε_2 и с разбиением области возможного движения на дуги софокусных эллипсов получим, что прообраз окрестности точки (h_1, f_1) , как и в прошлом случае, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атомов A и B .

Наконец, рассмотрим случай седло-седло точки P_1 , которому соответствуют неравенства $2c_1a + c_1b - c_0 < 0$ и $c_1a + 2c_1b - c_0 < 0$. Многочлен $V(t)$, как и ранее, имеет корни в точках $-a$ и $-b$, при этом в точке $-a$ он убывает, а в точке $-b$ возрастает (см. рис. 12, *a*). Как и ранее, введем в окрестности соответствующей точки (h_1, f_1) в образе отображения момента координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Камере I образа отображения момента, заданной неравенствами $f < ah + c_1a^3 - c_0a^2$ и $f < bh + c_1b^3 - c_0b^2$, соответствует область возможного движения, лежащая вне эллипса $\lambda = \varepsilon_2$. Камере II, заданной неравенствами $f < ah + c_1a^3 - c_0a^2$ и $f > bh + c_1b^3 - c_0b^2$, соответствует область, ограниченная гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Камере III, заданной неравенствами $f > ah + c_1a^3 - c_0a^2$ и $f < bh + c_1b^3 - c_0b^2$, соответствует область, ограниченная эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ и гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$. Наконец, камере IV, заданной неравенствами $f > ah + c_1a^3 - c_0a^2$ и $f > bh + c_1b^3 - c_0b^2$, соответствует область, лежащая между двумя гиперболами $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_1$. Приведенные области возможного движения изображены на рис. 12, *c*. Разрежем каждую такую область на три подобласти фиксированной гиперболой $\lambda = \lambda_0 := (-a - b)/2$ (обозначим их числами 1, 2 и 3). Рассмотрим область из камеры III и ее центральную подобласть 2. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол. Как и ранее, в прообразе каждой такой дуги лежат четыре отрезка вида $\pm[b + \varepsilon_2, b]$, которые склеиваются в две окружности. В прообразе же каждой из четырех компонент связности подобласти 2 лежат две такие окружности, прямо умноженные на два отрезка $\pm[a + \varepsilon_1, a + \lambda_0]$, которые

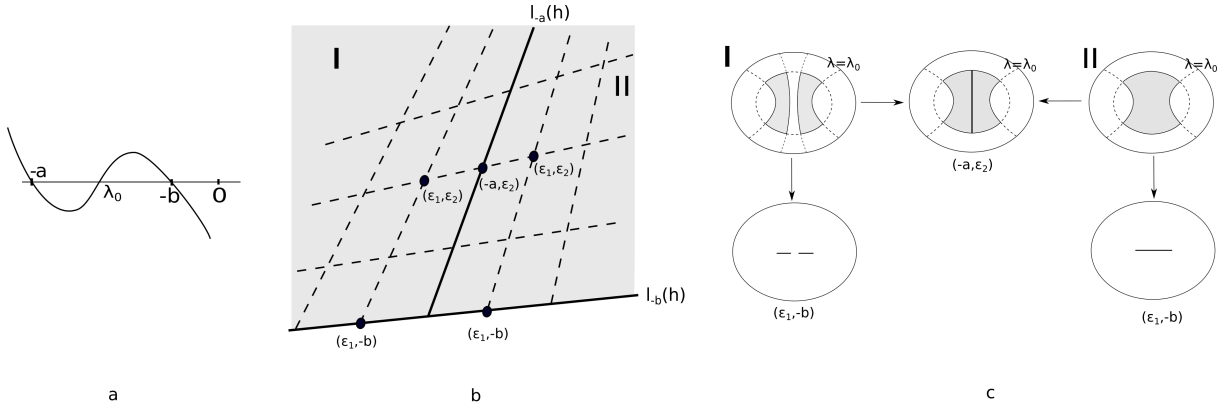


Рис. 11: Случай центр-седло точки P_1 . На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. с изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a \pm 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -b - 0$.

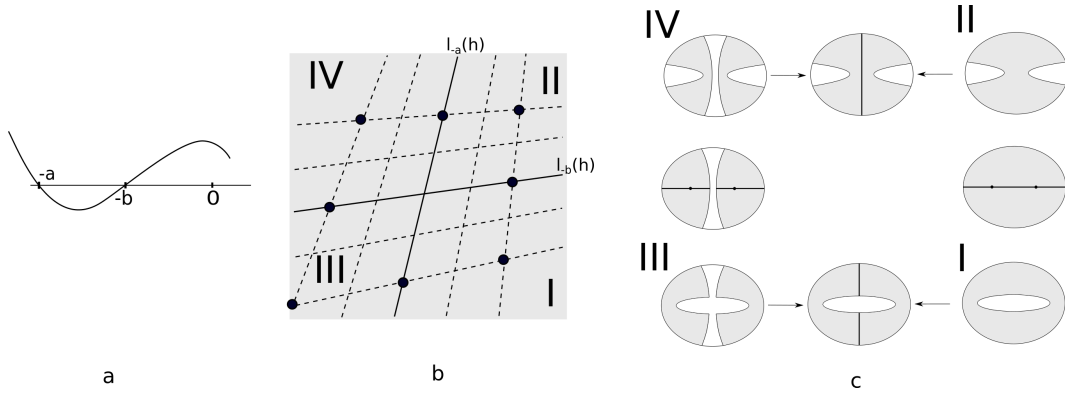


Рис. 12: Случай седло-седло точки P_1 . На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) , разбитый на камеры, и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. с изображено изменение областей возможного движения, соответствующих камерам.

также склеены в одном из концов $\pm(a + \varepsilon_1)$. При переходе из камеры III в камеру IV компоненты связности

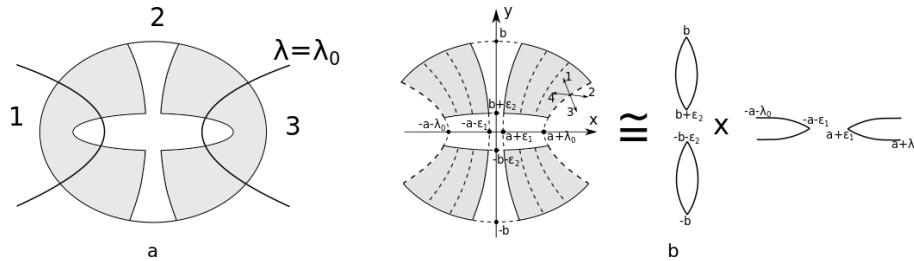


Рис. 13: На рис. а изображено разбиение области возможного движения на три части. На рис. б изображен прообраз части 2 в фазовом пространстве для области возможного движения, соответствующей камере III.

подобласти 2 сливаются в две по отрезкам прямой $y = 0$, а в прообразе дуги гиперболы лежат четыре отрезка, склеенных в одну “восьмерку” суммарной длины $-2\varepsilon_2 = 2b$. В случае же камеры IV в прообразе гиперболы лежит окружность, склеенная из двух отрезков длины $2b$. Следовательно, при $\varepsilon_1 > -a$ часть

прообраза отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$, соответствующая подобласти 2 на бильярде, послойно гомеоморфна прямому произведению 2-атома B , расслоенного на скленные отрезки длины $-\varepsilon_2$ и $-2\varepsilon_2$, и двух отрезков, склеенных из двух пар вида $[\lambda_0 + a, \varepsilon_1 + a]$ $[-a - \varepsilon_1, -a - \lambda_0]$ по конечной точке $\pm(a + \varepsilon_1)$. Заметим, что на границе камер III и I, а также IV и II, компоненты связности области возможного движения сливаются по отрезкам прямой $y = 0$. Следовательно, при $\varepsilon_1 = -a$ та же часть прообраза отрезка в окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно диффеоморфна прямому произведению того же 2-атома B на “крест” общей длины $2(a + \lambda_0)$, склеенный из четырех отрезков. Аналогично можно показать, что при $\varepsilon_1 < -a$ этот “крест” распадается в два отрезка длины $\varepsilon_1 = -a$, а прообраз всей окрестности $O(h_1, f_1)$, с учетом ограничения на подобласть 2 на бильярде, гомеоморфен прямому произведению 2-атома B на расслоенную 2-окрестность “креста” (см. рис. 14, *b*).

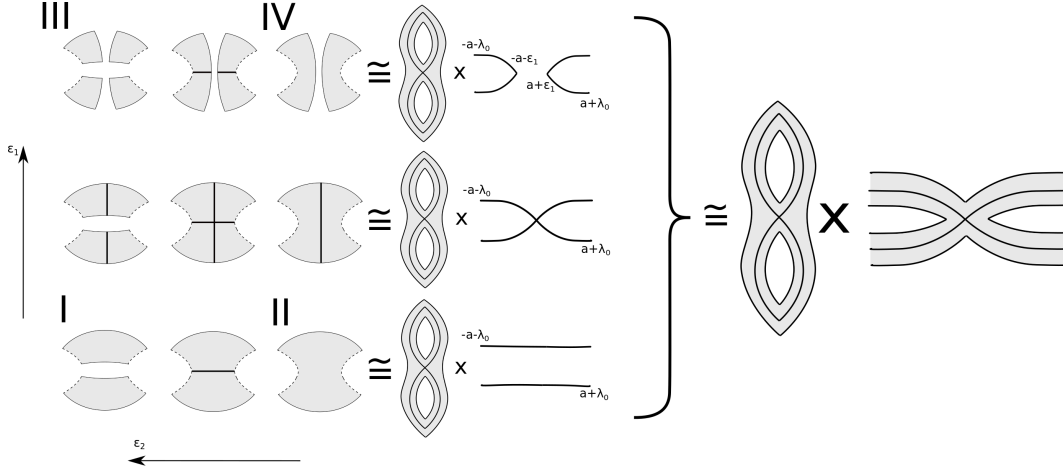


Рис. 14: Изменение части 2 области возможного движения в зависимости от значений переменных ε_1 и ε_2 , а также соответствующая часть прообраза окрестности $O(h_1, f_1)$.

Разбив каждую область возможного движения на три части, мы, тем самым, разбили весь прообраз окрестности $O(h_1, f_1)$ на соответствующие три части. Ранее мы изучили часть 2. Изучим теперь часть 1. Подобласть возможного движения ограничена гиперболой $\lambda = \lambda_0$ и квадратикой $\lambda = \varepsilon_2$. При движении по прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ при любом ε_1 происходит перестройка подобласти через фокус бильярда. Согласно работе [5], в прообразе отрезка такой прямой лежит 2-атом B , прямо умноженный на отрезок (см. рис. 15, *a*). Более того, если гипербола $\lambda = \lambda_0$ является границей бильярда, такой трехмерный “цилиндр” склеивается по своим граничным 2-атомам B с перекруткой, образуя 3-атом A^* . Следовательно, часть 1 прообраза окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно гомеоморфна прямому 2-атому B и прямоугольнику, тривиально расслоенного на отрезки. Аналогично устроена часть 3 прообраза. Таким образом, часть 1 с частью 2 (как и часть 2 с частью 3) склеены по своим трехмерным границам, учитывая описанную перекрутку на границе склейки. Иными словами, мы получили локально-тривиальное расслоение, в качестве слоя и базы которого выступает 2-атом B , при этом оно не является тривиальным. Осталось заметить, что оно послойно гомеоморфно почти прямому произведению 2-атомов $B \times C_2/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 образована инволюцией $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, порожденной центральной симметрией сомножителей, изображенной на рис. 15, *b*).

Рассмотрим теперь точку P_2 при $c_1 > 0$. Вычислим соответствующие значения первых интегралов $H(P_2) = h_2$, $F(P_2) = f_2$ и подставим их в формулу многочлена $V(t)$. Оказывается, в таком случае он имеет два корня $t = -a$ и $t = t_1 = \frac{c_1 a - c_0}{2c_1}$. Многочлен возрастает в корне $-a$. Корень t_1 является кратным и лежит в интервале $(-b, 0)$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 16, *a*. Образ отображения момента в окрестности $O(h_2, f_2)$ лежит ниже прямой $f = l_{-a}(h)$, при этом кривая $f = d_+(h)$ является дугой бифуркационной диаграммы. При $f < d_+(h)$ область возможного движения ограничена гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ и двумя эллипсами $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол. Как и ранее, в прообразе каждой такой дуги в M^4 лежат четыре отрезка, склеенные в две окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$

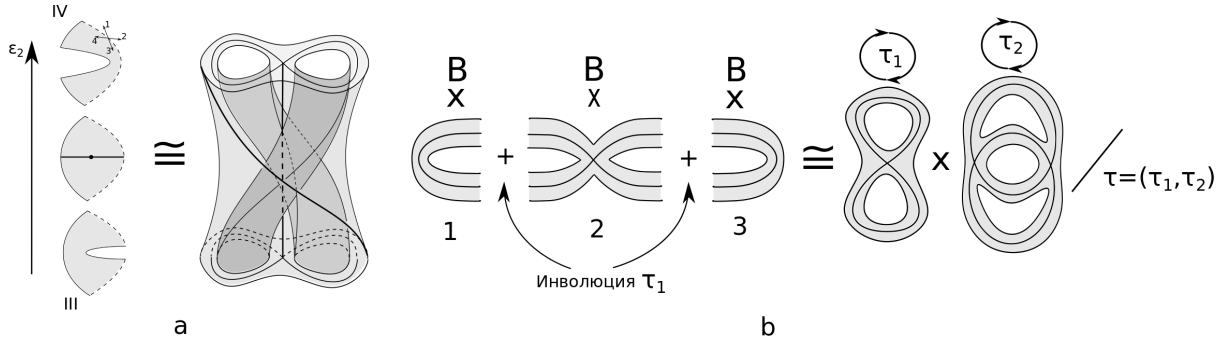


Рис. 15: На рис. а изображена бифуркация части 1 области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. б изображен прообраз всей окрестности $O(h_1, f_1)$.

