

**ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ИНТЕГРИРУЕМОГО  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БИЛЛИАРДА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ.<sup>1</sup>**  
Пустовойтов С. Е.

## Введение

Под понятием математического бильярда скрывается обширный класс динамических систем. Классическое определение, восходящее к работам Дж. Биркгофа [1] и К. Якоби [2], гласит, что математический бильярд является динамической системой, описывающей равномерное движение материальной точки в плоской области, ограниченной некоторым контуром, с абсолютно упругим отражением от границы. Однако теперь появилось множество вариаций и обобщений этого определения. Как классический бильярд, так и его различные вариации были рассмотрены многими авторами с самых разных точек зрения: эргодичность и интегрируемость, вычисление траекторий, оценка числа вращения и прочее. Одно из основных преимуществ математических бильярдных систем перед другими динамическими системами состоит в его наглядности. Многие утверждения, требующие громоздких вычислений в классических системах динамики, могут быть доказаны из элементарных геометрических соображений. Остановимся на бильярде внутри плоской области, ограниченной эллипсом, в потенциальном поле. Встает вопрос интегрируемости такого бильярда, т.е. существования дополнительного первого интеграла, независимого от полной энергии системы. Так, критерий интегрируемости с дополнительным интегралом определенного вида был приведен В. В. Козловым в [3], а интегрируемые потенциалы в форме многочлена Лорана (их общий вид) были описаны В. И. Драговичем в [4]. Мы же ограничимся классом полиномиальных потенциалов.

Нас будет интересовать структура слоения Лиувилля фазового четырехмерного пространства  $M^4$  (пространства состояний точка-вектор такого бильярда), т.е. его разбиения на общие поверхности уровней интегралов. Так, анализ слоений неособых изоэнергетических подмногообразий для бильярда с потенциалом второго порядка (упругим потенциалом Гука) провел И. Ф. Кобцев в [5], а четвертого порядка – автор в [6]. Данная же работа является обобщением предыдущих двух для интегрируемого полиномиального потенциала произвольного порядка. Для этого мы используем язык 3-атомов и инвариантов Фоменко-Цишанга, изложенный в [7]. Главным результатом нашей работы является алгоритм, позволяющий вычислить такой инвариант слоения для любого неособого уровня энергии, а также построить бифуркационную диаграмму для каждого конкретного потенциала. Помимо этого, была обнаружена лиувиллева эквивалентность данного бильярда с интегрируемыми системами динамики твердого тела, и установлен топологический тип неособых изоэнергетических многообразий. Таким образом, данная работа подводит нас ближе к решению вопроса, сформулированного А. Т. Фоменко, о реализации произвольной интегрируемой системы с помощью бильярда с точки зрения лиувиллевой эквивалентности.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной за многочисленные обсуждения и ценные научные советы, а также В. И. Драговичу за важный комментарий, определивший постановку задачи.

## 1 Необходимые определения.

Пусть на симплектическом многообразии  $(M^4, \omega)$  задана автономная гамильтонова динамическая система  $v = sgrad(H) := \omega^{-1}dH$  с гамильтонианом  $H$ . Такая система на-

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-71-10106 в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова.

зывается *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если она допускает первый интеграл  $F$ , функционально независимый с гамильтонианом, при этом векторные поля  $sgrad(H)$  и  $sgrad(F)$  полны. *Слоением Лиувилля* в данном случае называется разбиение многообразия  $M^4$  на общие поверхности уровней интегралов  $\{H = const, F = const\}$ . Отметим, что такие поверхности являются инвариантными для потоков первых интегралов. Согласно знаменитой *теореме Лиувилля*, компактный регулярный слой такого слоения диффеоморфен двумерному тору, называемому *тором Лиувилля*, при этом слоение в четырехмерной окрестности такого тора устроено тривиально. Преимущественно в работе мы изучаем слоение Лиувилля неособого изоэнергетического подмногообразия  $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$  (т.е.  $dH \neq 0$  для любой точки  $x \in Q^3$ ), для которого дополнительный интеграл  $F$  является *функцией Ботта*. Это означает, что критические точки функции  $F$  на  $Q^3$  организуются либо в систему непересекающихся окружностей, либо в систему двумерных торов, либо в систему бутылок Клейна. Потребуем, что системе соответствуют только критические окружности. Тогда особые слои слоения Лиувилля, на которых лежат эти окружности, вместе со своими трехмерными окрестностями образуют некоторые расслоенные ориентируемые многообразия с краем. Класс эквивалентности таких многообразий с точностью до послыоного диффеоморфизма, сохраняющего их ориентацию и ориентацию критических окружностей, называется *3-атомом*, при этом такое отношение эквивалентности назовем *лиувиллевым*. Все 3-атомы были классифицированы А. Т. Фоменко, А. В. Болсиновым и А. А. Ошемковым в [7] и описывают боттовские бифуркации торов Лиувилля. Забегая вперед, отметим, что в нашей работе будут встречаться только 3-атомы  $A$ ,  $A^*$ , атомы серий  $B_k$  и  $C_k$ , где  $k$  – количество критических окружностей (рис. 1). Рассмотрим теперь базу слоения

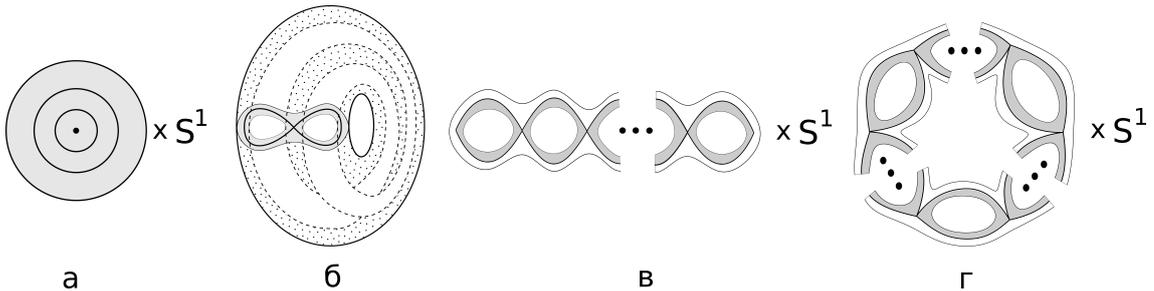


Рис. 1: Примеры 3-атомов. На рис. а изображен атом  $A$ , на рис. б – атом  $A^*$ , на рис. в – атом серии  $B_k$ , на рис. г – атом серии  $C_k$

Лиувилля неособого многообразия  $Q^3$ . Такая база является одномерным комплексом и называется *графом Роба*. Вершины графа соответствуют некоторым критическим слоям, а перестройкам торов Лиувилля через эти слои – 3-атомы. Таким образом, соотнесем вершинам соответствующие 3-атомы. Полученный инвариант слоения называется *грубым инвариантом Фоменко* или же *грубой молекулой*. Отметим, что каждой внутренней точке графа Роба соответствует тор Лиувилля. Дополним теперь грубую молекулу числовыми метками, полностью описывающими, как именно граничный тор Лиувилля одного 3-атома переходит в граничный тор другого при движении по ребру, соединяющему эти атомы. Полученный инвариант назовем *инвариантом Фоменко-Цишанга*, или *меченой молекулой*. Более подробно то, как именно определяются метки, описано в [7]. Оказывается, построенный таким образом инвариант является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности. А именно, верна следующая теорема.

**Теорема 1.** (Фоменко-Цишанг) Системы  $v_1$  и  $v_2$  на  $Q_1^3$  и  $Q_2^3$  лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

## 2 Постановка задачи. Интегрируемость.

Рассмотрим математический бильярд внутри плоской области  $\Omega$ , ограниченной эллипсом, заданным уравнением  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$  в декартовых координатах (здесь  $a > b > 0$ ). Попадая на границу, материальная точка отражается от нее абсолютно упруго. Положим, что на точку действует некоторый потенциал  $W(x, y) \in C^\infty(\Omega)$ . Таким образом, ее движение удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -W_x \\ \ddot{y} = -W_y \end{cases} \quad (1)$$

Фазовым пространством этой системы является симплектическое многообразие  $(M^4, \omega)$ . Многообразие  $M^4$  имеет следующий вид:

$$M^4 = T^*\Omega / \{(\vec{x}_b, \vec{p}_i(\vec{x}_b)) \sim (\vec{x}_b, \vec{p}_r(\vec{x}_b))\}, \quad (2)$$

то есть является кокасательным расслоением бильярдной области  $\Omega$ , факторизованным на своей границе согласно закону отражения (здесь  $\vec{x}_b$  – точка на границе бильярда,  $\vec{p}_i(\vec{x}_b)$  и  $\vec{p}_r(\vec{x}_b)$  – импульсы материальной точки при попадании на границу бильярда в точке  $\vec{x}_b$  и при отражении от нее соответственно). Симплектическая структура  $\omega$  имеет канонический вид в координатах  $(x, y, p_x, p_y)$ :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Описанная таким образом динамическая система является гамильтоновой на фазовом пространстве  $(M^4, \omega)$  с гамильтонианом следующего вида:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + W(x, y) \quad (4)$$

В [9] было доказано, что если материальная точка в таком бильярде движется по инерции (т.е.  $W \equiv 0$ ), то система допускает следующий первый интеграл движения:

$$\Lambda = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab}, \quad (5)$$

значение которого является параметром каустики  $\lambda = \Lambda$ , принадлежащей следующему однопараметрическому семейству софокусных квадрик:

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1 \quad (6)$$

Этот первый интеграл функционально независим с гамильтонианом  $H$  почти всюду и находится с ним в инволюции относительно симплектической структуры  $\omega$ . Следовательно, классический бильярд в эллипсе является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Топологическим анализом и классификацией такого бильярда, а также бильярдных, ограниченных квадратами софокусного семейства (6), занималась В. В. Ведюшкина в [8].

Однако в общем случае при произвольном потенциале  $W$  интегрируемость нарушается. В. В. Козлов в [3] предложил следующий критерий интегрируемости.

**Утверждение 1** (В.В.Козлов). *Биллиард в эллипсе с потенциалом  $W \in C^\infty(\Omega)$  допускает первый интеграл вида  $G = \Lambda + g(x, y)$ , если и только если потенциал  $W$  удовлетворяет следующему уравнению:*

$$(a - b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0 \quad (7)$$

Примерами таких потенциалов являются квадратичный потенциал Гука  $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$  и потенциал четвертой степени вида  $W = \beta x^2 + \alpha y^2 + \frac{2(\alpha - \beta)}{a - b}x^2 y^2 + \frac{\alpha - \beta}{a - b}(x^4 + y^4)$ . Топологический анализ биллиардов с этими потенциалами был проведен И. Ф. Кобцевым в [5] и автором в [6].

Общее решение уравнения (7) в форме полинома Лорана было найдено В. И. Драговичем в работе [4]. В нашей работе мы ограничимся случаем обычного полиномиального потенциала произвольной степени  $n$  в декартовой системе координат (примеры таких потенциалов были приведены выше). Опишем сначала некоторые его важные свойства.

**Лемма 1.** *Общее решение уравнения (7) в виде многочлена*

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{i+j=n} a_{i,j} x^i y^j \quad (8)$$

удовлетворяет следующим свойствам:

- 1)  $a_{i,j} = 0$  при  $2 \nmid i$  или  $2 \nmid j$ ;
- 2) пространство решений вида (8) имеет размерность  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

*Доказательство.* Подставим функцию вида (8) в уравнение (7). В полученном уравнении коэффициент при  $x^{i-1}y^{j-1}$  имеет следующий вид:

$$(a - b)ija_{i,j} + i(i + j)a_{i,j-2} - j(i + j)a_{i-2,j} = 0, \quad (9)$$

где  $i > 0, j > 0, i + j \leq n + 2$ . При этом полагаем, что  $a_{-1,i} = a_{i,-1} = a_{i,n+1-i} = a_{i,n+2-i} = 0$  для любого  $i \in \overline{0..n+1}$ .

Таким образом, дифференциальное уравнение (7) преобразовалось в систему линейных уравнений типа (9) относительно коэффициентов  $a_{i,j}$ . Заметим, что эта система состоит из четырех независимых подсистем от переменных вида  $a_{2k+1,2l+1}, a_{2k,2l+1}, a_{2k+1,2l}$  и  $a_{2k,2l}$  соответственно. Рассмотрим каждую из них по отдельности при условии, что число  $n$  четно (для нечетного  $n$  доказательство аналогичное).

Начнем с системы на  $a_{2k+1,2l+1}$ . Рассмотрим уравнение (9) для произвольного нечетного  $i$  и  $j = n + 2 - i$ . Из условий на систему следует, что  $a_{i,j} = 0$ . Следовательно, если коэффициент  $a_{i-2,j} = 0$ , то и  $a_{i,j-2} = 0$ . Однако, при  $i = 1$  и  $j = n + 1$  коэффициент  $a_{-1,n+1}$  равен нулю по условию на систему. Следовательно, коэффициент  $a_{2k+1,2l+1} = 0$  при  $2k + 2l + 2 = n$ . Рассмотрим теперь уравнение (9) для произвольного нечетного  $i$  и  $j = n - i$ . Из доказанного выше  $a_{i,j} = 0$ . Проведя аналогичные рассуждения, получим, что  $a_{2k+1,2l+1} = 0$  при  $2k + 2l + 2 = n - 2$ . Таким образом, уменьшая каждый раз значение суммы  $i + j$  на два, получим, что  $a_{2k+1,2l+1} = 0$  при любых возможных значениях  $k$  и  $l$ .

Рассмотрим теперь систему на  $a_{2k,2l+1}$ . Аналогично предыдущему случаю, рассмотрим уравнение (9) при произвольном четном  $i$  и  $j = n + 1 - i$ . Из условий на систему следует, что  $a_{i,j} = 0$ . Следовательно, если коэффициент  $a_{i,j-2} = 0$ , то и  $a_{i-2,j} = 0$ . Однако, коэффициент  $a_{n,-1} = 0$  из условий на систему. Следовательно,  $a_{2k,2l+1} = 0$  при  $2k + 2l + 1 = n - 1$ . Таким образом, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, получим, что  $a_{2k,2l+1} = 0$  при любых возможных значениях  $k$  и  $l$ .

Рассуждения для системы на  $a_{2k+1,2l}$  повторяют рассуждения для предыдущего случая с точностью до замены индексов  $i$  на  $j$ . Следовательно, коэффициенты вида  $a_{2k+1,2l}$  также равны нулю, что завершает доказательство первого пункта леммы.

Наконец, рассмотрим систему на  $a_{2k,2l}$ . При  $i = 0$  и  $j = n+2$  уравнение (9) становится тождественным  $0 = 0$ . Обозначим коэффициент  $a_{0,n}$  за  $\alpha_1$ . При  $i+j = n+2$  коэффициент  $a_{i,j} = 0$ . Следовательно, значение коэффициента  $a_{i,j-2}$  линейно зависит от значения  $a_{i-2,j}$ , если  $i \neq 0$ . Таким образом, коэффициент вида  $a_{2k,2l}$  является линейной функцией относительно параметра  $\alpha_1$ .

Аналогично, при  $i = 0$  и  $j = n$  уравнение (9) становится тождественным  $0 = 0$ . Обозначим коэффициент  $a_{0,n-2}$  за  $\alpha_2$ . По доказанному ранее, при  $i+j = n$  коэффициент  $a_{i,j} = a_{i,j}(\alpha_1)$ . Следовательно, значение коэффициента  $a_{i,j-2}$  линейно зависит от значения  $a_{i-2,j}$  и параметра  $\alpha_1$ , если  $i \neq 0$ . Таким образом, коэффициент вида  $a_{2k,2l}$  является линейной функцией относительно параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Проведя аналогичные рассуждения, несложно доказать, что в общем случае коэффициент вида  $a_{2k,2l}$  при  $2k + 2l = n - 2(m - 1)$  является линейной функцией от параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , при этом  $a_{0,n-2(m-1)} = \alpha_m$  для  $m$  от единицы до  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Заметим, что параметры  $\alpha_m$  были выбраны независимо друг от друга и в исходной системе линейных уравнений каждое уравнение типа (9) было использовано для вычисления значения коэффициента  $a_{i,j-2}$ . Следовательно, параметры  $\alpha_m$  являются координатами в пространстве решений уравнения (7), а размерность этого пространства равняется  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

Лемма доказана. □

**Замечание 1.** Используя идеи доказательства леммы 1, несложно восстановить алгоритм решения системы линейных уравнений (9) (был впервые проведен В. И. Драгови-чем в [4]). Известно, что при  $2k + 2l = n$ , решение имеет вид  $a_{2k,2l} = \binom{k+l}{k} \alpha_1$ . Однако, в произвольном случае зависимость коэффициента  $a_{2k,2l}$  от параметров  $\alpha_m$  имеет более сложный вид. Тем не менее, общий вид решения уравнения (7) в форме многочлена (8) будет приведен в дальнейшем в эллиптических координатах.

Перейдем теперь от используемых ранее декартовых координат  $(x, y)$  к эллиптическим координатам  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Уравнения перехода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b}, \\ y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a}. \end{cases} \quad (10)$$

Координатными линиями в этой системе координат являются эллипсы и гиперболы, принадлежащие софокусному семейству (6). При этом координата  $\lambda_1 \in [-a, -b)$  является параметром гиперболы, а координата  $\lambda_2 \in (-b, \infty)$  является параметром эллипса. Уравнение границы бильярда имеет вид  $\lambda_2 = 0$ .

**Замечание 2.** Эллиптические координаты плохи тем, что матрица Якоби является вырожденной на координатных осях  $0x$  и  $0y$ . Поэтому все формулы, которые будут использоваться в дальнейшем, имеют место при  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ , а поведение системы на осях определяется по непрерывности.

Гамильтониан в эллиптических координатах имеет следующий вид:

$$H = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_2^2 + W(\lambda_1, \lambda_2), \quad (11)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются обобщенными импульсами, соответствующими координатам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно.

Следующая лемма дает общий вид решения уравнения (7) в форме многочлена (8) в эллиптических координатах.

**Лемма 2.** Уравнение (7) в эллиптических координатах (10) имеет следующий вид:

$$xy\left(\frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - W_{12}\right) = 0, \quad (12)$$

где  $W_i$  — частная производная функции  $W$  по  $\lambda_i$ .

Общее решение уравнения (7) в форме многочлена (8) имеет следующий вид:

$$W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (13)$$

где  $P$  — произвольный многочлен степени  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ .

*Доказательство.* Докажем, что уравнение (12) равносильно уравнению (7). Обратные формулы перехода от эллиптических координат к декартовым имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b - R(x, y)), \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b + R(x, y)), \end{cases} \quad (14)$$

где  $R(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a + b)^2 + 4(a - b)y^2}$ . Из этой системы получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \lambda'_{1_x} &= \frac{2x(\lambda_1 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2}; & \lambda'_{1_y} &= \frac{2y(\lambda_1 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \lambda'_{2_x} &= -\frac{2x(\lambda_2 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2}; & \lambda'_{2_y} &= -\frac{2y(\lambda_2 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \lambda''_{1_{xx}} &= \frac{2(\lambda_1 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{8x^2(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; & \lambda''_{1_{yy}} &= \frac{2(\lambda_1 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{8y^2(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; \\ \lambda''_{2_{xx}} &= -\frac{2(\lambda_2 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{8x^2(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; & \lambda''_{2_{yy}} &= -\frac{2(\lambda_2 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{8y^2(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; \\ \lambda''_{1_{xy}} &= \lambda''_{2_{xy}} & &= -\frac{4xy((\lambda_1 + a)(\lambda_2 + b) + (\lambda_1 + b)(\lambda_2 + a))}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (7) в эллиптических координатах. Получим уравнение вида

$$A_1W_1 + A_2W_2 + A_{11}W_{11} + A_{22}W_{22} + A_{12}W_{12} = 0,$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda''_{1_{xy}} + xy(\lambda''_{1_{xx}} - \lambda''_{1_{yy}}) + 3(y\lambda'_{1_x} - x\lambda''_{1_y}); \\ A_2 &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda''_{2_{xy}} + xy(\lambda''_{2_{xx}} - \lambda''_{2_{yy}}) + 3(y\lambda'_{2_x} - x\lambda''_{2_y}); \\ A_{11} &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda'_{1_x}\lambda'_{1_y} + xy((\lambda'_{1_x})^2 - (\lambda'_{1_y})^2); \\ A_{22} &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda'_{2_x}\lambda'_{2_y} + xy((\lambda'_{2_x})^2 - (\lambda'_{2_y})^2); \\ A_{12} &= (y^2 - x^2 + a - b)(\lambda'_{1_x}\lambda'_{2_y} + \lambda'_{2_x}\lambda'_{1_y}) + 2xy(\lambda'_{1_x}\lambda'_{2_x} - \lambda'_{1_y}\lambda'_{2_y}). \end{aligned}$$

Подставим полученные ранее выражения для частных производных эллиптических координат по декартовым в формулы коэффициентов  $A_{ij}$  и получим  $A_{11} = A_{22} = 0$ ,  $A_{12} = 4xy(a - b)$ ,  $A_2 = -A_1 = \frac{4xy(a-b)}{\lambda_1 - \lambda_2}$ . Таким образом, была доказана равносильность уравнений (12) и (7).

Доказательство того, что функция (13) является решением уравнения (12), состоит в непосредственной подстановки одной формулы в другую. Заметим, что пространство

решений вида (13) имеет размерность  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Действительно, свободный коэффициент  $c_0$  многочлена  $P(z)$  сокращается сам с собой в формуле (13). Слагаемое  $c_1 z$  многочлена  $P(z)$  изменяет потенциал  $W$  на константу. Следовательно, многочлен  $P$  определен с точностью до своей линейной части  $c_1 z + c_0$ , а оставшиеся его  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  коэффициентов  $c_2, \dots, c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$  являются координатами в пространстве решений.

Докажем, что функция  $\frac{\lambda_1^{(m+1)} - \lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}$  является многочленом степени  $2m$  в декартовых координатах. Действительно,

$$\frac{\lambda_1^{(m+1)} - \lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{i=0}^m \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} + \lambda_1^{m-i} \lambda_2^i,$$

$$\lambda_1^k \lambda_2^{k+l} + \lambda_1^{k+l} \lambda_2^k = (\lambda_1 \lambda_2)^k (\lambda_1^l + \lambda_2^l).$$

Из формул (14) несложно заметить, что функция  $\lambda_1 \lambda_2$  является многочленом второй степени, а функция  $\lambda_1^l + \lambda_2^l$  является многочленом степени  $2l$  для любого  $l$ . Следовательно, функция вида (13) является многочленом степени  $n$  в декартовых координатах. Таким образом, пространство решений вида (13) является подпространством пространства решений вида (8). Согласно лемме 1 эти два подпространства совпадают в силу размерности.

Лемма доказана.  $\square$

**Замечание 3.** Заметим, что функция (13) является решением уравнения (12) даже в общем случае  $P \in C^\infty(\mathbb{R})$  (также проверяется непосредственной подстановкой). Это дает еще больший класс интегрируемых бильярдов с потенциалом, который будет рассмотрен в будущих работах.

В дальнейшем для определенности положим  $c_0 = 0$  и  $c_1 = 0$ .

**Теорема 2.** Следующая функция является первым интегралом эллиптического бильярда с потенциалом  $W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$ :

$$F = -H\lambda_1 + 2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1) \quad (15)$$

Интегралы  $H$  и  $F$  находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду. Функция  $F$  связана с первым интегралом  $G$  из утверждения 1 соотношением  $F = -\frac{1}{2}G$ .

*Доказательство.* Сначала докажем, что функция  $F$  сохраняется вдоль траекторий между ударами о границу бильярда. Вычислим значение  $\dot{F}$

$$\dot{F} = -H\dot{\lambda}_1 + 2\dot{\lambda}_1(b + \lambda_1)\mu_1^2 + 2\dot{\lambda}_1(a + \lambda_1)\mu_1^2 + 4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1\dot{\mu}_1 + P'(\lambda_1)\dot{\lambda}_1$$

Подставим значения  $\dot{\lambda}_1$  и  $\dot{\mu}_1$  из уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i}, \\ \dot{\mu}_i = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \end{cases} \quad (16)$$

Можно убедиться, что после подстановки получим тождественный ноль. А значит,  $F = const$  вдоль траекторий между отражениями.

Теперь докажем, что функция  $F$  сохраняется при отражении от стенки бильярда. Заметим, что при отражении значение интеграла  $H$  и координаты  $\lambda_1$  не меняются. Следовательно, достаточно проверить лишь неизменность величины  $\mu_1^2$ . Отметим, что

закон абсолютно упругого отражения от софокусной квадрики в эллиптических координатах можно записать следующим образом: если точка отражается от гиперболы, то вектор скорости изменится по правилу  $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) \rightarrow (-\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$ , а если точка отражается от эллипса, то вектор скорости изменится по правилу  $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) \rightarrow (\dot{\lambda}_1, -\dot{\lambda}_2)$ . Из уравнений Гамильтона (16) вытекает следующая формула:

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1. \quad (17)$$

Следовательно, вектор импульса  $(\mu_1, \mu_2)$  меняется при отражении аналогично вектору скорости, и значение  $\mu_1^2$  остается неизменным.

То, что первые интегралы  $H$  и  $F$  находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду и то, что интеграл  $F$  имеет вид  $-\frac{1}{2}G$ , проверяются непосредственно. Опустим соответствующие выкладки.

Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 4.** Определим две следующие функции:

$$H_1 = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1) + P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 \quad (18)$$

$$H_2 = \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2) + P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2. \quad (19)$$

Тогда первые интегралы запишутся в виде  $H = H_1 - H_2$ ,  $F = \lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1$ . При этом вклад потенциала в интеграл  $G$  равен  $g = 2 \frac{\lambda_2 P(\lambda_1) - \lambda_1 P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$  и тоже является многочленом от декартовых переменных  $x$  и  $y$ , причем каждый его моном имеет также четную степень по обоим переменным.

Таким образом, было доказано, что билиард в эллипсе с потенциалом типа (13) (который является многочленом в декартовых координатах) вполне интегрируем по Лиувиллю, при этом дополнительный первый интеграл  $F$  задан явно. Проведем топологический анализ такой билиардной системы, используя язык полных инвариантов Фоменко-Цишанга и бифуркационных диаграмм.