в граничных точках, и трех несвязных окружностей, каждая из которых также склеена из двух отрезков видов $[-b, -b - \varepsilon_3]$, $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$ и $[b + \varepsilon_3, b]$. При $f = d_-(h)$ три компоненты области возможного движения сливаются в одну, а прообраз софокусной гиперболы гомеоморфен тройной “восьмерке”, склеенной из отрезков вида $[-b, -b - t_1]$, $[-b - t_1, b + t_1]$ и $[b + t_1, b]$. При $f > d_+(h)$ область возможного движения ограничена лишь гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$, а прообраз дуги разбиения гомеоморфен окружности, склеенной из двух отрезков общей длины $2b$. Следовательно, прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$, лежащего в окрестности $O(h_2, f_2)$, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B_2 , расслоенного на склеенные отрезки, и окружности, склеенной из двух отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$. Прообраз же всей окрестности $O(h_2, f_2)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B_2 и 2-атома A , расслоенного на окружности длины $2(a + \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$ (см. рис. 16, d).

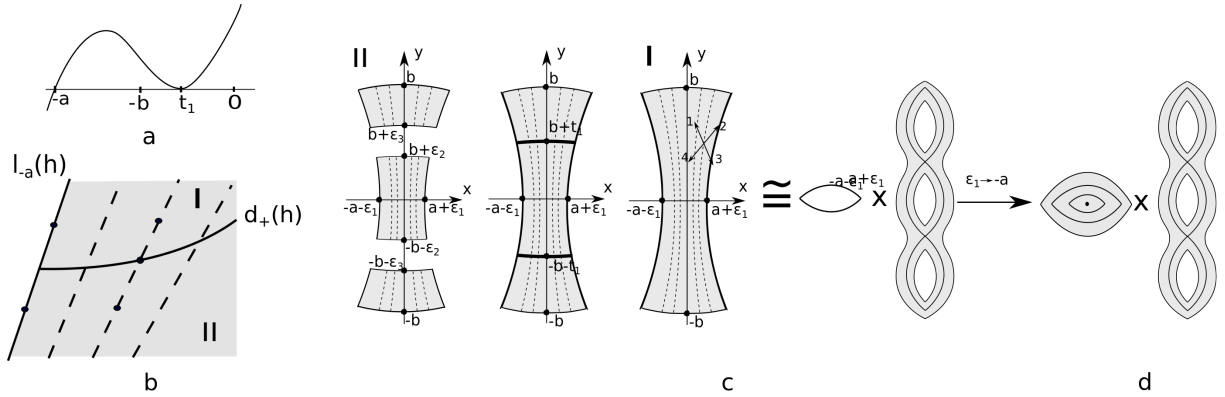


Рис. 16: Случай центр-седло точки P_2 при $c_1 > 0$. На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) . На рис. с изображена бифуркация области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. d изображен весь прообраз окрестности $O(h_2, f_2)$.

Теперь рассмотрим случай $c_1 < 0$ точки P_2 . Многочлен $V(t)$ также имеет два корня $t = -a$ и $t = t_1 \in (-b, 0)$, при этом в точке $-a$ он убывает (см. рис. 17, a). Из [19] следует, что образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) лежит выше кривой $f = d_-(h)$, при этом прямая $f = l_{-a}(h)$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Зададим в этой окрестности координаты (ε_1, δ) , которые заданы кривыми

$$f = l_{\varepsilon_1}(h) := -\varepsilon_1 h - c_0 \varepsilon_1^2 - c_1 \varepsilon_1^3, \quad f = d_{\delta_-}(h) = \frac{-2c_1^3 + 9c_1 c_0 h - 2(c_1^2 - 12c_1^2 \delta^2 - 3c_0 h) \sqrt{c_1^2 - 3c_1^2 \delta^2 - 3c_0 h}}{27c_1^2}.$$

Область возможного движения ограничена двумя эллипсами $\lambda = \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{c_0}{2c_1} - \delta$, $\lambda = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{c_0}{2c_1} + \delta$,

а также гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > -a$. Разобьем эту область на дуги софокусных эллипсов. При $\varepsilon_1 < -a$ в прообразе каждого такого эллипса лежат четыре непересекающихся окружности – его копии. Прообраз же всей области возможного движения гомеоморфен четырем цилиндрам, полученные прямым произведением эллипса на отрезок $[b + \varepsilon_2, b + \varepsilon_3]$ длины 2δ , которые, однако, нужно склеить друг с другом в два тора в соответствии с законом отражения на границе бильярда. При $\varepsilon_1 = -a$ в прообразе эллипса лежат две пары пересекающихся в двух точках окружностей. При $\varepsilon_1 > -a$ область возможного движения состоит из двух симметричных компонент, а в прообразе дуги софокусного эллипса лежат четыре половины эллипса, склеенные в две окружности. Следовательно, прообраз дуги кривой $f = d_{\delta-}(h)$, лежащей в окрестности точки (h_2, f_2) послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков длины 2δ , и 2-атома C_2 , расслоенного на эллипсы и склеенные половины эллипсов. Прообраз же всей окрестности $O(h_2, f_2)$, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на 2-атом A , расслоенный на окружности длины 2δ при $\delta \rightarrow +0$ (см. рис. 17, *d*).

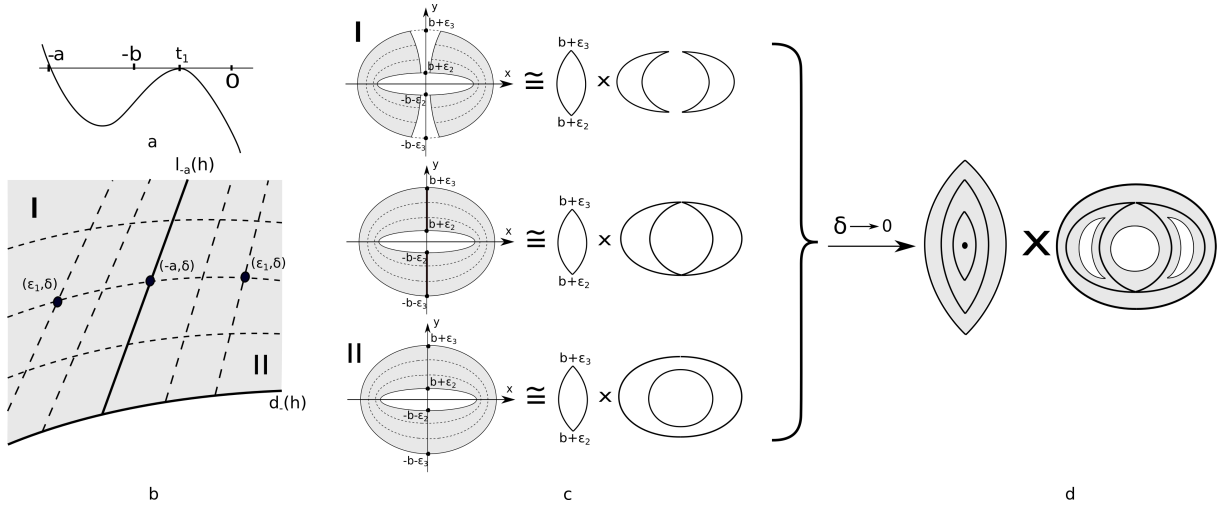


Рис. 17: Случай центр-седло точки P_2 при $c_1 < 0$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_1, δ) . На рис. *c* изображена бифуркация области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. *d* изображен весь прообраз окрестности $O(h_2, f_2)$.

Рассмотрим точку P_3 при $c_1 < 0$, т.е. случай центр-центр. Вычислим значения первых интегралов в этой точке $H(P_3) = h_3$ и $F(P_3) = f_3$ и подставим их в формулу многочлена $V(t)$. Рассмотрим подслучай $c_0 < 3c_1$. Тогда многочлен $V(t)$ имеет два корня $t = -b$ и $t = t_1 = \frac{c_1 b - c_0}{2c_1}$. При этом в корне $-b$ он убывает. Корень t_1 является кратным и лежит на интервале $(-a, -b)$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 18, *a*. Образ отображения момента в окрестности точки (h_3, f_3) заключен в угле, образованном прямой $f = l_{-b}(h)$ и дугой кривой $f = d_{+}(h)$. Зададим в этой окрестности координаты (ε_2, δ) , заданные кривыми

$$f = l_{\varepsilon_2}(h) := -\varepsilon_2 h - c_0 \varepsilon_2^2 - c_1 \varepsilon_2^3, \quad f = d_{\delta+}(h) = \frac{-2c_1^3 + 9c_1 c_0 h + 2(c_1^2 - 12c_1^2 \delta^2 - 3c_0 h) \sqrt{c_1^2 - 3c_1^2 \delta^2 - 3c_0 h}}{27c_1^2}.$$

Область возможного движения, соответствующая координате (ε_2, δ) , состоит из двух компонент связности и ограничена дугой софокусного эллипса $\lambda = \varepsilon_2$ и парой гипербол $\lambda = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_0}{2c_1} - \delta$, $\lambda = \varepsilon_4 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_0}{2c_1} + \delta$ (см. рис. 18, *b*). Рассмотрим правую компоненту. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол. В прообразе каждой такой дуги лежат четыре отрезка $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$, которые склеены в две непересекающиеся окружности по своим граничным точкам. В прообразе же всей компоненты области возможного движения лежат два цилиндра, полученных прямым произведением этих окружностей на отрезок $[a + \varepsilon_3, a + \varepsilon_4]$, при этом склеенных по своим граничным окружностям. Иными словами, прообраз гомеоморфен тору, являющемуся прямым произведением двух окружностей, склеенных из отрезков длины $2(b + \varepsilon_2)$ и 2δ . Следовательно, прообраз отрезка

прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$, лежащий в окрестности $O(h_3, f_3)$, послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков длины $2(b + \varepsilon_2)$, и 2-атома A , расслоенного на окружности длины 2δ при $\delta \rightarrow 0$. Прообраз же всей прямоугольной окрестности $O(h_3, f_3)$ послойно гомеоморфен прямому произведению двух 2-атомов A для каждой компоненты связности области возможного движения.

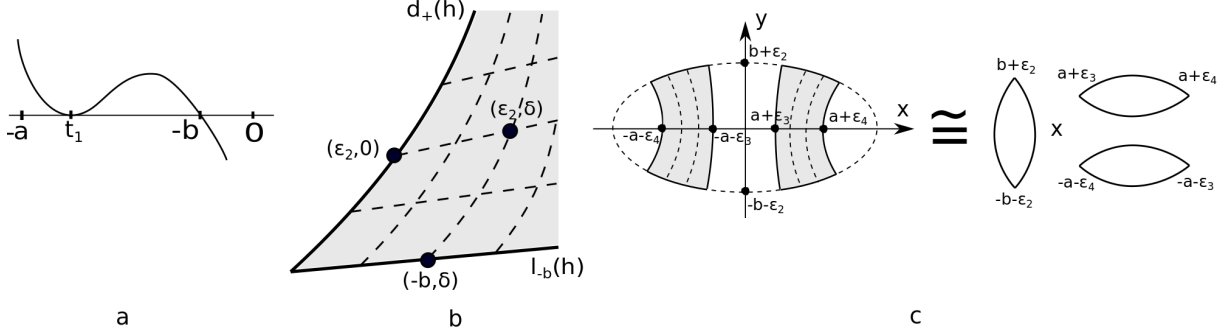


Рис. 18: Случай центр-центр точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена область возможного движения и ее прообраз в фазовом пространстве.

Рассмотрим теперь подслучай $c_0 < 3c_1$, для которого кратный корень многочлена $V(t)$ лежит в интервале $(-b, 0)$. Образ отображения момента в окрестности точки (h_3, f_3) лежит в угле, образованном прямой $f = l_{-b}(h)$ и кривой $f = d_{-}(h)$. Введем в ней координаты (ε_2, δ) , заданные кривыми $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ и $f = d_{\delta-}(h)$. Область возможного движения состоит из двух компонент связности и ограничена софокусной гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$ и парой эллипсов $\lambda = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_0}{2c_1} - \delta$, $\lambda = \varepsilon_4 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_0}{2c_1} + \delta$ (см. рис. 19, *c*). Повторяя предыдущие рассуждения с заменой разбиения на дуги софокусных эллипсов получим, что прообраз прямоугольной окрестности $O(h_3, f_3)$ также состоит из двух компонент связности, каждая из которых послойно гомеоморфна прямому произведению двух 2-атомов A .

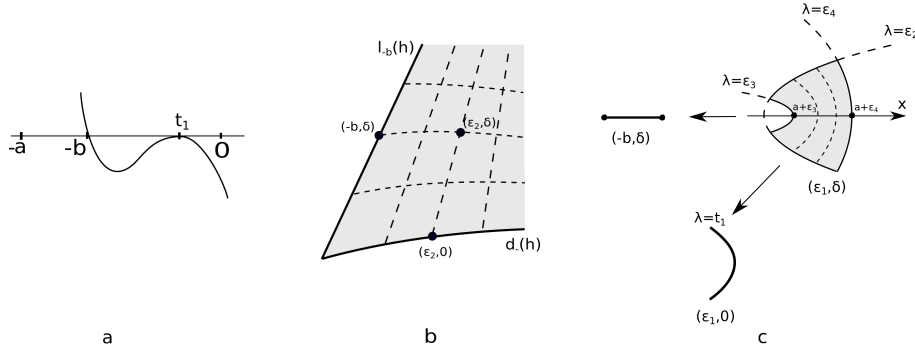


Рис. 19: Случай центр-центр точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена бифуркация области возможного движения при изменении параметров ε_2 и δ .