### 3 Геометрическое разделение переменных. Области возможного движения.

Зафиксируем уровень интегралов  $H = h$  и  $F = f$ . Вычислим компоненты вектора скорости материальной точки в зависимости от ее координат. Чтобы это сделать, выразим значение  $\mu_1$  из формулы (17), подставим его в формулу (15) и выразим из нее значение  $\dot{\lambda}_1$ . Аналогичными рассуждениями можно выразить значение  $\dot{\lambda}_2$ , заметив, что

$$F = -H\lambda_2 + 2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 + P(\lambda_2).$$

Таким образом, была получена следующая формула:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{V(\lambda_i)(a + \lambda_i)(b + \lambda_i)}, \quad (20)$$

где  $V(z) = f + hz - P(z)$  — многочлен степени  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ . В декартовых координатах получим следующее:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( (-1)^I \sqrt{V(\lambda_1)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} + (-1)^J \sqrt{V(\lambda_2)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} \right) \\ \dot{y} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( (-1)^I \sqrt{-V(\lambda_1)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} + (-1)^J \sqrt{-V(\lambda_2)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} \right) \end{cases} \quad (21)$$

где  $I, J \in \{0, 1\}$ ,  $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}$ . В силу того, что  $-a \leq \lambda_1 \leq -b$  и  $-b \leq \lambda_2$ , это условие равносильно следующей системе:

**Утверждение 2.** Координаты материальной точки должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} V(\lambda_1) \leq 0 \\ V(\lambda_2) \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

*Доказательство.* Заметим, что все четыре подкоренные выражения в системе (21) должны быть не меньше нуля. Пусть  $(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) \neq 0$ . В силу того, что  $-a \leq \lambda_1 \leq -b$  и  $-b \leq \lambda_2$ ,  $(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) > 0$ . Но  $V(\lambda_2)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) \geq 0$  и  $-V(\lambda_1)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) \geq 0$ . Следовательно, неравенства системы (22) выполняются.

Аналогичные рассуждения применим для случая  $(a + \lambda_2)(b + \lambda_1) \neq 0$ . В случае  $(a + \lambda_1)(b + \lambda_2) = 0$  и  $(a + \lambda_2)(b + \lambda_1) = 0$  имеем  $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$ , т.е. материальная точка находится в фокусе эллипса. В выражениях из системы (21) появляется неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ . Пусть без ограничения общности  $V(-b) > 0$ . Тогда при  $\lambda_1 = -b$  и  $\lambda_2 \rightarrow -b + 0$  значение  $y$  стремится к  $\pm\infty$ , что невозможно в силу теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий. Следовательно  $V(\lambda_1) = V(\lambda_2) = V(-b) = 0$ , что удовлетворяет системе (22).

Утверждение доказано.  $\square$

**Определение 1.** Областью возможного (допустимого) движения уровня интегралов  $H = h$  и  $F = f$  называется образ соответствующего слоя слоения Лиувилля при проекции  $p : M^4 \rightarrow \Omega$  на бильярдный стол. Иными словами, это замкнутая область на бильярде, в которой материальная точка может находиться при фиксированных значениях интегралов  $h$  и  $f$ .

**Следствие 1.** Система неравенств (22) вместе с условием  $\lambda_2 \leq 0$  (условие того, что движение происходит внутри бильярдного стола) задает область возможного движения уровня интегралов  $H = h$  и  $F = f$ .

*Доказательство.* В качестве начальных условий положим точку  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , удовлетворяющей системе (22), и вектор скорости в этой точке, вычисленный по формулам (21). Согласно определению области возможного движения, точка с координатой  $(\lambda_1, \lambda_2)$  ей принадлежит. При этом по утверждению 2 траектория движения, определенная этими начальными условиями, полностью лежит в области, определенной системой (22).

Следствие доказано.  $\square$

**Замечание 5.** Такой подход в случае классического бильярда был использован в [9] для описания его регулярных и критических траекторий. В последствии М. П. Харламовым в [10] был разработан общий подход к изучению динамических систем, допускающие уравнения вида (20). Заметим, что любая область возможного движения ограничена софокусными эллипсами и гиперболами, принадлежащими однопараметрическому семейству (6), причем значениями параметров этих границ являются корни многочлена  $V$  или ноль. Иными словами, область возможного движения является объединением прямоугольников в эллиптических координатах. В этом смысле формулу (20) и систему (21) называют формулами геометрического разделения переменных.

**Замечание 6.** Также заметим, что если точка с координатами  $(\lambda_1, \lambda_2)$  не является фокусом граничного эллипса, то из системы (21) вытекает три возможности: 1) точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$  соответствуют две пары взаимно обратных векторов скорости, если ни  $\lambda_1$ , ни  $\lambda_2$  не являются корнями многочлена  $V$ ; 2) этой точке соответствует одна пара взаимно обратных векторов скорости, если только одно из значений  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  является корнем

многочлена  $V$  (эти вектора являются касательными к квадрике с параметром, равным той координате  $\lambda_i$ , которая является корнем); 3) точке соответствует единственный нулевой вектор скорости, если оба значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями многочлена  $V$ .

Рассмотрим теперь случай  $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$ , т.е. точка с координатами  $(\lambda_1, \lambda_2)$  является фокусом (без ограничения общности, считаем, что это фокус с координатами  $x = \sqrt{a-b}$  и  $y = 0$ ). По утверждению 2 многочлен  $V$  имеет вид  $V(z) = (z+b)R(z)$ , где  $R(-b) \geq 0$ . Рассмотрим точку в окрестности этого фокуса с координатами  $x = \sqrt{a-b} + k\cos\phi$  и  $y = k\sin\phi$  при некотором значении  $\phi$ . Согласно формулам (21), пределы значений компонент вектора скорости при  $k \rightarrow 0$  имеют следующий вид:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \dot{x} = C \cos\phi,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \dot{y} = C \sin\phi,$$

где  $C = \sqrt{2W(-b)}$ . Следовательно, фокусам соответствует целая окружность равных по длине векторов скорости при  $R(-b) \neq 0$  или один нулевой вектор скорости при  $R(-b) = 0$ .

Следующая теорема позволяет определить регулярные значения первых интегралов  $H$  и  $F$ .

**Теорема 3.** Пусть при фиксированных значениях первых интегралов  $H = h$  и  $F = f$  каждая компонента связности области возможного движения имеет непустую внутренность, и каждой внутренней точке области возможного движения соответствует четыре вектора скорости. Тогда прообраз этой области при проекции  $p$  гомеоморфен объединению нескольких двумерных торов. При этом, каждой односвязной компоненте связности области возможного движения соответствует один тор Лиувилля, а каждой неодносвязной (кольцевой) компоненте – два тора. Более того, слоение Лиувилля в окрестности этих торов в изоэнергетическом пространстве  $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$  устроено тривиально.

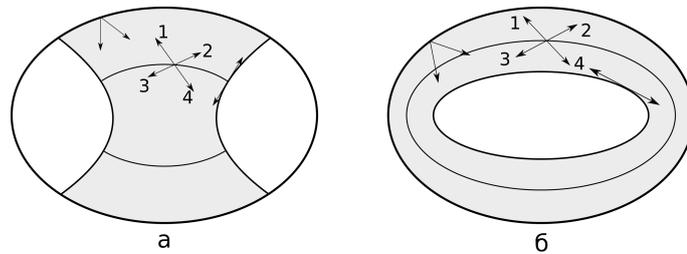


Рис. 2: Регулярные области возможного движения. Стрелками изображены векторы скорости. Внутренним точкам соответствуют четыре вектора, граничным точкам – два. На граничном эллипсе вектора 1-3 и 2-4 склеиваются согласно билиардному закону отражения.

*Доказательство.* Из замечания 6 следует, что фокус не принадлежит области возможного движения. Следовательно, согласно утверждению 2 существуют две возможности: 1) каждая компонента связности области возможного движения ограничена двумя дугами софокусных гипербол и дугами эллипсов (рис. 2, а); 2) каждая компонента связности ограничена двумя софокусными эллипсами (рис. 2, б). Рассмотрим случай односвязной области. Разобьем область возможного движения на дуги софокусных эллипсов. Точки этих дуг оснастим векторами скорости согласно формулам (21). По условию теоремы, каждой внутренней точке дуги эллипса соответствуют четыре вектора скорости, обозначенные 1, 2, 3 и 4. Заметим, что на гиперболических границах вектор 1 склеивается

с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4. Следовательно, прообраз каждой такой дуги разбиения в  $Q^3$  гомеоморфен двум не пересекающимся окружностям, соответствующим парам векторов 1-2 и 3-4. Таким образом, в прообразе всей компоненты связности области возможного движения лежат два цилиндра, которые склеены друг с другом по границам в силу того, что на эллиптических границах области возможного движения вектор 1 склеивается с вектором 3, а вектор 2 – с вектором 4. При этом ориентация граничных окружностей склейки двух цилиндров одинакова. Следовательно, итоговый прообраз гомеоморфен двумерному тору.

Аналогичные рассуждения проведем в случае неодносвязной компоненты связности области возможного движения. Разобьем всю область на софокусные эллипсы и оснастим их точки четырьмя векторами скорости, обозначенными 1, 2, 3 и 4. Прообраз каждого такого эллипса в  $Q^3$  гомеоморфен четырем окружностям, соответствующим векторам скорости. Таким образом, в прообразе всей компоненты связности области возможного движения лежат четыре цилиндра, при этом цилиндры, соответствующие векторам 1 и 3, и цилиндры, соответствующие векторам 2 и 4, склеены друг с другом по своим границам в силу тех же свойств. Следовательно, получили два тора, соответствующие движению по часовой стрелке и против часовой стрелки материальной точки внутри кольцевой области возможного движения.

Заметим, что в силу непрерывности для любого  $f'$ , лежащего в достаточно малой окрестности значения  $f$ , каждой внутренней точке области возможного движения также соответствуют четыре вектора скорости. Следовательно, слоение Лиувилля в окрестности описанных тором устроено тривиально.

Теорема доказана. □

Таким образом, если при значениях интегралов  $H = h$  и  $F = f$  область возможного движения удовлетворяет условиям теоремы 3, эти значения являются регулярными.

## 4 Бифуркационные диаграммы.

Согласно следствию 1 изучение областей возможного движения и их бифуркаций (а следовательно, и изучение бифуркаций тором Лиувилля) можно свести к изучению свойств многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$ . А именно, обозначим пять условий на многочлен  $V$ :

C1) существует точка  $z = e \in (-a, -b)$ , которая является точкой экстремума многочлена  $V$ , и  $V(e) = 0$ ;

C2) существует точка  $z = e \in (-b, 0)$ , которая является точкой экстремума многочлена  $V$ , и  $V(e) = 0$ ;

C3)  $V(0) = 0$ , и  $V$  возрастает в окрестности нуля;

C4)  $V(-a) = 0$ ;

C5)  $V(-b) = 0$ .

**Лемма 3.** *Зафиксируем значение  $f$ . Условие теоремы 3 выполнено тогда и только тогда, когда не выполнено ни одно из условий C1 – C5.*

*Доказательство. Необходимость.* От противного. Пусть выполнено условие C1, при этом точка  $z = e$  является точкой минимума многочлена  $V$ . Тогда, по утверждению 2, существует одномерная компонента связности области возможного движения – дуга гиперболы  $\lambda_1 = e$ . Если же точка  $z = e$  является точкой максимума многочлена  $V$ , то по замечанию 6 во внутренности области возможного движения существует точка с координатами  $(e, \lambda_2)$ , которой соответствуют лишь два вектора скорости. Получили

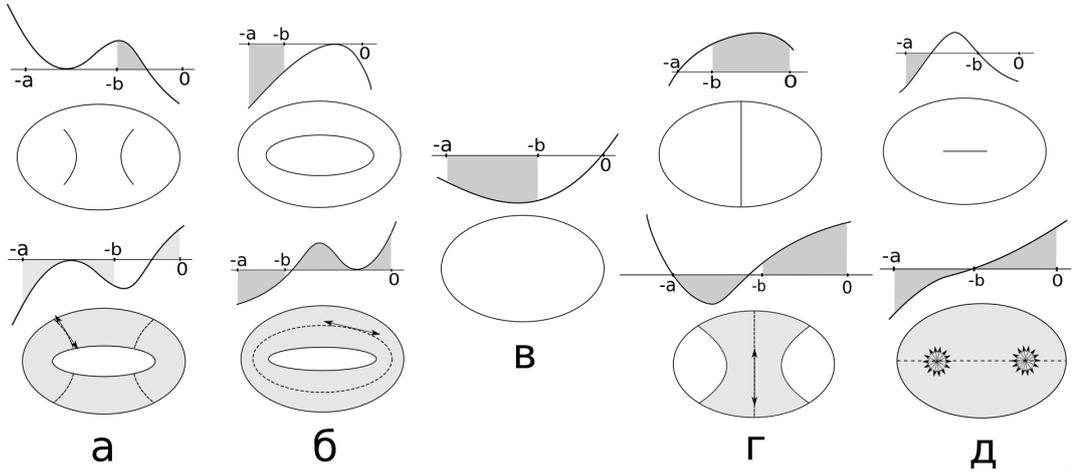


Рис. 3: Примеры критических областей возможного движения. Изображен график многочлена  $V$  в координатах  $0zV$  и соответствующая область возможного движения. Рисунок а соответствует условию  $C1$ , рисунок б – условию  $C2$ , рисунок в – условию  $C3$ , рисунок г – условию  $C4$ , рисунок д – условию  $C5$

противоречие (рис. 3, а). Доказательства того, что условия  $C2 - C4$  не выполняются, аналогичны (рис. 3, б, в и г соответственно).

Пусть выполнено условие  $C5$ . Если при этом  $V'(-b) > 0$ , то фокусы принадлежат области возможного движения, при этом им соответствует целая окружность векторов (см. замечание 6). Если  $V'(-b) = 0$ , то фокусам соответствует один нулевой вектор. Если  $V'(-b) < 0$ , то по утверждению 2 существует одномерная компонента связности области возможного движения – отрезок фокальной прямой (рис. 3, д).

**Достаточность.** Доказательство достаточности повторяет доказательство необходимости, обращенное в противоположную сторону.

Лемма доказана. □

Построим теперь бифуркационную диаграмму (множество критических значений первых интегралов  $H = h$ ,  $F = f$  на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, f)$ ) рассматриваемого билиарда. Отметим, что корни многочлена  $V''$  не зависят от значений  $h$  и  $f$ , а точки экстремумов многочлена  $V$  не зависят от значений  $f$  (см. формулу (20)). Пусть для некоторого значения  $h = h_0$  точка  $z = e \in (-a, 0)$  является точкой экстремума многочлена  $V$  (то есть  $V'(e) = 0$  и  $V''(e) \neq 0$ ). Тогда по теореме о неявной функции существует функция  $e(h)$  в окрестности точки  $h_0$ , т.ч.  $e(h_0) = e$  и  $V'(e(h)) = 0$  (то есть  $e(h)$  также является точкой экстремума многочлена  $V$ ). Функцию  $e(h)$  можно продолжить на отрезок  $[h_1, h_2]$ , где  $V''(e(h_1)) = V''(e(h_2)) = 0$  и для любого  $h \in (h_1, h_2)$  выполняется следующее:  $V''(e(h)) \neq 0$ .

**Теорема 4.** Пусть  $e_i(h)$  – построенные выше функции на своих областях определения (экстремумы многочлена  $V(z)$  при фиксированном значении  $h$ ). Тогда бифуркационная диаграмма состоит из дуг следующих кривых (возможно, не всех):

- $d1_i) V(e_i(h)) = 0$  при  $e_i(h) \in [-a, -b]$ ;
- $d2_i) V(e_i(h)) = 0$  при  $e_i(h) \in [-b, 0]$ ;
- $d3) f = 0$  при  $h \geq 0$ ;
- $d4) V(-a) = 0$ ;
- $d5) V(-b) = 0$ .

*Доказательство.* Зафиксируем значение  $h$  и  $f$ . Заметим, что принадлежность точки  $(h, f)$  дуге  $d1_i$  эквивалентно выполнению условия  $C1$ , принадлежность дуге  $d2_i$  эквивалентно условию  $C2$ , дуге  $d3$  – условию  $C3$ , дуге  $d4$  – условию  $C4$ , и дуге  $d5$  – условию  $C5$ . Из леммы 3 и теоремы 3 следует, что точки образа отображения момента

$\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$ , не лежащие на перечисленных дугах, являются регулярными (им соответствует объединение торов в изоэнергетическом пространстве  $Q^3$ , причем слоение Лиувилля в окрестности этих торов устроено тривиально).

Пусть точка  $(h, f)$  принадлежит одной из дуг  $d1_i$ . Следовательно, существует точка на бильярде с координатами  $\lambda_1 = e_i$  и  $\lambda_2 \neq -b$ , для которой  $P(\lambda_1) = f + h\lambda_1$ ,  $P'(\lambda_1) = h$ . Кроме того, согласно формулам (20) и (17) получим  $\mu_1 = 0$ . С учетом этого, вычислим полные дифференциалы первых интегралов  $H$  и  $F$  в точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$ :

$$dH = -\frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2 d\mu_2 + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2$$

$$dF = -\lambda_1 dH.$$

Следовательно, в точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$  ранг матрицы Якоби отображения момента  $\mathcal{F}$  падает, т.е. точка  $(h, f)$  является особой, а дуга  $d1_i$  принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга  $d2_i$  также принадлежит бифуркационной диаграмме.

Рассмотрим теперь точку  $(h, f)$  на дуге  $d4$ . Согласно замечанию 6 на оси  $0y$  найдется точка с координатами  $\lambda_1 = -a$  и  $\lambda_2 \neq -b$ , в которой  $p_x = 0$ . Вычислим полные дифференциалы первых интегралов  $H$  и  $G = -2F$ :

$$dH = p_y dp_y + W'_y dy$$

$$dG = \frac{2}{a} p_y dp_y + g'_y dy.$$

Напомним, что функции  $W$  и  $g$  являются многочленами от декартовых координат, при этом их мономы имеют четную степень по обоим переменным. Следовательно  $W'_y(0, y) = (W(0, y))'_y$  и  $g'_y(0, y) = (g(0, y))'_y$ . Из формул на функции  $W$  и  $g$ , приведенных в лемме 2 и замечании к теореме 2, получим следующее:

$$W(0, y) = \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=0}^i (-a)^{i-k} (y^2 - b)^k$$

$$g(0, y) = -2 \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=1}^i (-a)^{i-k-1} (y^2 - b)^k,$$

где  $c_i$  – коэффициенты многочлена  $P$ . Таким образом, несложно заметить, что  $g'_y = \frac{2}{a} W'_y$ . Следовательно, в точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$  ранг матрицы Якоби отображения момента  $\mathcal{F}$  падает, т.е. точка  $(h, f)$  является особой, а дуга  $d4$  принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга  $d5$  также принадлежит бифуркационной диаграмме.

Наконец, рассмотрим дугу  $d3$ . В отличие от предыдущих случаев, на бильярде нет точек падения ранга матрицы Якоби отображения момента  $\mathcal{F}$ . Перестройка торов Лиувилля, соответствующая точке  $(h, f)$  этой дуги, происходит в силу негладкой природы бильярда на его границе. Более точно, в следующем разделе будет показано, что точкам дуги  $d3$  соответствуют несколько минимальных 3-атомов  $A$ , образы критической окружности которых при проекции на бильярд являются дугами граничного эллипса (рис. 3, в).

Теорема доказана. □

**Следствие 2.** *Регулярными областями возможного движения (т.е. образами торов Лиувилля при проекции  $p$  на бильярд) являются только области, описанные в теореме 3.*

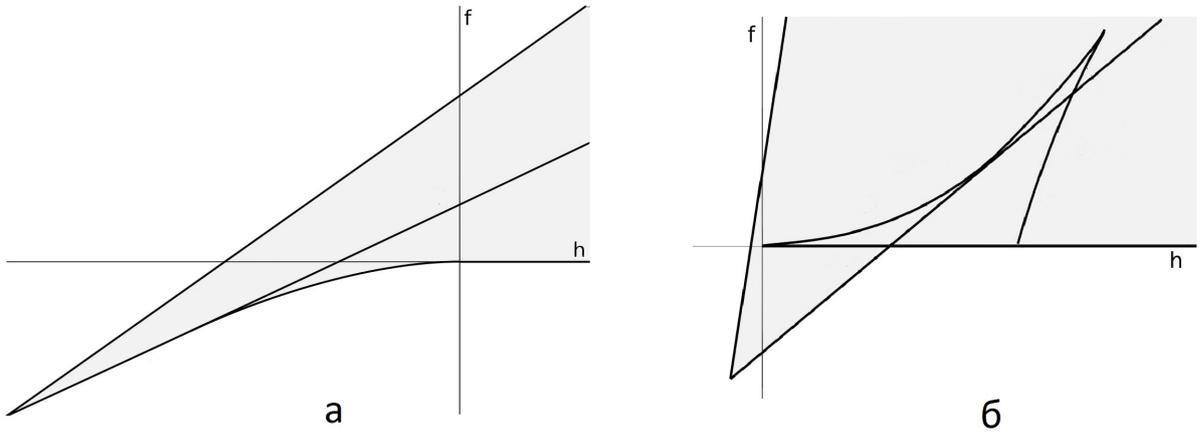


Рис. 4: Примеры бифуркационных диаграмм. На рис. а изображен случай (гуковского) потенциала второй степени, на рис. б – случай потенциала четвертой степени.

**Замечание 7.** Из неравенств (21) следует, что если при фиксированных значениях первых интегралов  $h$  и  $f$  движение не происходит, если выполнено одно из двух условий:  $V(z) > 0$  для любого  $z \in [-a, -b]$ ;  $V(z) < 0$  для любого  $z \in [-b, 0]$ . Следовательно, образ отображения момента на каждом уровне гамильтониана  $H = h$  ограничен двумя кривыми: 1) кривой  $d1_i$ , если соответствующая ей точка  $z = e_i$  является глобальным минимумом многочлена  $V$  на полуинтервале  $[-a, -b]$ , либо кривой  $d4$ , если им является точка  $z = -a$ ; 2) кривой  $d2_i$ , если точка  $z = e_i$  является глобальным максимумом многочлена  $V$  на отрезке  $[-b, 0]$ , либо кривой  $d3$  или  $d5$ , если им является точка  $z = 0$  или  $z = -b$  соответственно.

**Замечание 8** (Вырожденные орбиты и точки ранга 0.). Найдем теперь наклон дуг  $d1_i$  и  $d2_i$ :

$$0 = (V(e_i(h)))'_h = f'_h + e_i(h) + e'_i(h)V'(e_i) = f'_h + e_i(h).$$

Таким образом,  $f'_h = -e_i(h)$ , при этом  $e_i(h) \in [-a, 0]$ . Следовательно, все дуги  $d1_i$  и  $d2_i$  монотонно возрастают. Если две дуги  $d1_i$  и  $d1_j$  (или  $d2_i$  и  $d2_j$ ) касаются при некотором значении  $h_0$ , то  $e_i(h_0) = e_j(h_0) =: e$ . Таким образом, многочлен  $V'(z)$  имеет кратный корень  $z = e$ , и следовательно  $V''(e) = 0$ . Иными словами, обе функции  $e_i(h)$  и  $e_j(h)$  определены либо при  $h \leq h_0$ , либо при  $h \geq h_0$ , а точка касания является “клювом” (рис. 5, а). Аналогично, точка касания дуг  $d2_i$  и  $d3$  образует “клюв” (рис. 5, б).

Если дуга  $d1_i$  касается дуги  $da$  при некотором значении  $h_0$ , то  $e_i(h_0) = -a$ . Следовательно, функция  $e_i(h)$  определена либо при  $h \leq h_0$ , либо при  $h \geq h_0$  (рис. 5, в). При значении  $h$ , для которого  $e_i(h) = -b$ , дуга  $d1_i$  переходит в дугу  $d2_i$ , а точка касания с дугой  $d5$  изображена на рис. 5, г. Таким образом, были найдены все точки бифуркационной диаграммы, отвечающие вырожденным орбитам потоков интегралов  $sgrad(H)$  и  $sgrad(F)$ .

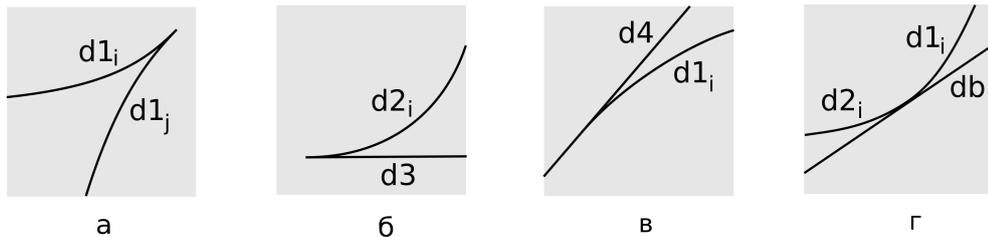


Рис. 5: Образ отображения момента  $\mathcal{F}$  в окрестности точки касания дуг бифуркационной диаграммы

Рассмотрим теперь точки пересечения дуг  $d1_i$  и  $d2_j$  при  $i \neq j$ . Соответствующие точки  $z = e_i(h)$  и  $z = e_j(h)$  являются двумя разными корнями многочлена  $V$  и одновременно его экстремумами, при этом  $e_i(h) \in (-a, -b)$  и  $e_j(h) \in (-b, 0)$ . Согласно замечанию 6, точке с координатами  $\lambda_1 = e_i$  и  $\lambda_2 = e_j$  соответствует нулевой вектор скорости. Таким образом, используя формулы (18) и (19), а также вид многочлена  $V(z) = f + hz - P(z)$ , получим следующие формулы:

$$dH_1 = \frac{f + h\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(d\lambda_2 - d\lambda_1) + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_1$$

$$dH_2 = \frac{f + h\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(d\lambda_2 - d\lambda_1) + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2}d\lambda_2$$

Подставляя полученные выражения в формулы  $dH = dH_1 - dH_2$ ,  $dF = d(\lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1)$ , получим  $dF = dH = 0$ . Следовательно, точка  $(h, f)$  пересечения дуг  $d1_i$  и  $d2_j$  является точкой ранга 0. Аналогично, точки пересечения дуги  $d1_i$  с дугой  $d3$  или  $d5$ , точки пересечения дуги  $d2_i$  с дугой  $d4$  или  $d5$ , а также точки пересечения дуги  $d5$  с дугой  $d3$  или  $d4$  являются точками ранга 0.