Рассмотрим теперь случай седло-седло точки P_3 . Рассмотрим подслучай $c_0 > 3c_1$. Многочлен $V(t)$ на уровне интегралов (h_3, f_3) имеет два корня $t = -b$ и $t = t_1 = \frac{c_1 b - c_0}{2c_1}$. В корне $-b$ многочлен возрастает. Корень t_1 является кратным и лежит на интервале $(-a, -b)$. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки (h_3, f_3) состоит из отрезка прямой $f = l_{-b}(h)$ и дуги кривой $f = d_{-}(h)$. Разобьем эту окрестность дугами диаграммы на четыре камеры, как показано на рис. 20, *b*. Точкам камеры I соответствует область возможного движения, ограниченная эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$. Камере II соответствует область, лежащая внутри гиперболы $\lambda = \varepsilon_2$. Область возможного движения камеры III ограничена софокусным эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ и двумя софокусными гипербо-

лами $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Область камеры IV ограничена тремя гиперболами $\lambda = \varepsilon_2$, $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Разрежем

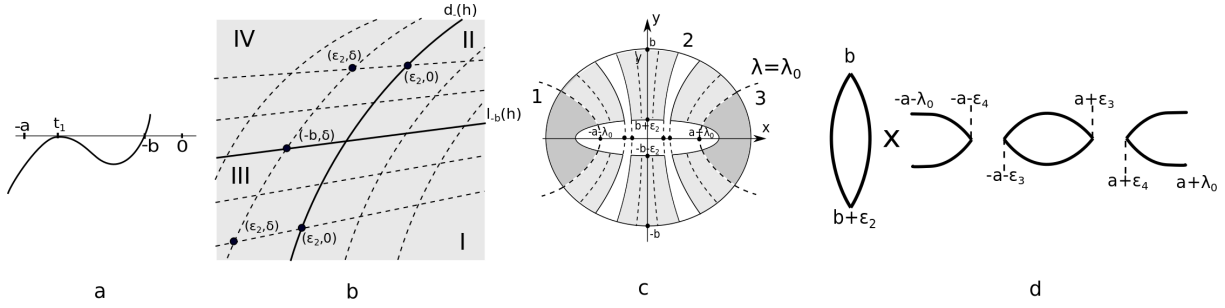


Рис. 20: Случай седло-седло точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена область возможного движения камеры III, разбитая на три части софокусной гиперболой $\lambda = \lambda_0$. На рис. *d* изображен прообраз часть 2 этой области.

теперь каждую из областей на три подобласти одной и той же гиперболой $\lambda = \lambda_0 = \frac{-a+t_1}{2}$ аналогично тому, как было сделано в случае седло-седло точки P_1 . Тем самым мы разрезали прообраз окрестности $O(h_3, f_3)$ в фазовом пространстве на три части. Заметим, что подобласти возможного движения 1 и 3 аналогичны тем же областям случая точки P_1 . Следовательно, части 1 и 3 прообраза $O(h_3, f_3)$ попарно гомеоморфны прямому произведению 2-атома B на прямоугольник, тривиально расслоенный на отрезки. Рассмотрим теперь подобласть возможного движения 2, соответствующую камере III образа отображения момента, и расслоим ее на дуги софокусных гипербол. В прообразе каждой такой дуги лежат четыре отрезка вида $\pm[b + \varepsilon_2, b]$, склеенные в две окружности по граничным точкам. Прообраз же всей подобласти состоит из шести частей, две из которых гомеоморфны прямому произведению этой окружности длины $-\varepsilon_2$ и окружности, склеенной из двух отрезков вида $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$, а четыре оставшихся гомеоморфны прямому произведению той же окружности на отрезок, склеенный из двух отрезков $[a + \varepsilon_4, a + \lambda_0]$ по одной из границ (рис. 21). Для значе-

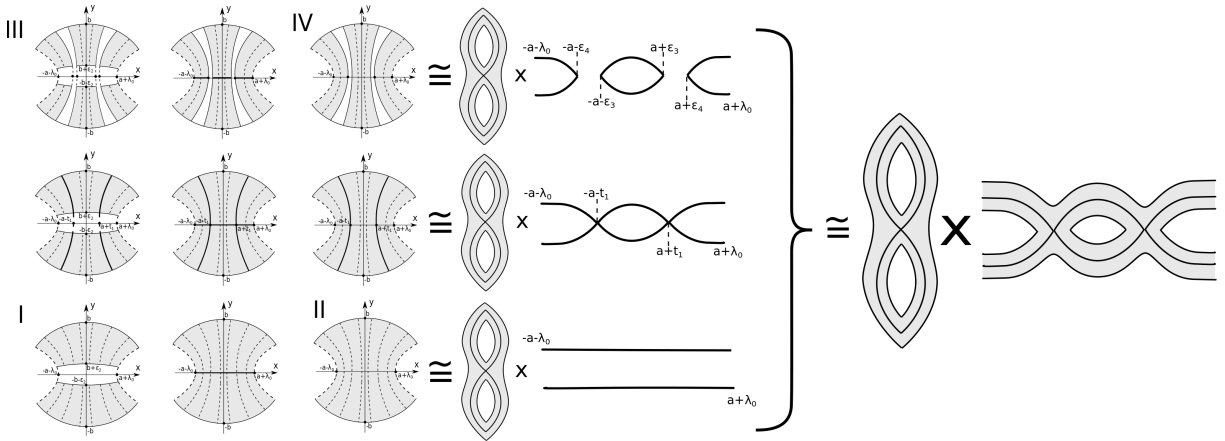


Рис. 21: Изменение части 2 области возможного движения в зависимости от точки образа отображения момента и соответствующий ему прообраз в фазовом пространстве.

ний интегралов, находящихся на границе камер III и IV, шесть компонент подобласти 2 попарно сливаются в три по отрезку фокальной прямой, при этом прообраз одной из них гомеоморфен прямому произведению окружности длины $2(a + \varepsilon_3)$ на “восьмерку”, склеенную из четырех отрезков длины $-\varepsilon_2 = b$, а прообразы двух других компонент гомеоморфны прямому произведению той же “восьмерки” на отрезок, склеенный из двух отрезков длины $\lambda_0 - \varepsilon_4$. Прообраз подобласти 2 для значений интегралов, лежащих в камере IV, гомеоморфен

тому же с заменой “восьмерки” на окружность, склеенную из двух отрезков длины $2b$. Следовательно, часть 2 прообраза дуги кривой $f = d_{\delta-}(h)$, лежащей в камерах III и IV образа отображения момента, послойно гомеоморфна прямому произведению 2-атома B на несвязное объединение окружности, склеенной из отрезков длины $2(a - \varepsilon_3)$, и двух отрезков, склеенных из пары отрезков длины $\lambda_0 - \varepsilon_4$ (см. рис. 21). Аналогично можно показать, что при $\varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \delta = 0$ прообраз бифуркационной дуги $f = d_-(h)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B на “удвоенный крест”, склеенный из двух отрезков длины $2(a - \varepsilon_3)$ и четырех отрезков длины $\lambda_0 - \varepsilon_4$ (см. рис. 21). Прообраз же дуги кривой $f = d_-(h) - const$, проходящей через камеры I и II, послойно гомеоморфен 2-атому B на пару несвязных отрезков длины $2(\lambda_0 + a)$. Таким образом, часть 2 прообраза всей окрестности $O(h_3, f_3)$ послойно гомеоморфна прямому произведению 2-атома B на расслоенную 2-окрестность “удвоенного креста” (см. рис. 21). Склеить же части 1, 2 и 3 всего прообраза нужно так же, как было в случае седло-седло точки P_1 , а именно с перекруткой каждого 2-атома B на каждом 1-слое второго сомножителя в прямом произведении (рис. 22, b). Осталось заметить, что построенная таким образом расслоенная 4-окрестность послойно гомеоморфна почти прямому произведению $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 образована симметрией (τ_1, τ_2) . Действие инволюций τ_1 и τ_2 на каждом сомножителе изображено на рис. 22, b.

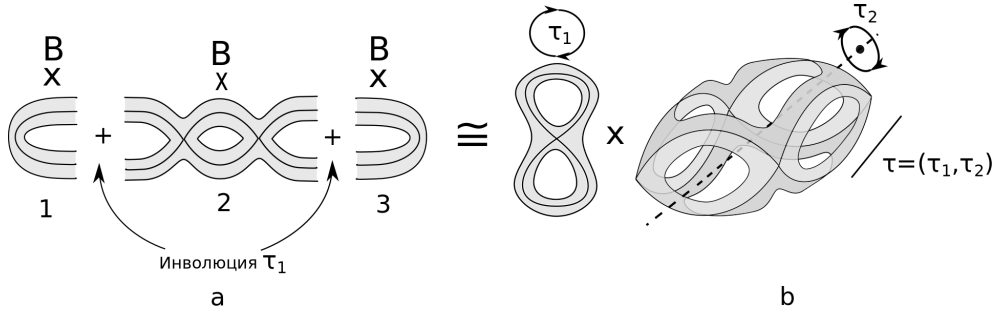


Рис. 22: Склейка трех частей прообраза окрестности точки (h_3, f_3) в полный прообраз.

Наконец, рассмотрим подслучай $c_0 < 3c_1$ случая седло-седло точки P_3 . В этом случае кратный корень t_1 многочлена $V(t)$ лежит на промежутке $(-b, 0)$. График этого многочлена изображен на рис. 23, a. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки (h_3, f_3) состоит из отрезка прямой $f = l_{-b}(h)$ и дуги кривой $f = d_+(h)$. Как и ранее, разобьем эту окрестность дугами диаграммы на четыре камеры, как показано на рис. 23, b. Точкам камеры I соответствует область возможного движения, ограниченная тремя софокусными эллипсами $\lambda = \varepsilon_2$, $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Камере II соответствуют области, лежащие вне эллипса $\lambda = \varepsilon_2$. Область камеры III ограничена двумя эллипсами $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$ и гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Область же камеры IV ограничена одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Все области возможного движения изображены на рис. 24. Разрежем эти области фиксированным эллипсом $\lambda = \lambda_0 = (-b + t_1)/2$ и обозначим внутреннюю часть подобластью 1, а внешнюю – подобластью 2. Итак, рассмотрим подобласть 2, соответствующую точкам камеры III, и разобьем ее на дуги софокусных эллипсов. В прообразе каждого эллипса лежат четыре отрезка длины $2(a + \varepsilon_2)$, склеенные в две окружности в граничных точках. В прообразе же всей подобласти 2 лежат четыре компоненты связности, две из которых гомеоморфны прямому произведению окружности, склеенной из двух копий отрезка $[-a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2]$, на окружность, полученную склейкой двух отрезков вида $[b + \varepsilon_4, b]$, а две другие гомеоморфны прямому произведению той же окружности на отрезок, склеенный из двух отрезков вида $[b + \lambda_0, b + \varepsilon_3]$ по границе $b + \varepsilon_3$ (рис. 22, c). На границе камер III и I четыре компоненты подобласти 2 сливаются в две по отрезкам фокальной прямой, при этом прообраз одной из них гомеоморфен прямому произведению пары пересекающихся в двух точках окружностей, склеенных из четырех отрезков вида $[-a + \varepsilon_2, a - \varepsilon_2]$ при $\varepsilon_2 = -b$, и окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_4, b]$, а прообраз второй компоненты гомеоморфен прямому произведению тех же пересекающихся окружностей с отрезком, полученным склейкой двух отрезков $[b + \lambda_0, b + \varepsilon_3]$. Следовательно, прообраз дуги $f = d_{\delta+}(h)$ в окрестности $O(h_3, f_3)$, ограниченный на подобласть 2, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на несвязное объединение окружности и отрезка. Прообраз же граничной дуги $f = d_+(h)$ гомеоморфен произведению 2-атома C_2 на одномерный комплекс, склеенный из двух пар отрезков вида $[b + \lambda_0, b + t_1]$ и $[b + t_1, b]$ в точках b и $b + t_1$ (см. рис. 24). Прообраз же дуги

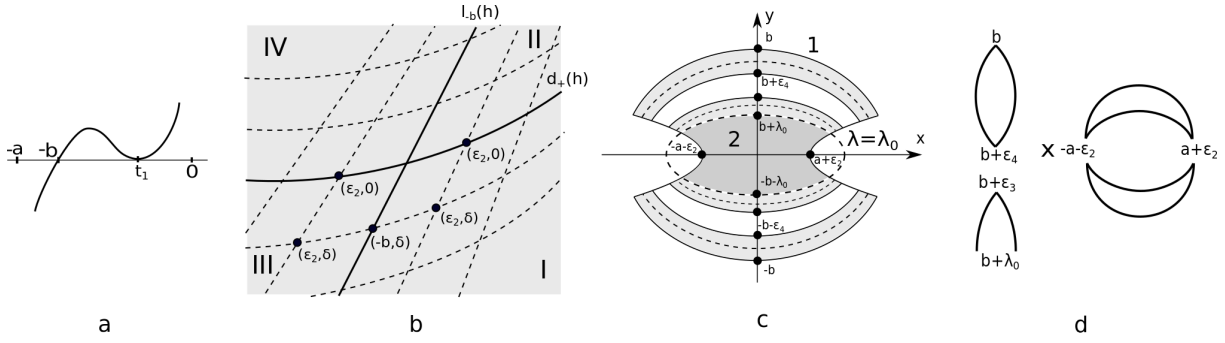


Рис. 23: Случай седло-седло точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_3, f_3) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена область возможного движения камеры III, разбитая на две части софокусным эллипсом $\lambda = \lambda_0$. На рис. *d* изображен прообраз часть 2 этой области.

вида $f = d_+(h) + const$, лежащий в камерах II и IV, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на отрезок, склеенный из двух отрезков вида $[b + \lambda_0, b]$ в точке 0. Прообраз же всей окрестности $O(h_3, f_3)$, ограниченный на подобласть 2, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на расслоенную 2-окрестность, изображенную на рис. 24.