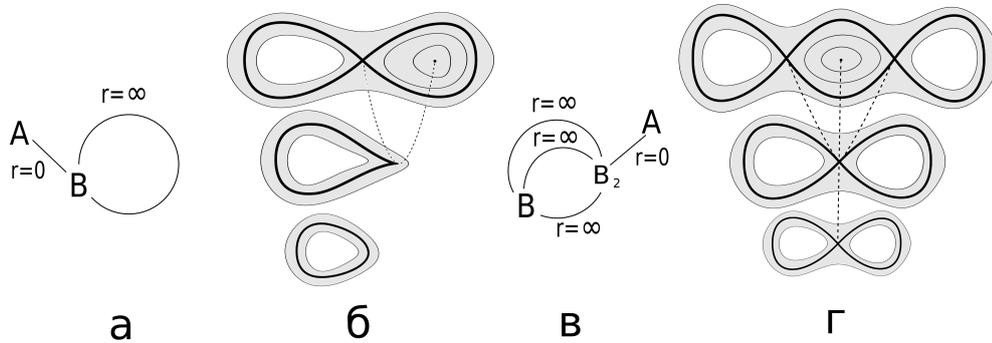


Рис. 6: Примеры круговых молекул и бифуркаций вырожденных особенностей.

Оставим пока вне рассмотрения вопросы о классификации слоений Лиувилля в окрестности слоев, содержащих описанные вырожденные орбиты и невырожденные точки ранга 0 нашей системы. Приведем лишь несколько примеров. А именно, в следующем разделе будет показано, что существует конфигурация многочлена  $V$ , для которого появляется вырожденная особенность, изображенная на рис. 5, а, причем дуге  $d1_j$  соответствует атом  $A$ , а дуге  $d1_i$  – атом  $B$ . Круговая молекула в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 6, а, и такая вырожденная особенность является параболической (рис. 6, б). Или же в случае, изображенном на рис. 5, в, существует конфигурация многочлена  $V$ , при которой дуге  $d1_i$  соответствует атом  $B_2$ , дуге  $d4$  до точки касания соответствует атом  $B$ , а после нее – атом  $A$ . Круговая молекула в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 6, в, а такая вырожденная особенность является “вилкой” (рис. 6, г).

Также, в дальнейшем будем рассматривать только те значения гамильтониана  $h_0$ , для которых на соответствующей вертикальной прямой  $h = h_0$  в плоскости  $0hf$  нет точек касания дуг бифуркационной диаграммы и точек пересечения ранга 0. В частности это означает, что многочлен  $V$  не имеет кратных корней. При этом трехмерная поверхность уровня гамильтониана  $\{H = h_0\}$  является невырожденным трехмерным многообразием.

## 5 Бифуркации областей возможного движения. 3-атомы.

Следующие три леммы описывают всевозможные перестройки регулярных областей возможного движения и, как следствие, 3-атомы.

**Лемма 4.** Зафиксируем значение интегралов  $H = h$  и  $F = f$ , причем точка  $(h, f)$  не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой  $d1_i$ ,  $d4$  или их пересечении. Тогда такому значению интеграла  $F$  соответствуют несколько седловых 3-атомов  $C_{2k}$ ,  $B_k$  или максимальных атомов  $A$  в изоэнергетическом многообразии  $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$ .

*Доказательство.* Из предположения того, что точка  $(h, f)$  не является вырожденной, следует, что она не принадлежит дугам  $d2_i$ ,  $d3$  и  $d5$ . Следовательно, фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка  $(h, f)$  лежит на пересечении дуг  $d1_i$ , которым соответствуют различные точки экстремумов  $e_i$  многочлена  $V$ . Тогда для этой точки выполнено условие  $C1$ , при этом не выполнены  $C2$ ,  $C3$  и  $C5$ . Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг гипербол  $\lambda_1 = e_i$ , которым соответствуют два вектора скорости. Если точка  $(h, f)$  также лежит на дуге  $d4$ , для нее выполнено условие  $C4$ , и внутренним точкам области возможного движения, лежащим на вертикальной оси  $0y$ , также соответствуют два вектора скорости.

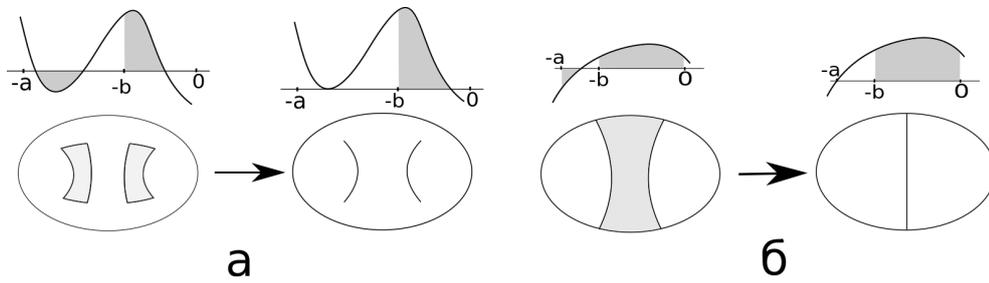


Рис. 7: Перестройки областей возможного движения, соответствующие максимальному атому  $A$ . Изображены графики многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и их движение при возрастании значения  $f$ , а также соответствующие им области возможного движения.

Пусть в точке  $z = e_{i_1} =: e$  достигается локальный минимум многочлена  $V(z)$ . При  $F \rightarrow f - 0$  область возможного движения удовлетворяет условию теоремы 3 и имеет компоненты связности, ограниченные двумя софокусными гиперболами с параметрами  $\lambda \rightarrow e - 0$  и  $\lambda \rightarrow e + 0$  соответственно (рис. 7, а). Таким образом, в пределе соответствующие компоненты связности области возможного движения становятся одномерными (стягиваются на дуги гиперболы с параметром  $\lambda = e$ ), а прообраз каждой такой компоненты в  $Q^3$  гомеоморфен окружности. Таким образом, слоение Лиувилля в окрестности этой окружности устроено как 3-атом  $A$ . Аналогично, если в точке  $z = -a$  многочлен  $V(z)$  обращается в ноль, при этом в окрестности этого корня он возрастает, соответствующая компонента связности области возможного движения становится одномерной (отрезком оси  $0y$ ), а окрестность прообраза этой компоненты в  $Q^3$  гомеоморфна 3-атому  $A$  (рис. 7, б).

Предположим, что в  $k$  точках  $z = e_i$  многочлен  $V$  достигает свои локальные максимумы. Пусть также он не имеет других корней на полуинтервале  $[-a, -b)$  (в частности, из этого следует, что точка  $(h, f)$  не лежит на дуге  $d4$ ). Согласно следствию 1 область возможного движения для значений  $h$  и  $f$  является объединение неодносвязных (кольцевых) областей. Рассмотрим одну из компонент связности. Как и в доказательстве теоремы 3, разобьем ее софокусные эллипсы и оснастим их точки векторами скорости в соответствии с системой (21). Заметим, что прообраз каждого такого эллипса в  $Q^3$  состоит из двух пар окружностей, соответствующих векторам скорости 1-2 и 3-4, и пересекающихся в  $4k$  точках согласно тому, что вектора 1 и 2, а также вектора 3 и 4 склеиваются в точках гипербол  $\lambda_1 = e_i$ . Таким образом, получили два особых слоя 2-атома  $C_{4k}$ . Умножим эти два особых слоя на отрезок (дугу софокусной гиперболы) и

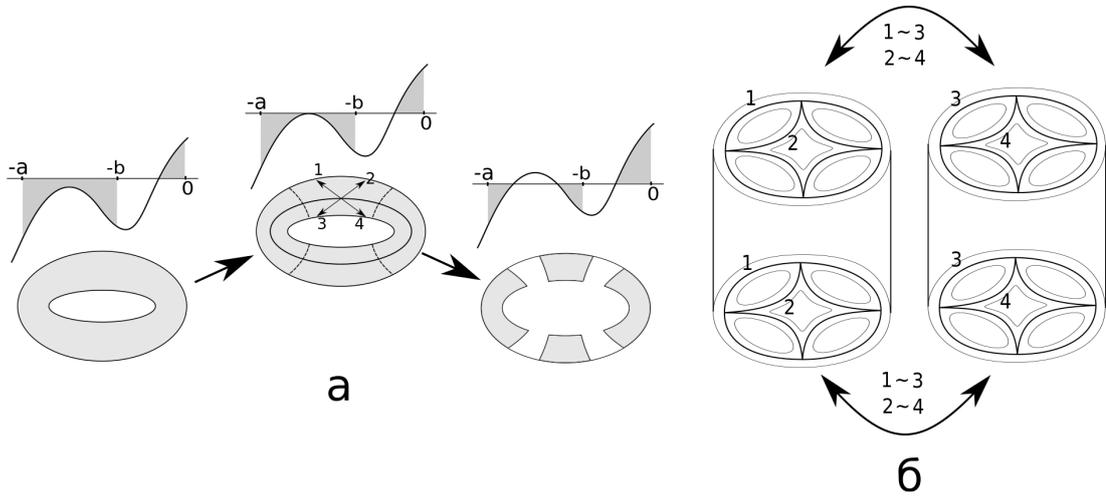


Рис. 8: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому  $C_4$ . На рис. а изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в  $Q^3$ , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

склеим полученные “цилиндры” друг с другом по границам согласно тому, что вектора скорости 1-3 и 2-4 отождествляются на эллиптической границе области возможного движения (рис. 7, б). Таким образом, получили особый слой 3-атома  $C_{4k}$ , который и является прообразом рассматриваемой компоненты связности области возможного движения. При этом аналогичными рассуждениями несложно показать, что слоение Лиувилля в окрестности этого слоя устроено как 3-атом  $C_{4k}$ . Заметим, что если  $z = -a$  является корнем многочлена  $V$  (т.е точка  $(h, f)$  лежит на дуге  $d_4$ ), при этом он убывает в окрестности этого корня, то область возможного движения также является неодно-связной, при этом прообраз каждой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома  $C_{4k+2}$ .

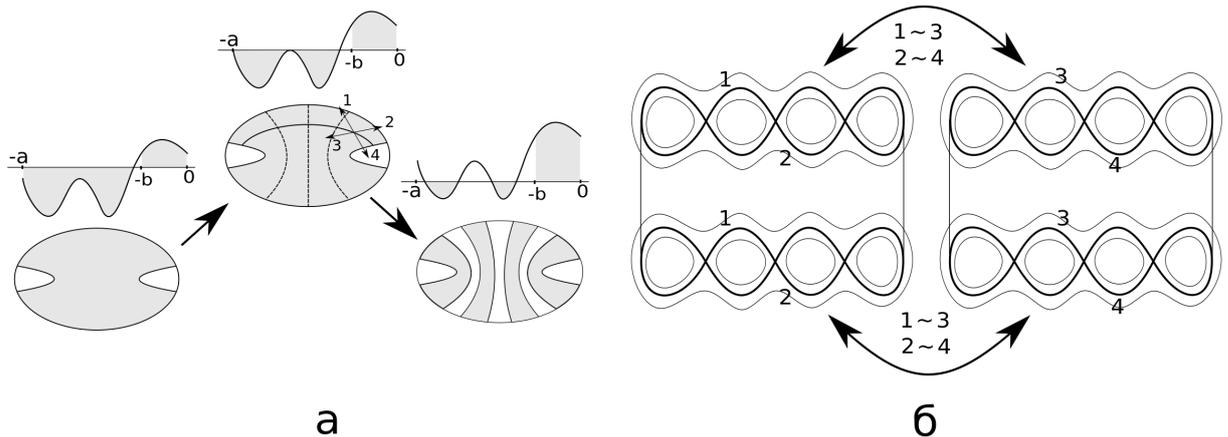


Рис. 9: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому  $B_3$ . На рис. а изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в  $Q^3$ , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим теперь, что на интервале  $(-a, -b)$  есть другие корни многочлена  $V$ . В этом случае область возможного движения состоит из односвязных компонент, при

этом, как и ранее, всем внутренним точкам этой области соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек, лежащих на гиперболах  $\lambda_1 = e_i$  и (возможно) оси  $Oy$ , которым соответствуют только два вектора скорости (рис. 9, а). Заметим, что компоненты связности, которые не содержат точки этих гипербол, удовлетворяют теореме 3. Следовательно, прообразы таких компонент в  $Q^3$  гомеоморфны двумерным торам. Рассмотрим одну из компонент связности, содержащую  $k$  критических дуг. Разобьем ее на дуги софокусных эллипсов и оснастим их точки векторами скорости. Заметим, что в прообразе каждой такой дуги лежат две окружности, соответствующие векторам скорости 1-2 и 3-4, стянутые по своим  $k$  хордам (особые слои 2-атома  $B_k$ ). Следовательно, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен особому слою 3-атома  $B_k$ , и более того слоение Лиувилля в окрестности этого особого слоя устроено как 3-атом  $B_k$  (рис. 9, б).

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 5.** *Зафиксируем значение интегралов  $H = h$  и  $F = f$ , причем точка  $(h, f)$  не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой  $d2_i$ ,  $d3$  или их пересечении. Тогда такому значению интеграла  $F$  соответствуют несколько седловых 3-атомов  $B_k$  или минимальных атомов  $A$  в изоэнергетическом многообразии  $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$ .*

*Доказательство.* Как и в прошлой лемме, из предположения того, что точка  $(h, f)$  не является вырожденной, следует, что фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка  $(h, f)$  лежит на пересечении дуг  $d2_i$ , которым соответствуют различные точки экстремумов  $e_i$  многочлена  $V$ . Тогда для этой точки выполнено условие  $C2$ , при этом не выполнены  $C1$ ,  $C4$  и  $C5$ . Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг эллипсов  $\lambda_2 = e_i$ , которым соответствуют два вектора скорости. Если точка  $(h, f)$  также лежит на дуге  $d3$ , для нее выполнено условие  $C3$ .

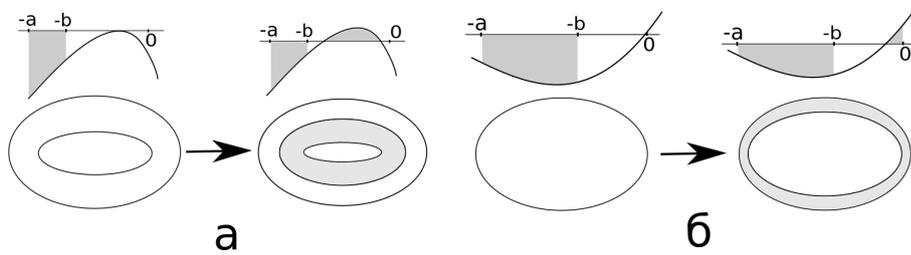


Рис. 10: Перестройки областей возможного движения, соответствующие минимальному атому  $A$ . Изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения.

Пусть в точке  $z = e_{i_1} =: e$  достигается локальный максимум многочлена  $V(z)$ . Аналогично соответствующему случаю из предыдущей леммы можно показать, что прообраз области возможного движения при  $F \rightarrow f + 0$  является объединением двумерных торов (рис. 10, а). В пределе область возможного движения становится одномерной, а в ее прообразе лежат несколько критических окружностей. Таким образом, получили 3-атом  $A$ . Аналогично, если многочлен  $V$  в точке  $z = 0$  обращается в ноль, при этом он возрастает в окрестности этого корня, область возможного движения при убывании значения интеграла  $F$  стягивается на границу биллиарда, чему также соответствует 3-атом  $A$ . Отметим, что если многочлен  $V$  убывает в окрестности точки  $z = 0$ , то такая точка  $(h, f)$  соответствует тому, что одна из границ области возможного движения вышла на границу биллиарда, при этом не происходит никакой качественной перестройки области возможного движения. Следовательно, такая точка  $(h, f)$  является регулярной, а луч  $f = 0$  при  $h < 0$  не принадлежит бифуркационной диаграмме.

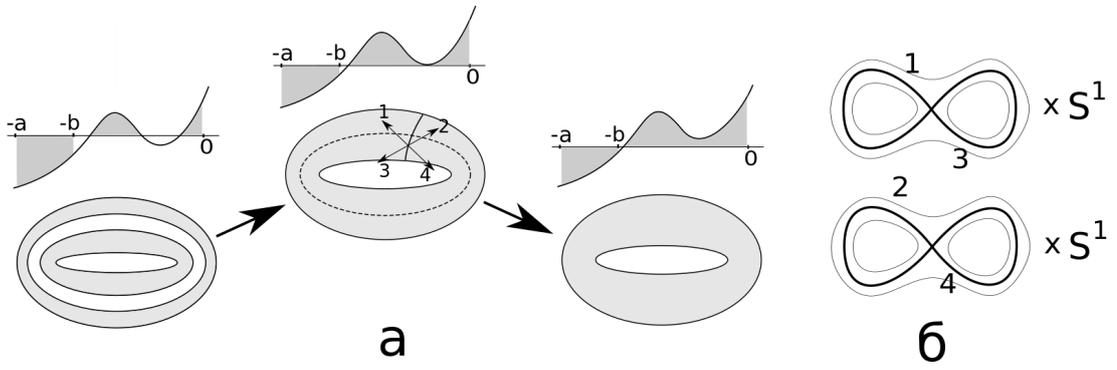


Рис. 11: Перестройка областей возможного движения, соответствующая двум 3-атомам  $B$ . На рис. а изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в  $Q^3$ .

Пусть теперь в нескольких точках  $z = e_i$  многочлен  $V$  достигает свои локальные минимумы. Предположим, что  $V(z) < 0$  для любого  $z \in [-a, -b]$ . Таким образом, в силу следствия 1, область возможного движения для значений  $h$  и  $f$  является объединением неодносвязных (кольцевых) областей. Заметим, что компоненты связности, не содержащие точек эллипсов  $\lambda_2 = e_i$ , удовлетворяют теореме 3. Прообразы таких компонент в  $Q^3$  гомеоморфны объединению двух торов Лиувилля. Рассмотрим теперь компоненту, содержащую в себе  $k$  эллипсов  $\lambda_2 = e_i$ . Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 11, а). Прообраз такой дуги в  $Q^3$  гомеоморфен двум окружностям, соответствующим векторам скорости 1-3 и 2-4, стянутым по своим  $k$  хордам в силу того, что вектора 1 и 3, а также 2 и 4 склеиваются в точках “критических” эллипсов. Получили два особых слоя 2-атома  $B_k$ . Следовательно, прообраз всей компоненты связности гомеоморфен этим двум слоям, умноженным на окружность (софокусный эллипс), т.е. двум особым слоям 3-атома  $B_k$  (рис. 11, б). Более того, в окрестности этого слоя слоение устроено как 3-атом  $B_k$ .

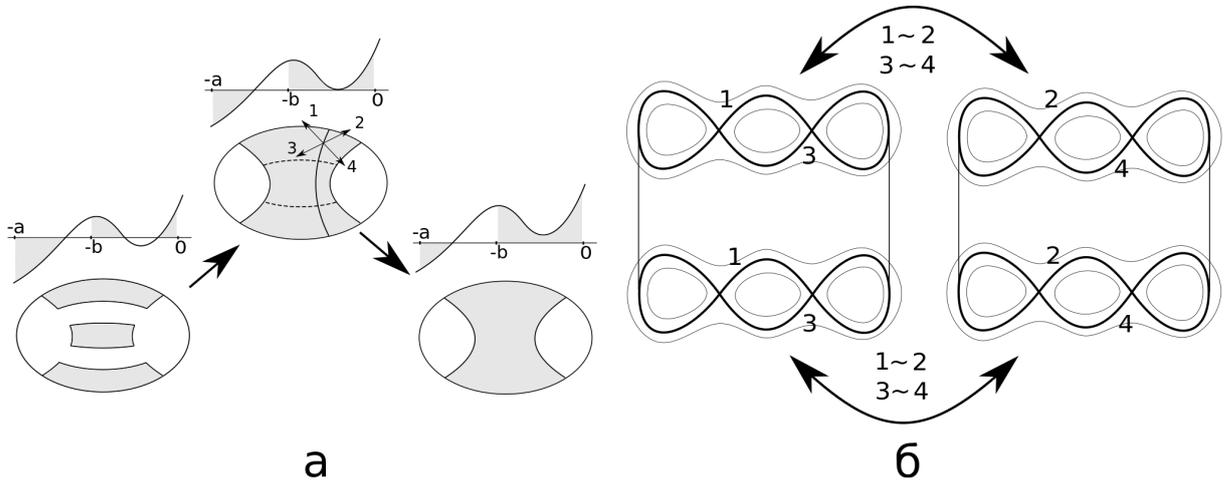


Рис. 12: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому  $B_2$ . На рис. а изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в  $Q^3$ , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим теперь, что на интервале  $z \in (-a, -b)$  существуют корни многочлена  $V$ , т.е область возможного движения состоит из односвязных компонент. Опять, прообраз компоненты связности, не содержащей точек эллипсов  $\lambda_2 = e_i$ , гомеоморфен тору

Лиувилля. Рассмотрим компоненту, содержащую  $k$  дуг этих эллипсов. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 12, а). Заметим, что как и в аналогичном случае предыдущей леммы прообраз каждой такой дуги в  $Q^3$  гомеоморфен двум особым слоям 2-атома  $B_k$ . Умножим эти особые слои на отрезок и склеим полученные “цилиндры” по границам в силу того, что на гиперболических границах вектора 1 склеивается с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4 (рис. 12, б). Таким образом, прообраз рассматриваемой компоненты в  $Q^3$  гомеоморфен особому слою 3-атома  $B_k$ , при этом его окрестность также устроена, как 3-атом  $B_k$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 6.** *Зафиксируем значение интегралов  $H = h$  и  $F = f$ , причем точка  $(h, f)$  не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой  $d5$ . Если в окрестности точки  $z = -b$  многочлен  $V$  возрастает, этому критическому значению соответствует несколько 3-атомов  $C_2, B$  или два атома  $A^*$  в изоэнергетическом многообразии  $Q^3$ . Если в окрестности точки  $z = -b$  многочлен  $V$  убывает, то ему соответствуют несколько максимальных и минимальных 3-атома  $A$ .*

*Доказательство.* Согласно условию на невырожденность и ранг следует, что точка  $(h, f)$  не лежит на других дугах бифуркационной диаграммы, кроме дуги  $d5$ . Согласно замечанию 6, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме фокусов, которым соответствуют окружность векторов, и остальных точек фокальной оси  $0x$ , которым соответствуют два вектора скорости.

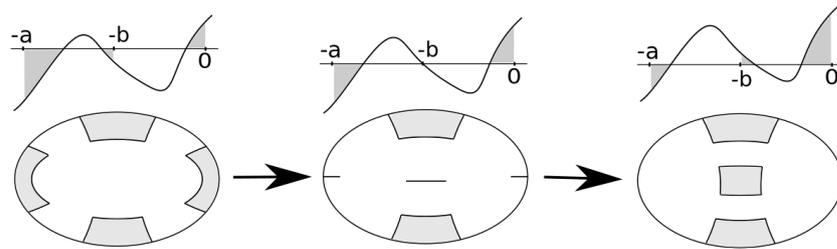


Рис. 13: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атомам  $A$ . Изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения.

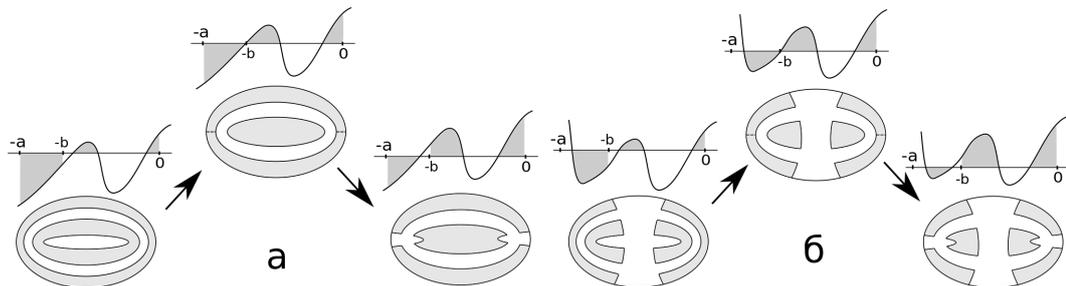


Рис. 14: Перестройка областей возможного движения, дающая 3-атомы  $C_2$  и  $B$ .

Пусть в окрестности точки  $z = -b$  многочлен  $V$  убывает. При  $F \rightarrow f - 0$  область возможного движения ограничена дугами одной гиперболы, которая стремится к фокальной оси. В пределе область становится одномерной, а ее прообраз гомеоморфен объединению непересекающихся окружностей. С другой стороны, при  $F \rightarrow f + 0$  область возможного движения ограничена дугами эллипса, который также стремится к фокальной оси (рис. 13). В итоге оба случая соответствуют 3-атомам  $A$ , при этом первый случай соответствует “исчезновению” торов Лиувилля, а второй – их “появлению”

Пусть теперь в окрестности точки  $z = -a$  многочлен  $V$  возрастает. Если компонента связности области возможного движения не содержит точек фокальной прямой, она удовлетворяет теореме 3, и ее прообраз в  $Q^3$  гомеоморфен тору. Рассмотрим компоненту связности, которая содержит точки фокальной прямой, но не содержит фокусы. Заметим, что если она содержит точки фокального отрезка  $[F_1, F_2]$ , такой случай эквивалентен случаю перестройки двух односвязных областей возможного движения в одну односвязную в лемме 5. Следовательно, прообраз такой компоненты в  $Q^3$  гомеоморфен особому слою 3-атома  $B$  (рис. 15). Если же она содержит точки лучей  $(-\infty, F_1]$  и  $[F_2, +\infty)$ , такой случай аналогичен случаям перестроек не односвязных и односвязных областей возможного движения в лемме 4, и прообраз этой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома  $C_2$  в не односвязном случае и  $B$  в односвязном (рис. 14).

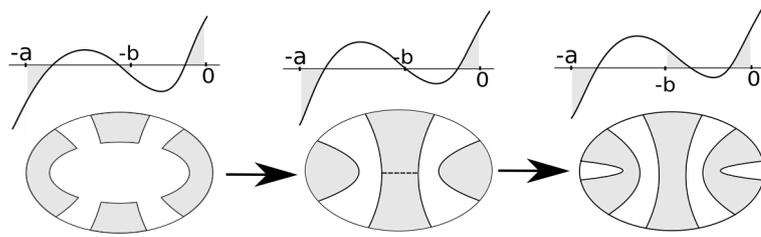


Рис. 15: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому  $B$ . Изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения.