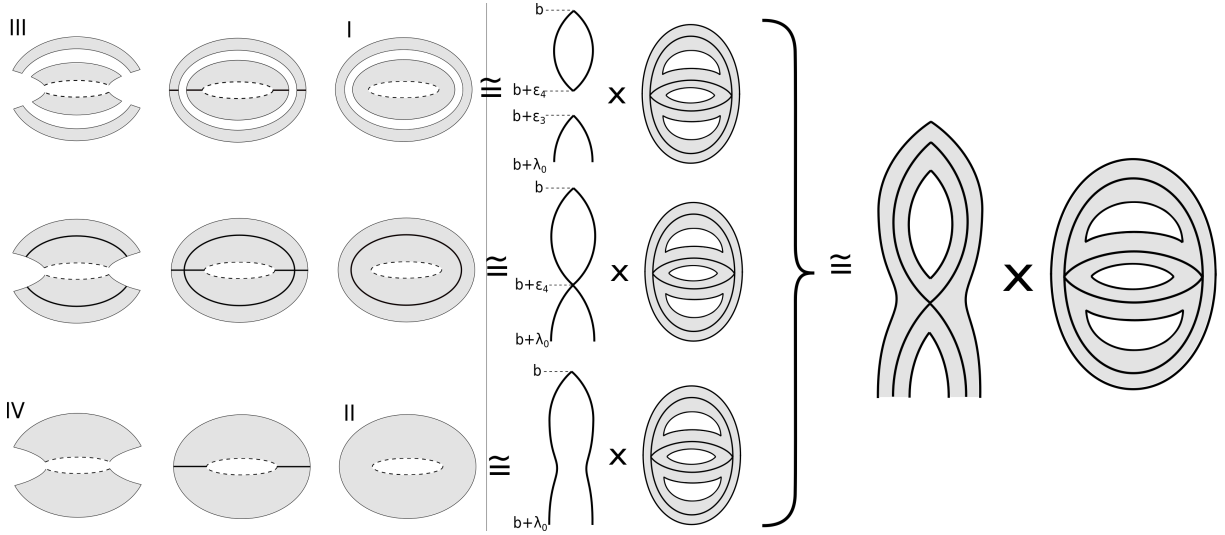


Рис. 24: Изменение части 2 области возможного движения в зависимости от точки образа отображения момента и соответствующий ему прообраз в фазовом пространстве.

Рассмотрим теперь прообраз дуги $f = d_{\delta+}(h)$ в ограничении на подобласть 1, что соответствует перестройке этой подобласти через два фокуса биллиарда. Согласно работе [...] прообраз такой дуги послойно гомеоморфен прямому произведению отрезка на 2-атом C_2 . Более того, если эллипс λ_0 сам ограничивает биллиард, полученный трехмерный “цилиндр” склеивается по своим основаниям с перекруткой, образуя 3-атом B . Следовательно, прообраз всей окрестности $O(h_3, f_3)$ в ограничении на подобласть 1 послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на прямоугольник, тривиально расслоенный на отрезки. Весь же прообраз этой окрестности склеен из двух полученных частей по своим 3-границам с перекруткой 2-атома C_2 , как изображено на рис. 25, *b*. Заметим, что полученное слоение лиувиллево эквивалентно почти прямому произведению $C_2 \times B_2/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 порождена центральными симметриями сомножителей (рис. 25, *b*).

Таким образом, мы рассмотрели все гладкие случаи точек ранга 0. Рассмотрим теперь негладкие случаи

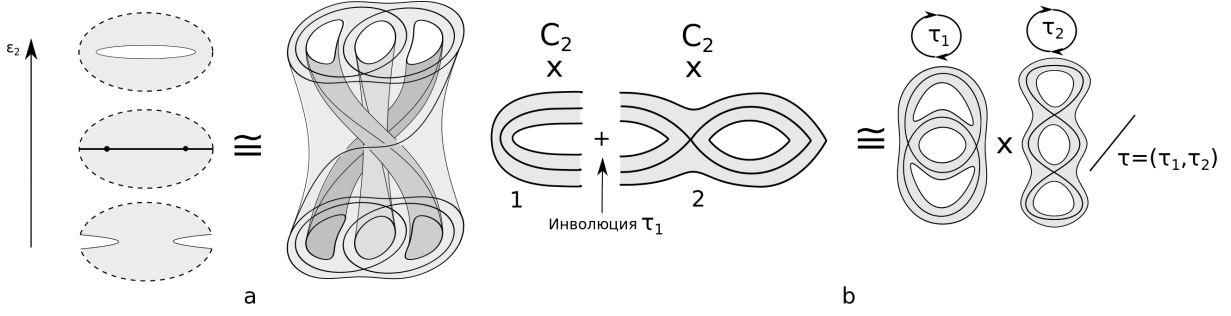


Рис. 25: На рис. а изображена бифуркация части 1 области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. б изображен прообраз всей окрестности $O(h_3, f_3)$.

P_4, P_5 и P_6 . Заметим, что во всех этих точках значение интеграла F равно нулю. Начнем с точки P_4 . Вычислим значение гамильтониана $h_4 = H(P_4)$ и подставим его в формулу многочлена $V(t)$. Этот многочлен имеет корни $t = 0$ и $t = -a$, причем в точке 0 он возрастает. При $c_0 = 2c_1a$ точка P_4 лежит на вырожденной траектории (это будет показано в следующем разделе), поэтому не будем рассматривать этот случай. Рассмотрим подслучай $c_0 < 2c_1a$, для которого многочлен $V(t)$ возрастает в точке $-a$ (см. рис. 26, а). Движение в окрестности точки P_4 существует только для тех значений первых интегралов из окрестности точки $(h_4, 0)$, для которых $f \geq 0$ и $f \leq l_{-a}(h)$. Введем в этой окрестности координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, заданные прямыми $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ при ε_1 , близком к $-a$, и $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ при ε_2 , близком к нулю (рис. 26, б). Область возможного движения состоит из двух компонент, ограниченных софокусной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ и эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ (рис. 26, с). Аналогично случаю центр-центр точки P_3 каждая компонента этой области гомеоморфна прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, и окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_2, b]$. Весь же прообраз $O(h_4, 0)$ состоит из двух компонент связности, послойно гомеоморфных прямому произведению 2-атома A , расслоенного на окружности $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$, и 2-атома A , расслоенного на окружности $[b + \varepsilon_2, b]$ при $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ (см. рис. 26, d).

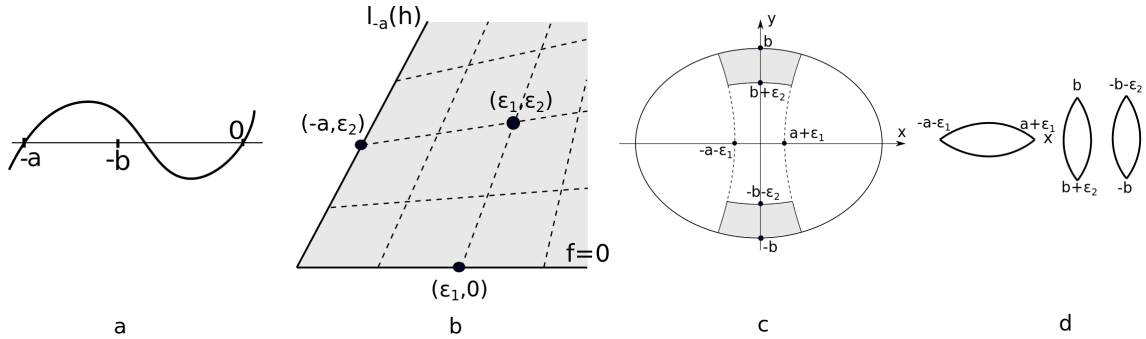


Рис. 26: Случай центр-центр точки P_4 . На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_4, 0)$ и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. На рис. с изображена область возможного движения. На рис. d изображен ее прообраз в фазовом пространстве.

При $c_0 > 2c_1a$ многочлен $V(t)$ убывает в своем корне $-a$ (рис. 27, а). Образ отображения момента в окрестности точки $(h_4, 0)$ лежит выше оси $f = 0$, а прямая $f = l_{-a}(h)$ в этой окрестности принадлежит бифуркационной диаграмме. При $f < l_{-a}(h)$ область возможного движения ограничена софокусным эллипсом, а при $f > l_{-a}(h)$ она разбивается на две компоненты дугами софокусной параболы (рис. 27, с). Заметим, что этот случай полностью аналогичен случаю $c_1 < 0$ точки P_2 типа центр-седло. Следовательно, прообраз окрестности $O(h_4, 0)$ также послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома A на 2-атом C_2 .

Рассмотрим теперь точку P_5 и вычислим в ней значение гамильтониана $h_5 = H(P_5)$. Многочлен $V(t)$ имеет два корня $t = 0$ и $t = -b$, при этом в нуле он возрастает. Аналогично точке P_4 , при $c_0 = 2c_1b$ точка P_5

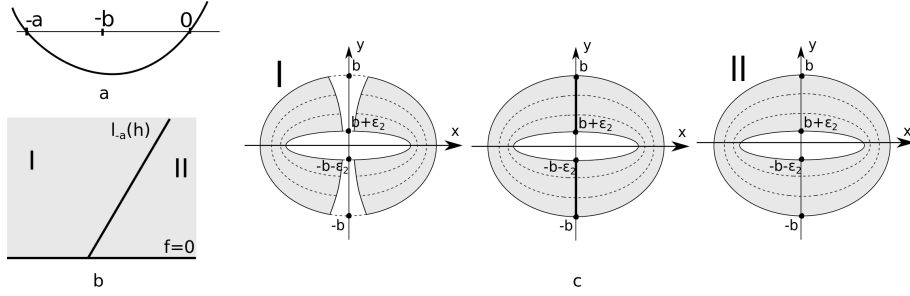


Рис. 27: Случай центр-седло точки P_4 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_4, 0)$. На рис. *c* изображено изменение области возможного движения.

принадлежит вырожденной траектории, поэтому этот случай рассматривать не будем. Пусть $c_0 > 2c_1b$. Тогда многочлен $V(t)$ убывает в точке $t = -b$. В окрестности точки P_5 движение существует только при $f \geq 0$ и $f \leq l_{-b}(h)$. Область возможного движения состоит из двух компонент и ограничена одним софокусным эллипсом и софокусной гиперболой так, как изображено на рис. 28, *c*. Заметим, что этот случай полностью аналогичен подслучаю $c_0 > 3c_1$ точки P_3 типа центр-центр. Следовательно, весь прообраз окрестности $O(h_5, 0)$ состоит из двух компонент, послойно гомеоморфных прямому произведению двух 2-атомов A .

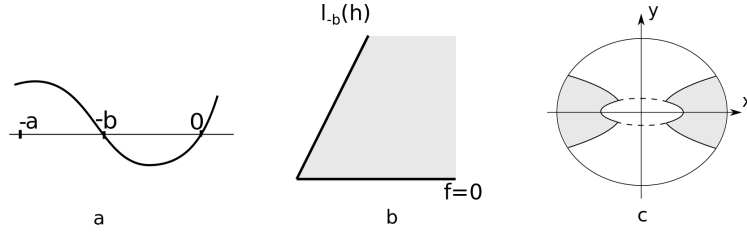


Рис. 28: Случай центр-центр точки P_5 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_5, 0)$. На рис. *c* изображена область возможного движения.

Рассмотрим теперь подслучай $c_0 < 2c_1b$ точки P_5 , для которого многочлен $V(t)$ возрастает в корне $t = -b$. Движение в окрестности точки P_5 существует только при $f \geq 0$, при этом прямая $f = l_{-b}(h)$ в окрестности точки $(h_5, 0)$ является бифуркационной. Введем в этой окрестности координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, заданные прямыми $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ и $f = l_{\varepsilon_2}(h)$. Область возможного движения, которая пересекается с окрестностью точки P_5 , состоит из двух компонент, ограниченных софокусным эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$, а также гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ (рис. 29, *c*). Заметим, что этот случай аналогичен случаю центр-седло точки P_4 с той лишь разницей, что при переходе через бифуркационную прямую компоненты области возможного движения сливаются в одну кольцевую область по отрезкам фокальной прямой, а не по отрезкам оси $x = 0$. Следовательно, как и в предыдущем случае, прообраз окрестности $O(h_5, 0)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атомов A и C_2 .

Наконец, рассмотрим точку P_6 . Вычислим значение $H(P_6) = h_6$ и подставим в формулу многочлена $V(t)$. В этом случае он имеет два корня $t = 0$ и $t = t_1 = -\frac{c_0}{2c_1}$. В корне $t = 0$ он возрастает, а корень $t_1 \in (-a, -b)$ является кратным (см. рис. 30, *a*). Образ отображения момента в окрестности точки $(h_6, 0)$ лежит выше оси $f = 0$ и разбивается кривой $f = d_-(h)$ на две камеры, как показано на рис. 30, *b*. Точкам камеры I соответствует область возможного движения, ограниченная эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ и разбитая на четыре компоненты связности дугами гипербол $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Разбив каждую из этих компонент на дуги софокусных эллипсов можно показать, что прообразы двух из них гомеоморфны прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_2, b]$, на окружность, склеенную из двух отрезков $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$, а прообразы двух других компонент гомеоморфны прямому произведению той же окружности $[b + \varepsilon_2, b]$ и окружности, склеенной из двух отрезков $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$. Для значений интегралов (h, f) , лежащих на границе камер I и II, четыре

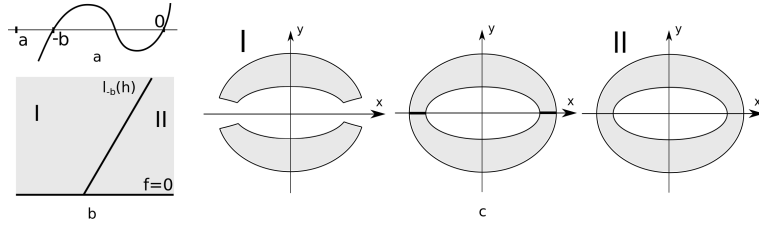


Рис. 29: Случай центр-седло точки P_5 . На рис. a изображен график многочлена $V(t)$. На рис. b изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_5, 0)$. На рис. c изображено изменение области возможного движения.

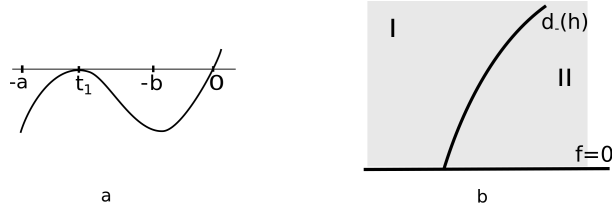


Рис. 30: Случай центр-седло точки P_6 . На рис. a изображен график многочлена $V(t)$. На рис. b изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_5, 0)$.

компоненты области возможного движения сливаются в одну кольцевую область, а ее прообраз гомеоморфен прямому произведению окружности $[\varepsilon_2, -\varepsilon_2]$ на граф, склеенный из восьми отрезков вида $\pm[-a - t_1, a + t_1]$ и $\pm[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$ так, как изображено на рис. 31. Прообраз же области, соответствующей камере II, гомеоморфен прямому произведению окружности $[b + \varepsilon_2, b]$ на пару окружностей, соответствующих движению по и против часовой стрелки. Следовательно, прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ в окрестности $O(h_6, 0)$ послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_2, b]$, и 2-атому C_4 . Прообраз же всей этой окрестности послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_4 на 2-атом A , расслоенный на окружности вида $[b + \varepsilon_2, b]$ при $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

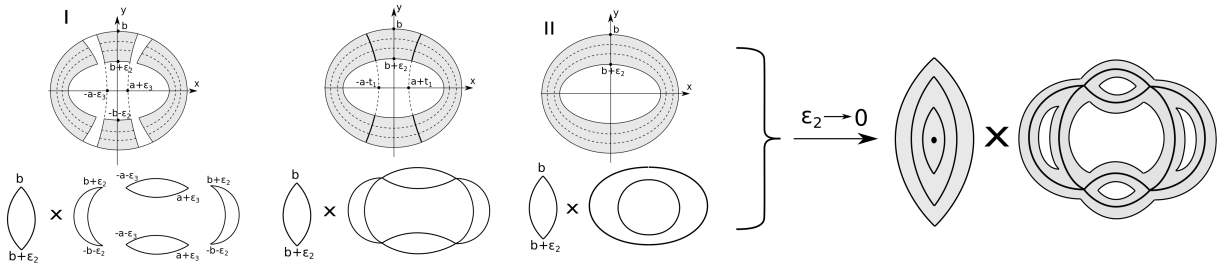


Рис. 31: Изменение области возможного движения и соответствующий ему прообраз в фазовом пространстве.

Таким образом, были рассмотрены все окрестности слоев, содержащих невырожденные точки ранга 0, с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Теорема доказана. ■

4 Вырожденные особенности ранга 1.

Этот раздел посвящен изучению слоения Лиувилля в четырехмерной окрестности особых слоев, содержащих вырожденную критическую траекторию ранга 1. А именно, пусть потоки первых интегралов H и F в точках траектории линейно зависимы, то есть некоторая их линейная комбинация $k \cdot sgrad(H) + l \cdot sgrad(F)$ равна

нулю. Напомним, что такая критическая траектория называется невырожденной, если оператор $kd^2H + ld^2F$, определенный на трехмерном Ω -ортогональном дополнении к вектору потока $\Omega^{-1}dH$, имеет максимальный ранг 2 в каждой точке траектории. Иначе траектория называется вырожденной. Согласно работе [19], критические траектории ранга 1 нашего биллиарда делятся на четыре вида: лежащие на оси $x = 0$, на фокальной оси $y = 0$, на некоторой софокусной гиперболе с параметром $-a < \lambda_0 < -b$ и на софокусном эллипсе с параметром $-b < \lambda_0 < 0$.

Рассмотрим траекторию, лежащую на прямой $x = 0$, и изучим, в каких случаях она вырождена (обозначим этот случай G_1). Потоки интегралов на такой траектории связаны соотношением $sgrad(H) - a \cdot sgrad(H) = 0$, при этом ортогональное дополнение $\perp_{\Omega} sgrad(H)$ образовано тремя векторами в касательном пространстве к фазовому пространству M^4 : $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$ и $e_3 = sgrad(H)$. Определитель оператора $d^2F - a \cdot d^2H$, ограниченного на подпространство $\langle e_1, e_2 \rangle$, равняется

$$Det = (a - b)(p_y^2 - 2(a - b + y^2)(c_0 + c_1(-2a - b + y^2)))$$

Следовательно, траектория вида $x = 0$ вырождена, если определитель Det равен нулю. Имеем формулу

$$p_y^2 = 2(a - b + y^2)(c_0 + c_1(-2a - b + y^2)).$$

Подставляя соответствующие значения импульсов в формулы первых интегралов, получим $H(0, p_y, 0, y) = h_a = a(2c_0 - 3ac_1)$, $F(0, p_y, 0, y) = f_a = a^2(c_0 - 2ac_1)$.

Аналогично изучим траектории, лежащие на прямой $y = 0$ (обозначим этот случай G_2). На таких траекториях потоки связаны соотношением $sgrad(H) - b \cdot sgrad(H) = 0$, а ортогональное дополнение к вектору $sgrad(H)$ образовано векторами $e_1 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$ и $e_3 = sgrad(H)$. Определитель же оператора $d^2F - b \cdot d^2H$ на подпространстве $\langle e_1, e_2 \rangle$ имеет вид

$$Det = (a - b)(-p_x^2 + 2(a - b - x^2)(-c_0 + c_1(a + 2b - x^2))).$$

Траектория $y = 0$ вырождена, если $Det = 0$. Подставляя соответствующие значения импульсов в формулы интегралов, получим $H(p_x, 0, x, 0) = h_b = b(2c_0 - 3bc_1)$, $F(p_x, 0, x, 0) = f_b = b^2(c_0 - 2bc_1)$.

Рассмотрим теперь случаи G_3 и G_4 движения по гиперболе или эллипсу соответственно. Необходимыми условиями такого критического движения является пара соотношений

$$\frac{x^2}{a + \hat{\lambda}} + \frac{y^2}{b + \hat{\lambda}} = 1 \quad \frac{xp_x}{a + \hat{\lambda}} + \frac{yp_y}{b + \hat{\lambda}} = 0$$

Достаточным же условием, в дополнение к первым двум, является следующее соотношение на импульс:

$$p_x^2 = \frac{a + \hat{\lambda}}{b + \hat{\lambda}} y^2 (c_1(a + b - 4\hat{\lambda}) + (a - b)c_1(\frac{2y^2}{b + \hat{\lambda}} - 1) - 2c_0). \quad (4)$$

В этом случае ранг отображения момента на траектории падает, причем потоки первых интегралов удовлетворяют соотношению $\hat{\lambda} \cdot sgrad(H) + sgrad(F) = 0$. Ортогональное дополнение к вектору потока $sgrad(H)$ образовано тремя векторами $e_1 = sgrad(H)$, $e_2 = (e_1(1), 0, e_1(3), 0)$ и $e_3 = (e_1(4), -e_1(3), 0, 0)$. При этом оператор $\hat{\lambda} \cdot d^2H + d^2F$, ограниченный на подпространство $\langle e_2, e_3 \rangle$, имеет определитель

$$Det = 8p_x p_y x y (c_0 + 3c_1 \hat{\lambda}).$$

Следовательно, траектория $\lambda = \hat{\lambda}$, целиком не лежащая ни на одной из осей $x = 0$ и $y = 0$, является вырожденной только при $c_0 + 3c_1 \hat{\lambda} = 0$. Вычислим значения первых интегралов, используя все полученные соотношения. Имеем $h_e = \frac{c_0^2}{3c_1}$, $f_e = \frac{c_0^3}{27c_1^2}$. Кроме того, подставив значение $\hat{\lambda} = -\frac{c_0}{3c_1}$ в уравнение 4, получим, что правая часть неотрицательна только при $c_1 > 0$. Это условие является необходимым условием существования движения для вычисленных значений первых интегралов, а также для значений, принадлежащих окрестности $O(h_e, f_e)$.

Помимо четырех рассмотренных случаев критических орбит ранга 1 существует еще один вид траекторий, лежащих на граничном эллипсе с параметром $\lambda = 0$, в точках которых гладкость системы нарушается,

но которые, тем не менее, ведут себя как эллиптические критические орбиты ранга 1 при условии $F = 0$, $H > 0$. При “слиянии” такой “эллиптической” орбиты с некоторой гиперболической орбитой она становится “вырожденной” в смысле поведения слоения Лиувилля в инвариантной 4-окрестности соответствующего слоя (это будет показано в дальнейшем). Иными словами, траектория $\lambda = 0$ вырождена, если она является предельной критической траекторией, лежащей на софокусном эллипсе с параметром $\lambda = \hat{\lambda}$, при $\hat{\lambda} \rightarrow -0$. Обозначим этот случай G_5 . Используя условия критического движения, приведенные выше для случая G_4 , получим $F = f_0 = 0$, $H = h_0 = 0$.

Изучим теперь структуру слоения Лиувилля в 4-окрестности слоев, содержащих описанные вырожденные траектории ранга 1. Докажем следующую теорему.

Теорема 3 *Вырожденные орбиты потоков первых интегралов, встречающиеся в эллиптическом бильярде с потенциалом четвертого порядка, соответствуют перестройкам параболического типа или типам эллиптического или гиперболического удвоения периода невырожденных окружностей. Четырехмерные окрестности слоев слоения Лиувилля, содержащих такие орбиты, ливиллево эквивалентны одному из шести типов, изображенных на рис. 32.*

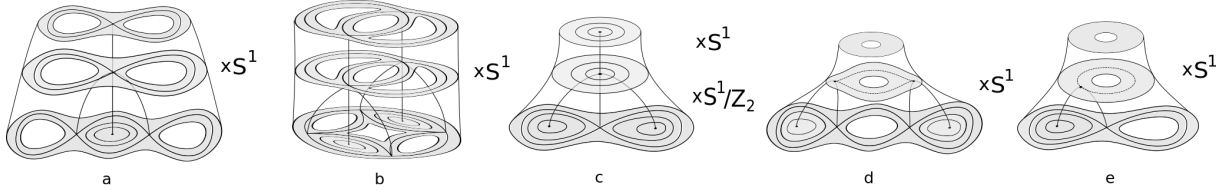


Рис. 32: Шесть типов слоений Лиувилля в окрестности вырожденных слоев ранга 1. На рис. *c* изображены два типа слоения, соответствующие ориентируемому и неориентируемому случаю эллиптического удвоения периода.

Доказательство. Начнем со случая G_1 , рассмотренного выше. Многочлен $V(t)$, соответствующий значениям $H = h_a$ и $F = f_a$, имеет корни $t = -a$ и $t = t_1 = 2a - \frac{c_0}{c_1}$, при этом корень $-a$ является кратным. В зависимости от знака параметра c_1 и расположения корня t_1 относительно отрезка $[-a, 0]$ возникает восемь подслучаев (многие из которых, в свою очередь, не будут соответствовать движению). Рассмотрим послучай $c_1 > 0$ и $t_1 < -a$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 33, *a*. Образ отображения момента в окрестности точки (h_a, f_a) разбивается на две камеры дугами бифуркационной диаграммы $f = d_+(h)$ и $f = l_{-a}(h)$ (см. рис. 33, *b*). Область возможного движения, соответствующая значениям интегралов в камере I, ограничена

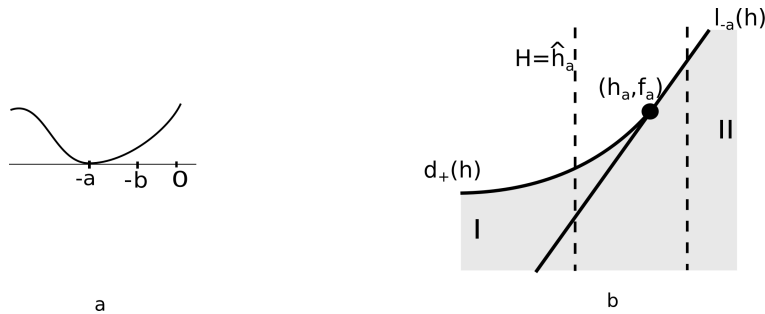


Рис. 33: Случай G_1 , подслучай $c_1 > 0$, $t_1 < -a$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_a, f_a) .