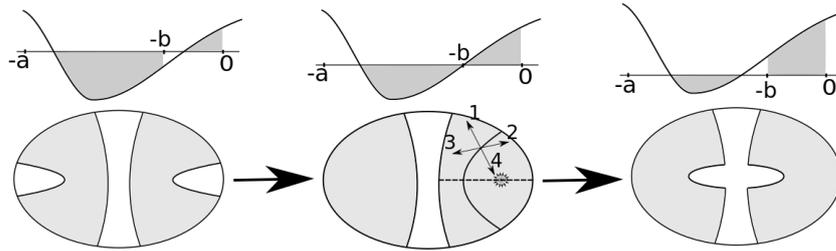


Рис. 16: Перестройка областей возможного движения при условии  $C_5$ . Изображен график многочлена  $V(z)$  на отрезке  $[-a, 0]$  и соответствующие ему области возможного движения

Предположим, что компонента связности содержит в себе только один фокус. Разобьем область возможного движения на дуги софокусных гипербол и отрезок  $s$ , лежащий на фокальной прямой между фокусом и границей биллиарда (рис. 16). Заметим, что прообраз каждой такой дуги гомеоморфен двум “восьмеркам” – особым слоям 2-атома  $B$ . Следовательно, прообраз всей области возможного движения без отрезка  $s$  гомеоморфен двум таким “восьмеркам”, умноженным на отрезок и склеенным друг с другом по одной из границ полученных “цилиндров” (рис. 19, б). По замечанию 6 фокусу соответствует окружность векторов. Следовательно, прообраз отрезка  $s$  в  $Q^3$  гомеоморфен окружности вместе со своей хордой, соединяющей две противоположные точки этой окружности (рис. 18). Рассмотрим “восьмерку”, соответствующую векторам 2 и 4, образ которой лежит на гиперболе, близкой к отрезку  $s$  (рис. 17). Заметим, что при обходе по гиперболе сверху вниз вектор 2 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от нуля до  $\pi$ . При этом вектор 4 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от  $\pi$  до  $2\pi$ . Следовательно, в окрестности прообраза отрезка  $s$  эта “восьмерка” будет иметь вид, изображенный на рис. 19, а. Аналогичные рассуждения проведем для “восьмерки”, соответствующей векторам 1 и 3 (рис. 19, в). Заметим, что в результате склейки

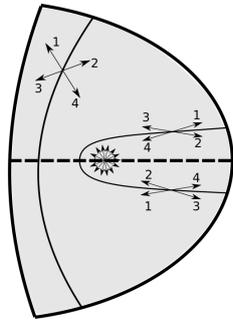


Рис. 17: Область возможного движения, содержащая фокус.

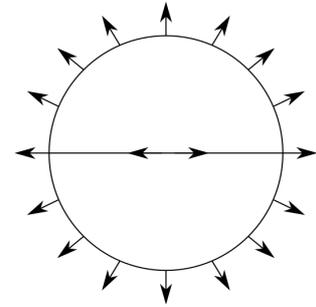


Рис. 18: Прообраз отрезка  $s$  в  $Q^3$ .

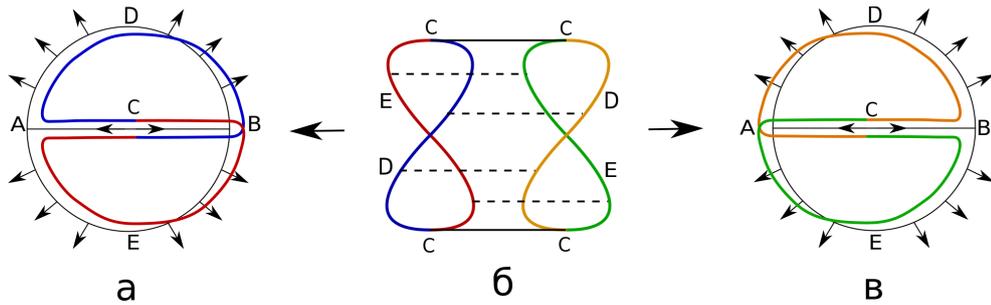


Рис. 19: Склеивка границ “цилиндра” по прообразу отрезка  $s$ . Оранжевым цветом обозначены точки, соответствующие вектору 1, синим цветом – вектору 2, зеленым – вектору 3 и красным – вектору 4.

границ полученного выше “цилиндра”, изображенной на рис. 19, получим особый слой 3-атома  $A^*$  (т.е. особый слой 3-атома  $B$  с “перекруткой”). Более того, окрестность этого слоя устроена как 3-атом  $A^*$ . Если же область возможного движения содержит два фокуса, то такая “перекрутка” 3-атома  $B$  произойдет дважды, и в итоге получим опять 3-атом  $B$ .

Лемма доказана. □

В итоге, были описаны всевозможные 3-атомы, соответствующие нашей системе. Следующая теорема является обобщением полученных результатов.

**Следствие 3** (Основная теорема об атомах.). *Существует всего девять типов бифуркаций регулярных областей возможного движения:*

- 1) появление неодносвязной (кольцевой) компоненты связности из софокусного эллипса (соответствует двум минимальным 3-атомам  $A$  в изоэнергетическом многообразии  $Q^3$ );
- 2) появление односвязной компоненты связности из дуги софокусного эллипса или отрезка фокальной прямой (соответствует минимальному 3-атому  $A$ );
- 3) стягивание односвязной компоненты связности на дугу софокусной гиперболы, либо на отрезок вертикальной оси  $Oy$ , либо на отрезок фокальной прямой (соответствует максимальному 3-атому  $A$ );
- 4) слияние  $k$  неодносвязных компонент связности в одну неодносвязную компоненту (соответствует двум 3-атомам  $B_{k-1}$ );
- 5) разрыв неодносвязной компоненты связности на  $2k$  односвязные компоненты (соответствует 3-атому  $C_{2k}$ );
- 6) слияние  $k$  односвязных компонент связности в одну односвязную (соответствует 3-атому  $B_{k-1}$ );
- 7) разрыв односвязной компоненты связности на  $k$  односвязных компонент (соответствует 3-атому  $B_{k-1}$ );

8) перестройка неодносвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через два фокуса (соответствует 3-атому B);

9) перестройка односвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через один фокус (соответствует 3-атому A\*).

## 6 Грубые молекулы и метки.

Зафиксируем уровень гамильтониана  $H = h$  и вычислим соответствующую ему грубую молекулу. Напомним, что при вычислении 3-атомов мы следили за изменением многочлена  $V$  при локальном изменении значения  $f$ . Теперь проследим за его изменением при глобальном возрастании значения  $f$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Когда график многочлена  $V$  лежит ниже нуля на отрезке  $[-b, 0]$ , движения нет. Затем при значении  $f = f_{min}$  несколько экстремумов (в количестве  $m$ ), лежащих справа от точки  $-b$ , выходят на отрезок  $[-a, 0]$ . Если при этом график  $V$  лежит ниже нуля на отрезке  $[-a, -b]$ , этому соответствует появление  $m$  неодносвязных компонент области возможного движения, или же  $2m$  минимальных атомов  $A$  согласно следствию 3. Если же график  $V$  имеет корни на отрезке  $[-a, -b]$ , происходит появление  $2m(2k + l)$  односвязных компонент, где  $k$  – число подотрезков на отрезке  $[-a, -b]$ , не содержащих точки  $-a$  и  $-b$ , на которых  $V < 0$ , а  $l$  – число таких же подотрезков, но содержащих одну из этих точек. При дальнейшем росте значения  $f$  будем следить за последовательным выходом экстремумов многочлена  $V$  и значений  $V(-a)$ ,  $V(-b)$  и  $V(0)$  на отрезок  $[-a, 0]$ . Этим выходам соответствуют перестройки области возможного движения, описанные в леммах 4-6 предыдущего раздела. Таким образом, будем строить грубую молекулу снизу, начиная с описанных выше атомов  $A$ , и на каждом критическом уровне интеграла  $f$  сопоставляя перестройкам области возможного движения атомы согласно следствию 3. При достижении значения  $f = f_{max}$  многочлен  $V$  становится больше нуля на отрезке  $[-a, -b]$ , чему соответствует несколько максимальных атомов  $A$ , и затем движение снова перестает существовать. На этом заканчивается построение грубой молекулы. Пример вычисления приведен на рис 20.

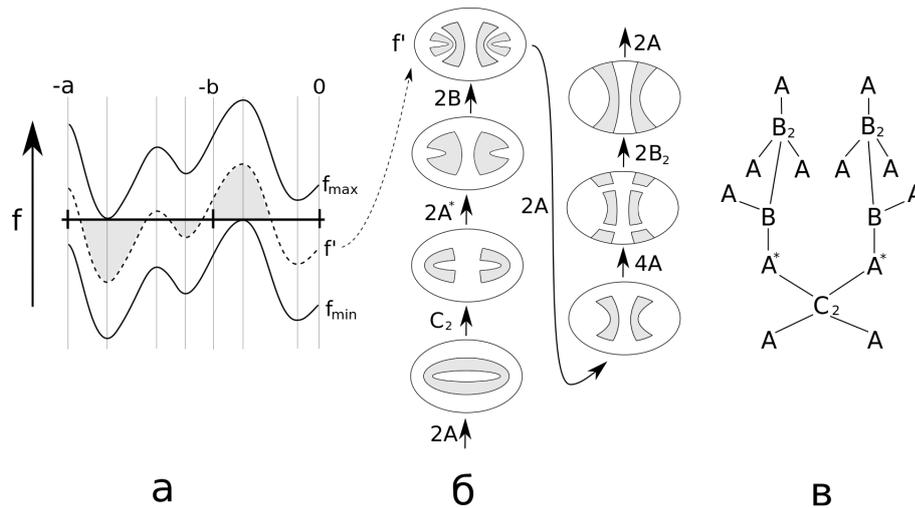


Рис. 20: Вычисление грубой молекулы с помощью графика многочлена  $V$ . На рис. а изображено поднятие графика с ростом значения  $f$ . На рис. б изображены области возможного движения и их перестройки. На рис. в изображена результирующая грубая молекула.

Таким способом был получен полный список молекул, встречающихся для (гуковско-го) потенциала второго порядка (работа [5]) и четвертого порядка (работа [6]). Однако,

в общем случае возможных грубых молекул, соответствующих потенциалу большого порядка, необозримо много. Поэтому приведем несколько их общих свойств.

**Утверждение 3.** Построенная выше грубая молекула удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) существует расположение молекулы в плоскости, при котором она является симметричной относительно некоторой оси, причем атомы, переходящие друг в друга под действием этой симметрии, соответствуют одинаковому уровню интеграла  $F$ ;
- 2) все атомы вида  $C_{2k}$  лежат на некотором одном уровне интеграла  $F$  (обозначим его  $F = f_C$ ), причем число  $k$  для всех них одинаковое;
- 3) ниже уровня атомов  $C_{2k}$  молекула является непересекающимся объединением нескольких симметричных деревьев с корнями в вершине  $C_{2k}$ ;
- 4) на фокальном уровне интеграла  $F$ , при котором  $V(-b) = 0$  (обозначим его  $F = f_F$ ), лежат либо несколько минимаксных атомов  $A$ , либо два атома  $A^*$  и несколько атомов  $B_k$ , либо один атом  $B$  и несколько атомов  $C_{2k}$ ;
- 5) в общем случае молекула не является деревом, т.е. могут существовать циклы;
- 6) молекула может содержать кратные ребра, причем они могут соединять только атомы  $C_{2k}$  с атомами  $B_k$ , расположенными не ниже фокального уровня;
- 7) если  $V(z_1) < V(-b) < V(z_2)$  для любых  $z_1 \in [-a, -b]$  и  $z_2 \in (-b, 0]$ , молекула является деревом.

*Доказательство.* Докажем сначала пункт 2. Заметим, что если регулярная область возможного движения содержит односвязную (кольцевую) компоненту связности, то все ее компоненты также будут кольцевыми (это связано с тем, что при таком условии выполнено неравенство  $V(z) < 0$  для любого  $z \in [-a, -b]$ ). Атомы  $C_{2k}$  соответствуют разрыву одной такой кольцевой компоненты на  $2k$  односвязных компонент по дугам софокусных гипербол, причем такой разрыв одновременно происходит и для всех остальных кольцевых компонент. Из этого и следует пункт 2.

Докажем теперь пункт 3. Согласно предыдущему пункту, все области возможного движения, соответствующие значениям интеграла  $F < f_C$  ниже уровня атомов  $C_{2k}$ , являются кольцевыми. Следовательно, всю молекулу можно разбить на два изоморфных (одинаковых) подграфа, соответствующих движениям по и против часовой стрелки. При этом каждый атом этих подграфов соответствует слиянию нескольких кольцевых компонент области возможного движения в одну (то есть является атомом  $B_k$  согласно следствию 3), что и гарантирует структуру дерева.