дугами двух софокусных гипербол с параметрами $\lambda = \varepsilon_1$ и $\lambda = \varepsilon_2$, а область, соответствующая камере II, ограничена лишь одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$. Разобьем эти области на дуги софокусных гипербол. Заметим, что такое разбиение порождает тривиальное расслоение прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$ в M^4 на окружности. База же этого расслоения задается глобальным трансверсальным сечением, образ которого на бильярде

лежит на фокальной оси $y = 0$. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_a < h_a$. При $f < \hat{f} = l_{-a}(\hat{h}_a)$ области возможного движения принадлежит отрезок $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, а в его прообразе в M_4 лежит окружность, соответствующая векторам скорости 1 и 2, изображенным на рис. 34. При $f = \hat{f}$ эти вектора скорости сливаются в середине отрезка, а в его прообразе лежит “восьмерка”. При $f > \hat{f}$ отрезок разбивается на два отрезка $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$ и $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$, в прообразе каждого из которых лежит окружность. При $f \rightarrow f_{max} = d_+(\hat{h}_a)$ эти два отрезка стягиваются в точки $-a - \hat{t}$ и $a + \hat{t}$, где $\hat{t} = \frac{-c_0 + \sqrt{c_0^2 - 3c_1 \hat{h}_a}}{3c_1}$. Следовательно, сечение прообраза отрезка прямой $h = \hat{h}_a$, лежащего в окрестности точки (h_a, f_a) , при $\hat{h}_a < h_a$ устроено так, как изображено на рис. 34. При $\hat{h}_a \rightarrow h_a - 0$ значение \hat{t} стремится $-a$, что соответствует слиянию двух эллиптических и одной

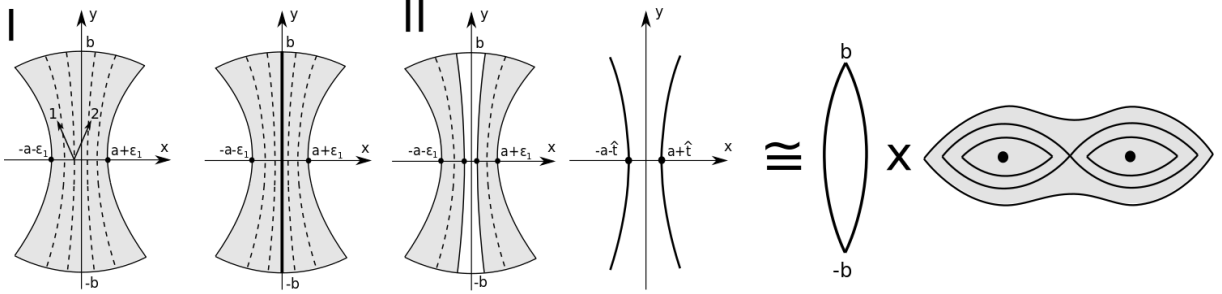


Рис. 34: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_a < h_a$.

седловой критических точек, при этом весь слой “восьмерка” также стягивается в эту точку. При $\hat{h}_a > h_a$ отрезок фокальной оси, лежащий в области возможного движения, стягивается в точку при $f \rightarrow f_{max} = \hat{f}$, что соответствует структуре 2-атома A . Таким образом, прообраз окрестности $O(h_a, f_a)$ послойно гомеоморфен прямому произведению окружности (слою расслоения) на базу (топологически трехмерный шар), слоение которого изображено на рис. 32, c .

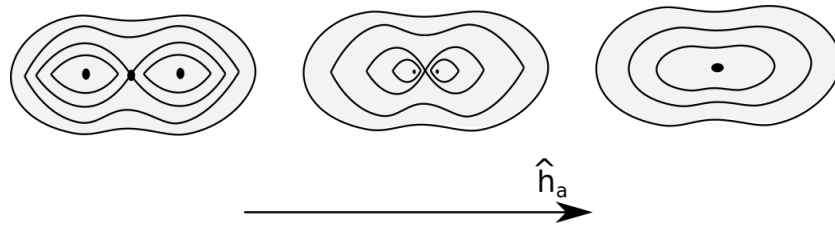


Рис. 35: Изменение сечения базы плоскостью $H = \hat{h}_a$ при увеличении значения \hat{h}_a .

Рассмотрим теперь подслучай $c_1 > 0$ и $-a < t_1 < -b$. График многочлена $V(t)$ приведен на рис. 36, a . Образ отображения момента разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $l_{-a}(h)$ так, как показано на рис. 36, b . Значениям интегралов камеры I соответствует область возможного движения, ограниченная софокусными гиперболами с параметрами $\lambda = \varepsilon_1$ и $\lambda = \varepsilon_2$, камере II соответствует область, ограниченная лишь одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$, а камере III – область, ограниченная тремя гиперболами $\lambda = \varepsilon_1$, $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. Как и в прошлом случае, на всем прообразе окрестности точки (h_a, f_a) задано тривиальное расслоение на окружности, образы которых на бильярдном столе образуют разбиение областей возможного движения на софокусные гиперболы. Как и ранее, найдем базу этого расслоения. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_a < h_a$. При $f < \hat{f} = l_{-a}(\hat{h}_a)$ в области возможного движения лежит отрезок $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ фокальной прямой, прообраз которого содержит окружность, соответствующую векторам скорости 1 и 2. При $f = \hat{f}$ эти вектора скорости сливаются в середине отрезка, а в его прообразе лежит “восьмерка”. При $f > \hat{f}$ отрезок разбивается на два отрезка $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$ и $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$, в прообразе каждого из которых лежит окружность. Следовательно, база расслоения прообраза всего отрезка прямой $H = \hat{h}_a$, лежащего в $O(h_a, f_a)$, послойно гомеоморфна 2-атому B . Зафиксируем теперь значение $H = \hat{h}_a > h_a$. Прямая $h = \hat{h}_a$ пересекает

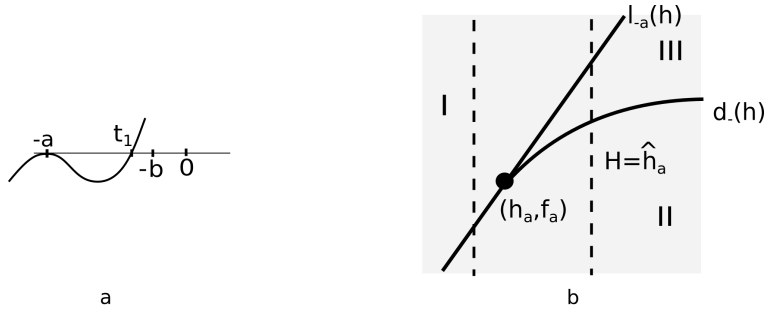


Рис. 36: Случай G_1 , подслучай $c_1 > 0$, $-a < t_1 < -b$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_a, f_a) .

бифуркационную диаграмму в двух точках. При $f = d_-(\hat{h}_a)$ отрезку $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ принадлежат две точки $-a - \hat{t}$ и $a + \hat{t}$, где $\hat{t} = \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 3c_1 \hat{h}_a}}{3c_1}$, в которых вектора скорости 1 и 2 сливаются в один вектор, а в прообразе этого отрезка лежит “тройная восьмерка” (см. рис. 37). При $d_-(\hat{h}_a) < f < \hat{f}$ области возможного движения принадлежат три отрезка фокальной прямой: $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$, $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$ и $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$. Последний из них стягивается в точку 0 при $f \rightarrow \hat{f} - 0$. Следовательно, сечение прообраза отрезка $h = \hat{h}_a$ в этом случае устроено так, как изображено на рис. 37. При $\hat{h}_a \rightarrow h_a + 0$ значение \hat{t} стремится $-a$, что соответствует слиянию

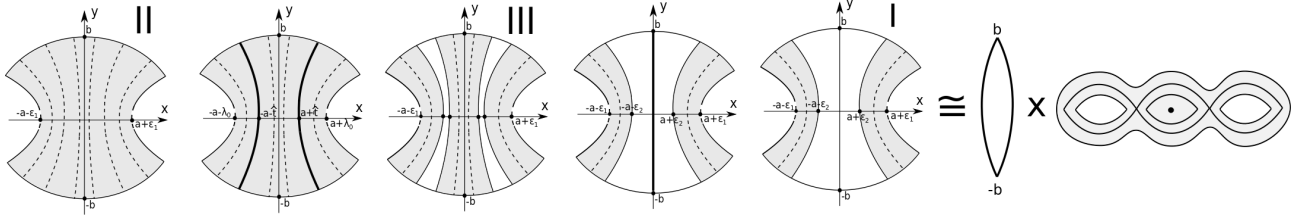


Рис. 37: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_a > h_a$.

двух седловых критических точек “тройной восьмерки” и одной эллиптической точки в одну седловую точку. Таким образом, вся база расслоения прообраза $O(h_a, f_a)$ имеет вид, изображенный на рис. 32, *a*. Весь же прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению этой базы на окружность.

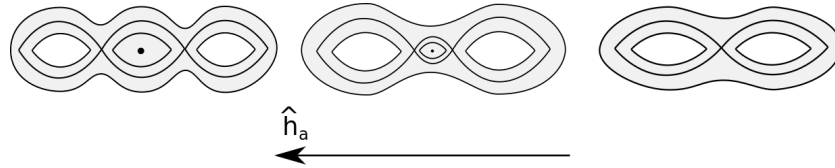


Рис. 38: Изменение сечения базы плоскостью $H = \hat{h}_a$ при изменении значения \hat{h}_a .

Рассмотрим подслучай $c_1 > 0$ и $-b < t_1 < 0$ случая G_1 . Образ отображения момента в окрестности точки (h_a, f_a) устроен аналогично прошлому подслучаю. Области возможного движения, соответствующие камерам I–III, изображены на рис. 39 и ограничены софокусным эллипсом с параметром $\lambda = \varepsilon_1$ и гиперболами $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. Как и ранее, разбиение этих областей на дуги софокусных гипербол задает тривиальное расслоение всего прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$ на окружности, однако на этот раз образ общего трансверсального сечения на бильярдном столе лежит не на фокальной прямой, а на некотором выделенном софокусном эллипсе $\lambda = \lambda_0$. Изучим это сечение. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_a < h_a$. При переходе из камеры II в камеру I эллипс, полностью лежащий в области возможного движения, разделяется на две части в точках, лежащих на оси $x = 0$. Как было показано ранее в доказательстве теоремы 2, прообраз такой перестройки

в фазовом пространстве M^4 соответствует 2-атому C_2 . Следовательно, сечение на фиксированном уровне энергии послойно гомеоморфно 2-атому C_2 . Теперь зафиксируем значение $H = \hat{h}_a > h_a$. При переходе из камеры II в камеру III эллипс разделяется на четыре части в точках, лежащих на гиперболе с параметром $\lambda = \hat{t} = \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 3c_1 \hat{h}_a}}{3c_1}$. В фазовом пространстве такая перестройка соответствует 2-атому C_4 . При переходе же из камеры III в камеру I две части эллипса, ограниченные гиперболой $\lambda = \varepsilon_3$, стягиваются в точки, что соответствует двум 2-атомам A . Сечение же всего прообраза такого отрезка прямой $h = \hat{h}_a$ изображено на рис. 39. При $\hat{h}_a \rightarrow h_a + 0$ значение \hat{t} стремится к $-a$. Следовательно, четыре седловых точки 2-атома C_4 слива-

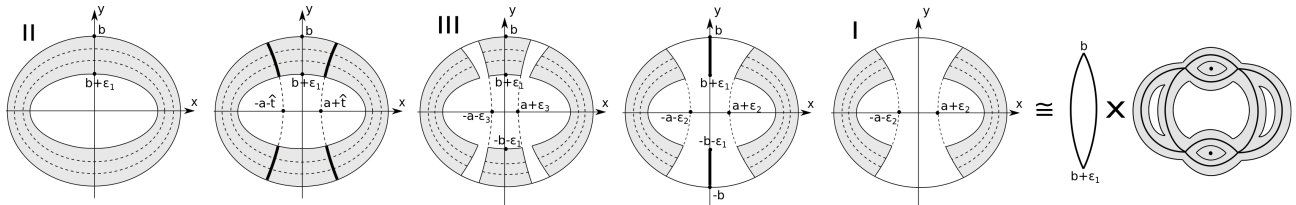


Рис. 39: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_a > h_a$.

ются вместе с двумя эллиптическими точками 2-атомов A в седловые точки 2-атома C_2 (см. рис. 32, b). Таким образом, описана база расслоения прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$. Весь же прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению этой базы на окружность.

Отметим, что в случаях $c_1 > 0$ и $t_1 > 0$, а также $c_1 < 0$ и $t_1 < -b$ многочлен $V(t)$ принимает отрицательные значения при любом значении интегралов, лежащих в окрестности точки (h_a, f_a) . Следовательно, образ отображения момента не пересекает эту окрестность, а приведенные случаи не соответствуют движению. Оставшийся же подслучай $c_1 < 0$ и $t_1 > -b$ полностью аналогичен подслучаю $c_1 > 0$ и $t_1 < -a$, рассмотренному ранее. Это следует из того, что многочлен $V(t)$ для этих двух случаев качественно устроен одинаково на отрезке $[-a, 0]$. Следовательно, слоение Лиувилля прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$ также устроено аналогично.

Рассмотрим теперь случай G_2 вырожденной орбиты. Многочлен $V(t)$ для значений интегралов $H = h_b$ и $F = f_b$ имеет два корня $t = -b$ и $t = t_1 = 2b - \frac{c_0}{c_1}$, при этом корень $-b$ является кратным. Как и в случае G_1 , здесь имеют место восемь подслучаев в зависимости от знака параметра c_1 и расположения корня t_1 относительно отрезка $[-a, 0]$. Рассмотрим подслучай $c_1 < 0$ и $t_1 < -a$. График многочлена приведен на рис. 40, a . Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $f = l_{-b}(h)$ на две камеры, как показано на рис. 40, b . Область возможного движения, соответ-

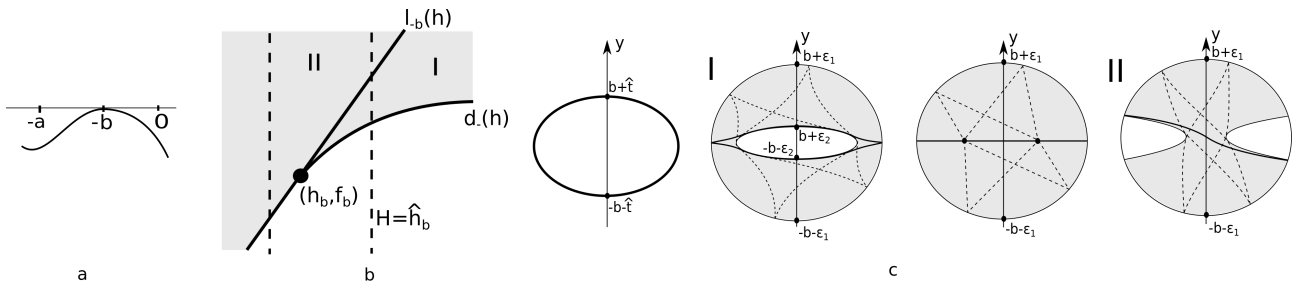


Рис. 40: Случай G_2 при $c_1 < 0$ и $t_1 < -a$. На рис. a изображен график многочлена $V(t)$. На рис. b изображен образ отображения момента в окрестности точки h_b, f_b . На рис. c изображено изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_b > h_b$. Здесь пунктиром изображены образы гомологичных циклов Λ , задающие тривиальное расслоение четырехмерной окрестности особого слоя. При этом выделены циклы, которые переходят в критический при $f = l_{-b}(\hat{h}_b)$.

ствующая значениям камеры I, ограничена двумя софокусными эллипсами с параметрами $\lambda = \varepsilon_1$ и $\lambda = \varepsilon_2$. Прообраз такой области в фазовом пространстве M^4 гомеоморфен несвязному объединению двух торов Ли-

увилля, которые вырождаются в две окружности при $f = d_-(h)$. Образ этих окружностей на бильярде является софокусным эллипсом $\lambda = \hat{t} = \frac{-c_0 + \sqrt{c_0^2 - 3c_1 h}}{3c_1}$. Камере II соответствует область, ограниченная софокусным эллипсом $\lambda = \varepsilon_1$ и гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Прообраз такой области в фазовом пространстве гомеоморфен одному тору Лиувилля. На каждом регулярном торе рассмотрим расслоение на гомологичные окружности, образы которых в областях возможного движения имеют вид, изображенный на рис. 40, c (кривая выходит из точки на границе бильярда, касается каустики, приходит в диаметрально противоположную точку границы и затем возвращается в исходную точку). Обозначим класс гомологий этих окружностей буквой Λ . Можно показать, что на критических слоях, соответствующих дугам бифуркационной диаграммы, критические циклы также принадлежат классу Λ . Таким образом в прообразе окрестности точки (h_a, f_a) было задано расслоение со слоем S^1 . Согласно работе [5] это расслоение тривиально, а его база является глобальным трансверсальным сечением, дополняющим цикл Λ до допустимого базиса в окрестностях критических слоев. Образ такого сечения на бильярдном столе лежит на оси $x = 0$. Зафиксируем уровень гамильтониана $H = \hat{h}_b > h_b$ и проследим за изменением этого сечения при росте значения f от $f_{min} = d_-(\hat{h}_b)$ до $f_{max} > \hat{f} = l_{-b}(\hat{h}_b)$. При $f = f_{min}$ на оси $x = 0$ лежат две точки $\pm(b + \hat{t})$. При дальнейшем увеличении f эти точки вырастают в два отрезка $[-b - \varepsilon_1, -b - \varepsilon_2]$ и $[b + \varepsilon_2, b + \varepsilon_1]$, которые сливаются в один отрезок $[-b - \varepsilon_1, b + \varepsilon_1]$ для значения $f = \hat{f}$. Следовательно, слоение Лиувилля глобального сечения, ограниченного уровнем гамильтониана $H = \hat{h}_b$, устроено как расслоение двумерного диска на 2-атом B и два 2-атома A . При $\hat{h}_a \rightarrow h_a + 0$ значение \hat{t} стремится к $-b$, что соответствует слиянию критических точек этих 2-атомов в одну эллиптическую точку при $\hat{h}_b < h_b$. Таким образом, глобальное сечение всего прообраза окрестности $O(h_b, f_b)$ аналогично сечению для случая G_1 , изображенному на рис. 38. Весь же прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению окружности (слоя расслоения) на полученное сечение (базу). Также отметим, что подслучай $c_1 > 0$ и $t_1 > 0$ того же случая G_2 полностью аналогичен данному.

Рассмотрим подслучай $c_1 < 0$ и $-a < t_1 < -b$ случая G_2 . Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) , как и ранее, разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $f = l_{-b}(\hat{h}_b)$ на две камеры. Области возможного движения, соответствующие камерам I и II, аналогичны областям из предыдущего случая с той лишь разницей, что теперь все эти области разбиваются дугами софокусной гиперболы $\lambda = t_1$ на две непересекающиеся подобласти (см. рис. 41). Следовательно, прообраз всей окрестности точки

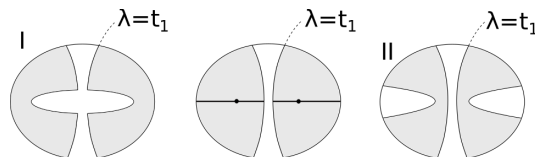


Рис. 41: Области возможного движения в случае G_2 при $c_1 < 0$ и $-a < t_1 < -b$.

(h_b, f_b) в фазовом пространстве также состоит из двух непересекающихся компонент. Рассмотрим компоненту, соответствующую областям возможного движения, лежащим в правой полуплоскости $x > 0$. Отметим, что наш бильярд в заданной области значений интегралов $O(h_a, f_a)$ эквивалентен бильярду, полученному из предыдущего подслучая добавлением вертикальной стенки $x = 0$. Иными словами, рассматриваемый подслучай может быть получен из предыдущего путем факторизации по инволюции, заданной симметрией бильярда относительно оси $x = 0$. В четырехмерной окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_b, f_b))$, которая, как было показано, является тривиальным расслоением $S^1 \times Ba^3$, где Ba^3 обозначает трехмерную базу, изображенную на рис. 32, c , описанная выше инволюция действует следующим образом. На множителе S^1 она действует центрально симметрично, а на Ba^3 – поворотом на угол π относительно оси симметрии. Таким образом, прообраз окрестности $O(h_b, f_b)$ в фазовом пространстве для рассматриваемого подслучая состоит из двух непересекающихся частей, послойно гомеоморфных почти прямому произведению $S^1 \times Ba^3/\mathbb{Z}_2$, изображенному на рис. 32, c .

Перейдем теперь к подслучаю $c_1 < 0$ и $t_1 > -b$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 42, a . Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) , а также области возможного движения, соответствующие камерам I и II, изображены на рис. 42. Этот случай схож с предыдущим с той лишь разницей, что области возможного движения соответствуют противоположным камерам, при этом образы критических окружно-

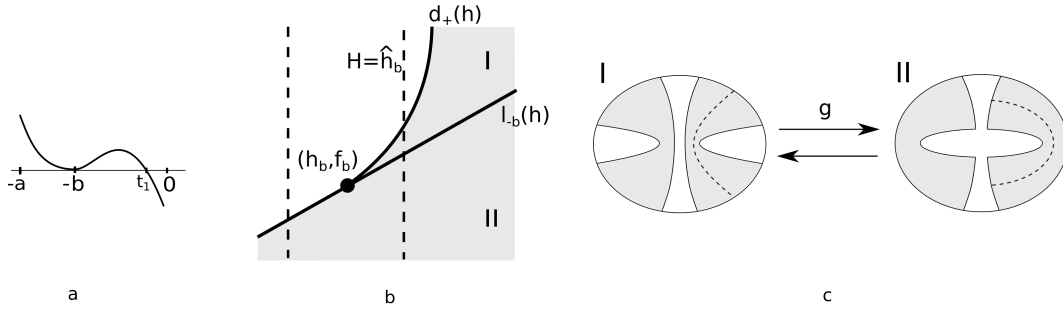


Рис. 42: Случай G_2 при $c_1 < 0$ и $t_1 > -b$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки h_b, f_b . На рис. *c* изображены области возможного движения, соответствующие камерам I и II, и отображение g , переводящее одну область в другую.

стей, соответствующих дуге $f = d_+(h)$ бифуркационной диаграммы, лежат на дугах некоторой софокусной гиперболы (а не на дугах эллипса). Проведем следующее преобразование g областей возможного движения. Положим $g(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda'_1, \lambda'_2)$, где (λ_1, λ_2) задает эллиптические координаты точки области, а координаты (λ'_1, λ'_2) образа этой точки имеют вид

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -\frac{a-b}{b}(\lambda_2 + b) - b, \\ \lambda'_2 = -\frac{b}{a-b}(\lambda_1 + b) - b. \end{cases}$$

Поднимем это преобразование до преобразования $\hat{g}(\lambda_1, \lambda_2, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dot{\lambda}'_1, \dot{\lambda}'_2)$ фазового пространства, положив

$$\dot{\lambda}'_1 = -\frac{a-b}{b}\dot{\lambda}_2, \quad \dot{\lambda}'_2 = -\frac{b}{a-b}\dot{\lambda}_1.$$

Отметим, что такое преобразование корректно определено для биллиарда, ограниченного эллипсом и отрезком оси $x = 0$, оно сохраняет биллиардный закон отражения, при этом является послойным гомеоморфизмом. На рис. 42, *c* изображены области возможного движения после преобразования g . Осталось заметить, что преобразованная система полностью аналогична предыдущему подслучаю $c_1 < 0$ и $-a < t_1 < -b$, а $\hat{g}(\mathcal{F}^{-1}(O(h_b, f_b)))$ послойно гомеоморфно почти прямому произведению $S^1 \times Ba^3/\mathbb{Z}_2$. Но, как было отмечено, \hat{g} – послойный гомеоморфизм. Следовательно, слоение Лиувилля в прообразе окрестности $O(h_b, f_b)$ устроено аналогичным образом. Отметим также, что рассмотренный подслучай полностью аналогичен подслучаю $c_1 > 0$ и $t_1 < -a$.

Рассмотрим теперь подслучай $c_1 > 0$ и $-a < t_1 < -b$. Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_+(h)$ на четыре камеры. Области возможного движения, соответствующие значениям интегралов каждой камеры, изображены на рис. 42. Заметим, что каждая такая область не имеет точек пересечения с фиксированной софокусной гиперболой $\lambda = \lambda_0 \in (t_1, -b)$. Следовательно, прообраз окрестности $O(h_b, f_b)$ в фазовом пространстве состоит из трех непересекающихся компонент. Аналогично случаю G_1 при $c_1 > 0$ и $-a < t_1 < -b$ можно доказать, что компонента связности прообраза $\mathcal{F}^{-1}(O(h_b, f_b))$, образ которой при проекции на биллиард лежит между ветвями гиперболы $\lambda = \lambda_0$, послойно гомеоморфна прямому произведению, изображенному на рис. 32, *a*. Структура же слоения Лиувилля оставшихся двух компонент полностью аналогична предыдущему подслучаю.

Наконец, рассмотрим подслучай $c_1 > 0$ и $-b < t_1 < 0$. Области возможного движения, соответствующие значениям интегралов каждой из четырех камер образа отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) , изображены на рис. 44. Заметим, что каждая такая область не имеет точек пересечения с фиксированным софокусным эллипсом $\lambda = \lambda_0 \in (-b, t_1)$. Таким образом, весь прообраз окрестности $O(h_b, f_b)$ состоит из двух компонент связности. Слоение той компоненты, чей образ при проекции на биллиард лежит внутри области, ограниченной выделенным эллипсом, устроено аналогично случаю G_2 при $c_1 < 0$ и $t_1 < -a$. Слоение же другой компоненты, как и в случае G_1 при $c_1 > 0$ и $-b < t_1 < 0$, устроено как прямое произведение окружности на сечение, изображенное на рис. 32, *b*.

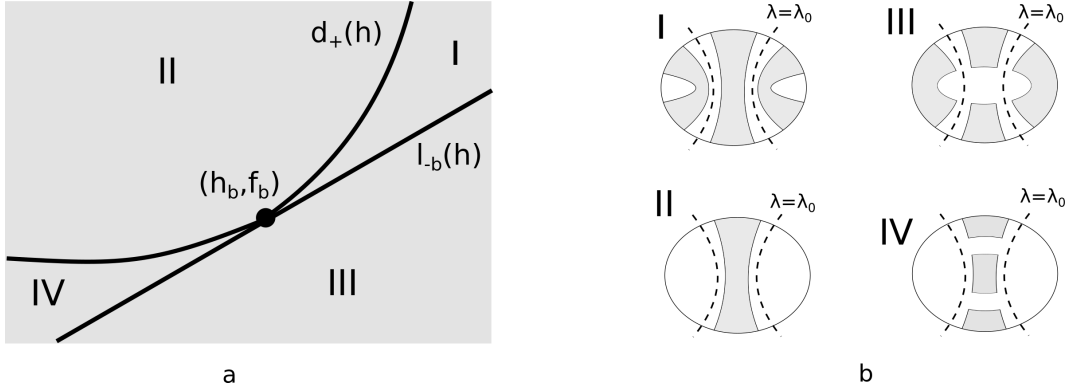


Рис. 43: Случай G_2 при $c_1 > 0$ и $-a < t_1 < -b$. На рис. *a* изображен образ отображения момента в окрестности точки h_b, f_b . На рис. *b* изображены области возможного движения, соответствующие камерам образа.

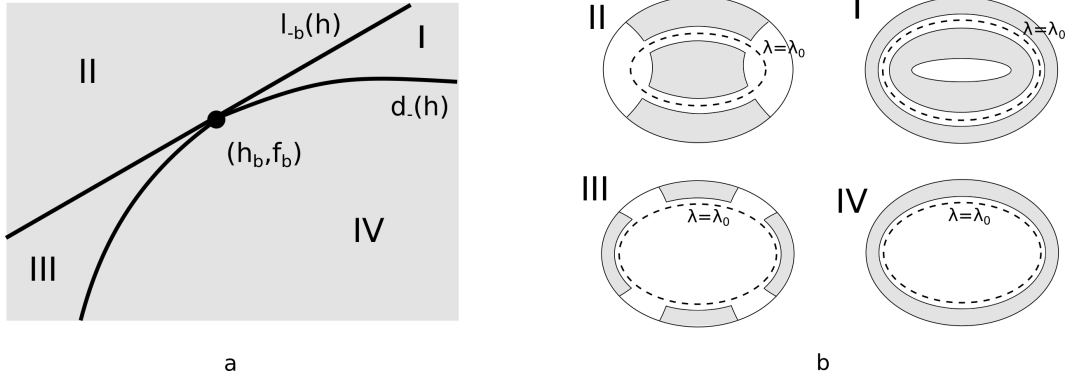


Рис. 44: Случай G_2 при $c_1 > 0$ и $-b < t_1 < 0$. На рис. *a* изображен образ отображения момента в окрестности точки h_b, f_b . На рис. *b* изображены области возможного движения, соответствующие камерам образа.

Перейдем теперь к случаю G_3 . Подставим значения интегралов $H = h_e$, $F = f_e$ в формулу многочлена $V(t)$. В этом случае он имеет вид $V(t) = c_1(t - \hat{\lambda})^3$ при $c_1 > 0$ и $\hat{\lambda} \in (-a, -b)$. Точка (h_e, f_e) является точкой возврата дуг бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $f = d_+(h)$, которые разбивают образ отображения момента на две камеры. Область возможного движения, соответствующая значениям первых интегралов из камеры I, состоит из трех компонент, ограниченных дугами софокусных гипербол $\lambda = \varepsilon_1$, $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. При этом область камеры II ограничена лишь одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$. Образ отображения момента в окрестности $O(h_e, f_e)$ и области возможного движения изображены на рис. 45. Отметим, что, как и в предыдущих случаях, в прообразе этой окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_e, f_e))$ задано тривиальное расслоение на окружности, образы которых при проекции на бильярд разбивают области возможного движения на дуги софокусных гипербол. В качестве базы этого расслоения возьмем глобальное сечение, образ которого лежит на фокальной оси. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_e < h_e$ и проследим за изменением этого сечения при изменении значения интеграла F . При $f < d_-(\hat{h}_e)$ в области возможного движения лежит лишь один отрезок фокальной оси $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, прообраз которого в M^4 гомеоморфен окружности. При $f = d_-(\hat{h}_e)$ этот отрезок имеет критические точки $-a - \hat{t}_1$ и $a + \hat{t}_1$, где $\hat{t}_1 = \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 3c_1 h}}{3c_1}$, а его прообраз гомеоморфен “тройной восьмерке”, т.е. особому слою 2-атома B_2 . При $d_-(\hat{h}_e) < f < d_+(\hat{h}_e)$ отрезок делится на три отрезка $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$, $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$ и $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$. При $f = d_+(\hat{h}_e)$ два из них стягиваются в точки $-a - \hat{t}_2$ и $a + \hat{t}_2$, где $\hat{t}_2 = \frac{-c_0 + \sqrt{c_0^2 - 3c_1 h}}{3c_1}$. Таким образом, выбранное глобальное сечение прообраза $\mathcal{F}^{-1}(O(h_e, f_e))$, ограниченное на уровень энергии $H = \hat{h}_e$, послойно гомеоморфно расслоенному кольцу, изображенному на рис. 46. При

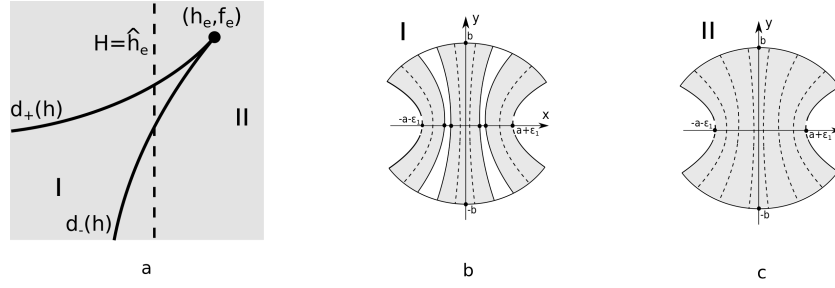


Рис. 45: Случай G_3 . На рис. a изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_e, f_e) . На рис. b и c изображены области возможного движения, соответствующие камерам I и II соответственно.

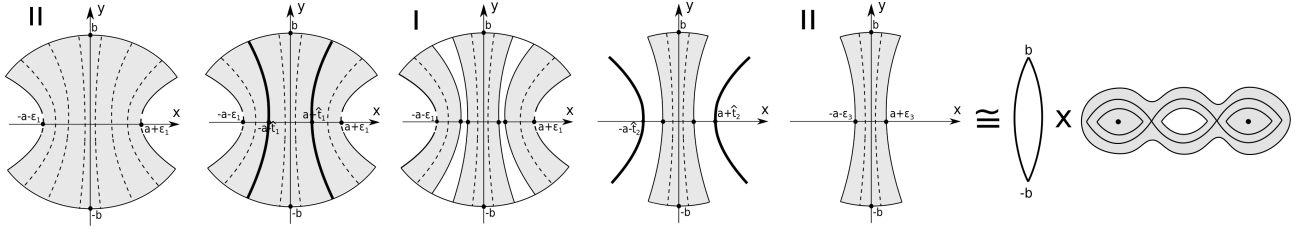


Рис. 46: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_e < h_e$

$\hat{h}_e \rightarrow h_e - 0$ особые точки этого сечения $-a - \hat{t}_1$ и $-a - \hat{t}_2$, а также точки $a + \hat{t}_1$ и $a + \hat{t}_2$, сливаются вместе и исчезают при $\hat{h}_e > h_e$. Таким образом, все глобальное сечение (база расслоения) имеет структуру слоения Лиувилля, изображенную на рис. 32, d . Весь прообраз окрестности $O(h_e, f_e)$ послойно гомеоморфен прямому произведению полученной трехмерной базы на окружность S^1 .

Рассмотрим случай G_4 . В отличие от случая G_3 кратный корень $t = \hat{\lambda}$ многочлена $V(t)$ лежит в интервале $(-b, 0)$. Образ отображения момента в окрестности точки (h_e, f_e) устроен аналогично, при этом камере I соответствует область возможного движения, ограниченная тремя софокусными эллипсами, а камере II соответствует область, ограниченная одним эллипсом (см. рис. 47). Отметим, что прообраз этой окрестности в фазовом пространстве состоит из двух компонент связности, отвечающих за движение по часовой стрелке и против часовой стрелки в областях возможного движения. Здесь структуру тривиального расслоения на окружности задает разбиение этих областей на софокусные эллипсы, при этом в качестве базы выберем сечение, образ которого при проекции на билиард лежит на луче оси $x = 0$ при $y > 0$. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_e < h_e$. При $f < d_-(\hat{h}_e)$ в образе сечения лежит один отрезок $[\varepsilon_1 + b, b]$, прообраз которого гомеоморфен окружности. При $f = d_-(\hat{h}_e)$ этому образу также принадлежит точка $b + \hat{t}_1$, которая вырастает в отрезок $[\varepsilon_3 + b, \varepsilon_2 + b]$. При $f = d_+(\hat{h}_e)$ эти два отрезка сливаются в один в точке $b + \hat{t}_2$, что соответствует перестройке двух окружностей в одну через особый слой 2-атома B . Следовательно, сечение прообраза $\mathcal{F}^{-1}(O(h_e, f_e))$, ограниченное на уровень энергии $H = \hat{h}_e$, имеет структуру, изображенную на рис. 47. При

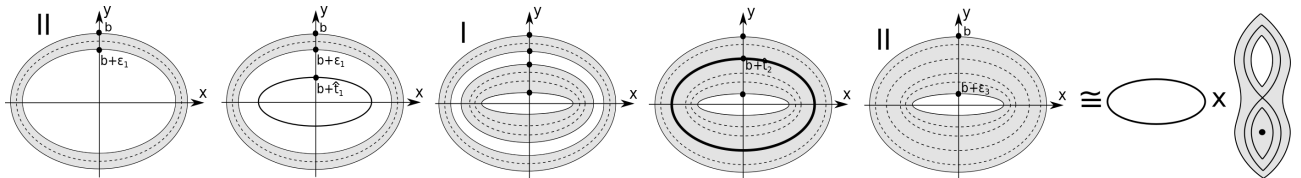


Рис. 47: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_e < h_e$

$\hat{h}_e \rightarrow h_e - 0$ особые точки $b + \hat{t}_1$ и $b + \hat{t}_2$ сливаются и исчезают при $\hat{h}_e > h_e$. Таким образом, слоение Лиувилля всего сечения (базы расслоения) имеет структуру, изображенную на рис. 32, e , а вся окрестность особого слоя

послойно гомеоморфна прямому произведению полученной базы на окружность.

Наконец, рассмотрим случай G_5 . Подставляя значения интегралов $H = h_0$ и $F = f_0$ в формулу многочлена $V(t)$ получим, что он имеет два корня $t = 0$ и $t = t_1$, причем первый из них – кратный. Как и в случаях G_1 и G_2 , здесь возникает восемь подслучаев в зависимости от знака параметра c_1 и расположения корня t_1 . Однако можно показать, что при $c_1 < 0$, а также $c_1 > 0$ и $t_1 > 0$, образ отображения момента в окрестности точки (h_0, f_0) имеет лишь одну гладкую дугу бифуркационной диаграммы, представляющую собой дугу кривой $f = d_-(h)$, переходящую в луч $f = 0$ при $h > 0$. Следовательно, критическая окружность, образ которой лежит на границе биллиарда $\lambda = 0$, не является “вырожденной” в смысле структуры слоения Лиувилля в ее окрестности. Кроме того, при $c_1 > 0$ и $t_1 > -a$ многочлен $V(t)$ принимает положительные значения на отрезке $[-a, -b]$, что означает отсутствие движения для данных значений интегралов. Таким образом, имеют место два подслучая: $c_1 > 0$ и $-a < t_1 < -b$, а также $c_1 > 0$ и $-b < t_1 < 0$. Рассмотрим первый из них. Точка (h_0, f_0) является точкой возврата дуг бифуркационной диаграммы $f = d_+(h)$ и $f = 0$, которые разбивают образ отображения момента на две камеры. Области возможного движения, соответствующие значениям интегралов каждой камеры, изображены на рис. 48, *b*. Проведем рассуждения, аналогичные случаю G_3 , однако теперь в качестве глобального сечения возьмем то, образ которого при проекции на биллиард лежит на оси $x = 0$. Результирующее слоение аналогично этому случаю (см. рис. 32, *d*). Для оставшегося подслучая $c_1 >$

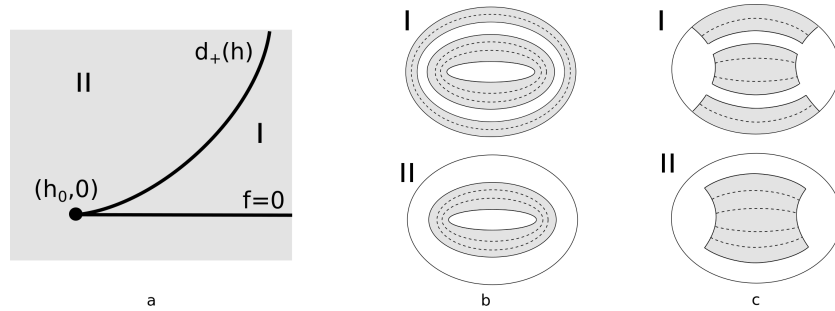


Рис. 48: Случай G_5 . На рис. *a* изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_0, 0)$. На рис. *b* и *c* изображены области возможного движения для подслучаев $c_1 > 0$, $-a < t_1 < -b$ и $c_1 > 0$, $-b < t_1 < 0$ соответственно.

$-b < t_1 < 0$ области возможного движения, соответствующие камерам I и II образа отображения момента, имеют вид, изображенный на рис. 48, *c*. Этот подслучай полностью аналогичен случаю G_4 . Соответствующее слоение изображено на рис. 32, *e*.

Таким образом, были рассмотрены все случаи вырожденных орбит ранга 1 с точки зрения структуры слоения Лиувилля инвариантных четырехмерных окрестностей слоев, содержащих эти орбиты. Теорема доказана. ■

Список литературы

- [1] Биркгоф Дж., Динамические системы М.;Л.; Гостехиздат, 1936.
- [2] Якоби К., Лекции по динамике. М.; Гостехиздат, 1936.
- [3] Козлов В. В., Трещев Д. В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. – М.: Изд-во МГУ, 1991. –168 с.
- [4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. – Ижевск: РХД, 1999.
- [5] Фокичева В. В., Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.

- [6] Фоменко А. Т., Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем. - Доклады АН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075.
- [7] Фоменко А. Т., Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. - Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.
- [8] Фоменко А. Т., Цишанг Х., О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем. - Известия АН СССР, 1988, т.52, No.2, с.378-407.
- [9] Матвеев С. В., Фоменко А. Т., Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами. - Математические Заметки, 1988, т.43, No.5, с.663-671.
- [10] Фоменко А. Т., Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. - Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51.
- [11] Фоменко А. Т., Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем. - Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.
- [12] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т., Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. - Успехи математических наук. 1990, т.45, вып.2, с.49-77.
- [13] Фоменко А. Т., Цишанг Х., Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. - Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.
- [14] Нгуен Т. З., Фоменко А. Т., Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере. - Успехи математических наук. 1990, т.45, вып.6, с.91-111.
- [15] Фоменко А. Т., Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем. - Известия АН СССР. серия матем. т.55, No.4, 1991, с.747-779
- [16] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко., Интегрируемые геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева-Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела. - Математические заметки. 1994, т.56, No.2, с.139-142.
- [17] Козлов В. В., Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.
- [18] И. Ф. Кобцев, Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ, Матем. сб., 211:7 (2020), 93–120
- [19] Пустовойтов С. Е., Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021.
- [20] Nguen Tien Zung., Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems. // Letters of Mathematical Physics, 1995, v. 33, pp. 187-193