Докажем пункт 4. Согласно лемме 6, если многочлен  $V$  убывает в окрестности точки  $-b$ , фокальному уровню  $F = f_F$  соответствует несколько минимаксных атомов  $A$ . Если же многочлен  $V$  возрастает в этой окрестности, обязательно найдутся регулярные компоненты области возможного движения, которые перестраиваются через фокусы. Если область возможного движения ниже фокального уровня состоит из кольцевых компонент, в силу леммы 6 одна из них перестраивается через два фокуса (что соответствует атому  $B$ ), а все остальные разрываются на две односвязные компоненты (что соответствует атому  $C_2$ ). Если же компоненты области возможного движения до перестройки являются односвязными, две из них перестраиваются через фокус (что соответствует двум атомам  $A^*$ ), а оставшиеся либо разрываются, либо сливаются по отрезкам фокальной прямой (что соответствует атому  $B$ ).

Теперь докажем пункт 1. Согласно тому, что эллиптическая система координат симметрична относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , а область возможного движения ограничена ее координатными линиями, следует, что эта область симметрична относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , а также переходит в себя при повороте на угол  $\pi$ . Таким образом, зададим следующую инволюцию  $\tau$  на вершинах грубой молекулы (атомах): если атом лежит выше уровня атомов  $C_{2k}$ , сопоставим ему атом, соответствующий перестройке диаметрально

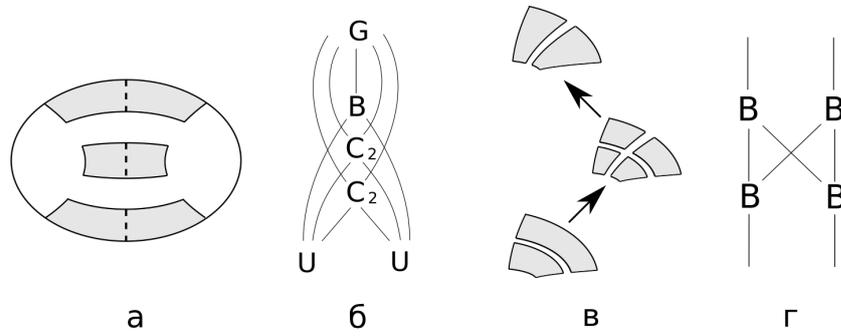


Рис. 21: Иллюстрации к пунктам 1 и 5. Здесь  $U$  – некоторое дерево, а  $G$  – симметричный граф.

противоположной компоненты области возможного движения; если атом лежит ниже уровня атомов  $C_{2k}$ , сопоставим ему его парный атом, соответствующий движению в противоположном направлении, согласно пункту 3; атомы  $C_{2k}$  оставим на месте. Заметим, что такая инволюция сопоставляет два атома, лежащие на одном уровне интеграла  $F$ , при этом если атом перешел в себя, то это либо  $C_{2k}$ , либо он соответствует перестройке компоненты связности области возможного движения, содержащей центр биллиарда, и следовательно единственный на своем уровне (рис. 21, а). Инволюция  $\tau$  задает инволюцию ребер грубой молекулы. Также заметим, что если ребро перешло в себя при этой инволюции, оно такое единственное на своем уровне  $f_i < F < f_{i+1}$  между двумя соседними критическими уровнями интеграла  $F$ . Несложно заметить, что построенная таким образом инволюция порождает необходимую симметрию молекулы в плоскости (пример изображен на рис. 21, б).

Для доказательства пункта 5 приведем пример появления цикла в грубой молекуле. На рис. 21, в, г изображена перестройка области возможного движения и соответствующий ей цикл. Пример перестройки области возможного движения, соответствующей кратному ребру в молекуле, изображен на рис. 22. Рассмотрим теперь два атома  $R_1$  и  $R_2$ , соединенные кратными ребрами. Если атом  $R_1$  принадлежит серии  $B_k$ , он соответствует разрыву некоторой односвязной компоненты области возможного движения по дугам гипербол. В результате этого разрыва получим  $k + 1$  компонент связности, ограниченных дугами одних и тех же софокусных эллипсов. Следовательно, эти компоненты не могут сливаться друг с другом по своим эллиптическим границам (т.к. эти границы должны принадлежать разным эллипсам). Иными словами, такой атом  $R_1$  не может быть соединен кратными ребрами. Если же атом  $R_1$  принадлежит серии  $C_{2k}$ , он соответствует разрыву не односвязной компоненты области возможного движения на  $2k$  односвязных компонент. Рассмотрим две из них, образующих кратные ребра. Существует две возможности: 1. эти две компоненты слились в одну вдоль фокального отрезка; 2. они слились с некоторой третьей компонентой, содержащей точки фокального отрезка. В первом случае атом  $R_2$  является атомом  $B$ , лежащем на фокальном уровне  $F = f_F$ , во втором он лежит выше фокального уровня, т.к. только для таких значений интеграла  $F$  область возможного движения может содержать точки фокального отрезка. Таким образом, был доказан пункт 6.

Пункт 7 почти очевиден. Действительно, ниже фокального уровня  $F = f_F$  молекула является деревом, согласно пункту 3. Выше этого уровня каждый атом является “разделяющим” атомом серии  $B_k$ , т.е. соответствует разделению области возможного движения по дугам софокусных гипербол. Граф, состоящий из таких разделяющих вершин, заведомо является деревом.

Утверждение доказано. □

Теперь вычислим метки, тем самым вычислив полные инварианты Фоменко-Цишанга.

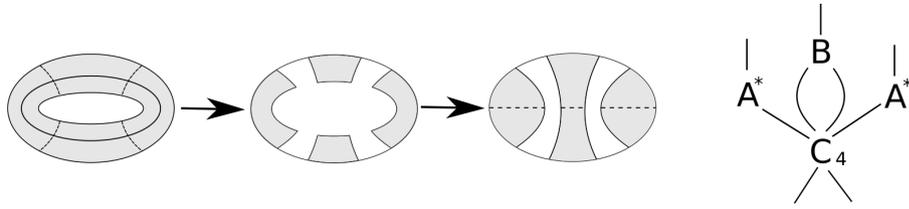


Рис. 22: Пример появления кратных ребер

Для этого разобьем атомы на шесть групп в соответствии со следствием 3:

- 1) минимальные 3-атомы  $A$  из групп 1, 2;
- 2) максимальные 3-атомы  $A$  из группы 3;
- 3) седловые 3-атомы из групп 4, 6, соответствующие бифуркациям области возможного движения типа “слияние”;
- 4) седловые 3-атомы из групп 5, 7, соответствующие бифуркациям типа “разрыв”;
- 5) 3-атомы  $A^*$  из группы 8;
- 6) 3-атом  $B$  из группы 9, соответствующий бифуркации через два фокуса;

**Теорема 5.** *Зафиксируем ориентацию изоэнергетического многообразия  $Q^3$  таким образом, чтобы все циклы  $\lambda$  на минимальных атомах  $A$  стали согласованными. Таблица на рис. 23 полностью описывает метки, соответствующие ребрам построенной выше грубой молекулы.*

Верхний атом \ Нижний атом	2	3	4	5	6
1	$r=0 \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$
3	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$
4	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	—————
5	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	—————	—————
6	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=1 \quad \Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=0$	—————	—————

Рис. 23: Таблица меток. Ячейка таблицы соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп, причем атом из первого столбца всегда стоит на уровень ниже атома из первой строки в грубой молекуле. Здесь  $\Theta$  обозначает вклад ребра в метку  $n$  семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а  $\Theta'$  обозначает вклад в метку  $n$  семьи атома 5 или 6.

*Доказательство.* Используя леммы 4 - 6 и замечание 6, заметим, что образы критических окружностей при проекции  $p$  на бильярд являются дугами софокусного эллипса (в том числе и вырожденного  $\lambda_2 = -b$ ) для атомов из групп 1 и 3, или дугами софокусной гиперболы (в том числе и вырожденной  $\lambda_1 = -b$ ) в случае атомов из групп 2 и 4. Следовательно, согласно правилам выбора допустимого базиса на границах 3-атомов, изложенных в [7], выберем циклы  $\lambda$  и  $\mu$  следующим образом: образ цикла  $\lambda$  атомов 1 и 4 при проекции на бильярд является дугой софокусной гиперболы, а образ цикла

$\mu$  – дугой эллипса (рис. 24, а, г); для атомов 2 и 3, наоборот, образ цикла  $\lambda$  является дугой софокусного эллипса, а образ цикла  $\mu$  – дугой гиперболы (рис. 24, б, в). В качестве циклов  $\lambda$  на границах атомов 5 и 6 выберем такие, образы которых изображены на рис. 24, д, е соответственно (такие циклы, очевидно, стягиваются к критическим), а образы циклов  $\mu$  (или  $\hat{\mu}$  для атома  $A^*$ ) выберем лежащими на дугах софокусных гипербол. При этом ориентация всех циклов  $\lambda$  седловых атомов и циклов  $\mu$  атомов  $A$ , а также циклов  $\lambda$  минимальных атомов  $A$  объявляется согласованной.

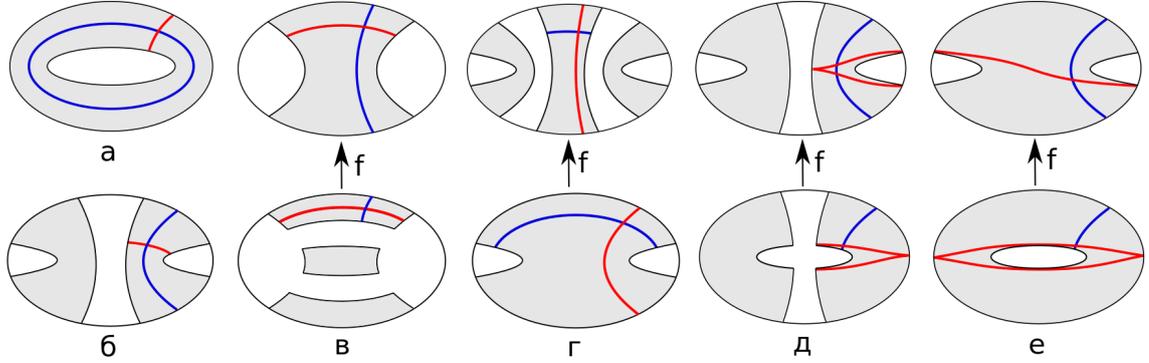


Рис. 24: Примеры выбора допустимого базиса на границах атомов. Красным цветом изображены образы циклов  $\lambda$  при проекции на бильярд, синим цветом изображены образы циклов  $\mu$  (или  $\hat{\mu}$  на рис. д). При этом на рис. в, г, д, е изображены две области – образы двух границ атома, соответствующих минимальному и максимальному значению интеграла  $F$ .

Одновременно с доказательством теоремы докажем следующую лемму с помощью индукции по высоте грубой молекулы.

**Лемма 7.** Пусть атом  $R$  принадлежит группе 4. Тогда ориентация цикла  $\mu$  на его верхней границе (то есть на границе, соответствующей максимальному значению интеграла  $f$ ) является согласованной. Если же этот атом принадлежит группе 3, ориентация цикла  $\mu$  на его верхней границе является несогласованной.

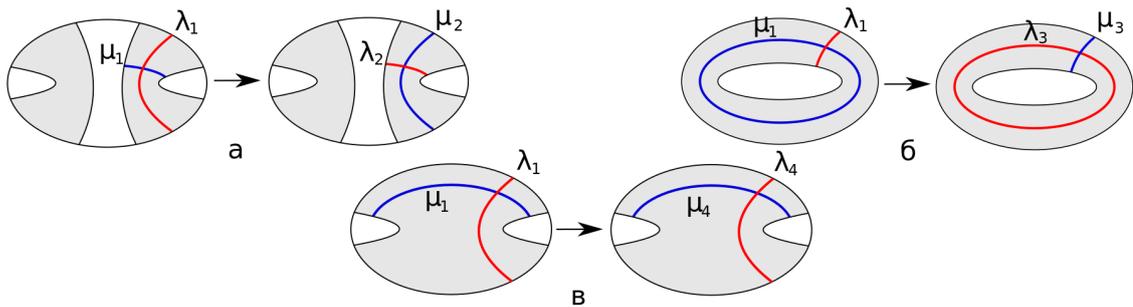


Рис. 25: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра  $A - A$  (рис. а),  $A - R_3$  (рис. б) и  $A - R_4$  (рис. в)

Итак, пусть ребро грубой молекулы связывает атомы из групп 1 и 2 (ребро  $A - A$ ). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл  $\lambda_1$  атома 1 переходит в цикл  $\mu_2$  атома 2 и наоборот (рис. 25, а). Согласно тому, что циклы  $\lambda_1$  и  $\mu_2$  согласованные, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Следовательно, метка  $r = 0$ , а метка  $\varepsilon = 1$ .

Пусть теперь ребро связывает атомы из групп 1 и 3 (ребро  $A - R_3$ ). Аналогично, цикл  $\lambda_1$  атома  $A$  переходит в цикл  $\mu_3$  атома  $R_3$  и наоборот с точностью до ориентации (рис. 25, б). Заметим, что циклы  $\lambda_3$  и  $\mu_1$  согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  равен 0. Цикл  $\mu_3$  обязан быть согласованным. Следовательно, на другой (верхней) границе атома  $R_3$  он станет несогласованным. Этот факт является базой индукции в доказательстве леммы 7.

Пусть ребро связывает атомы из групп 1 и 4 (ребро  $A - R_4$ ). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл  $\lambda_1$  атома  $A$  переходит в цикл  $\lambda_4$  атома  $R_4$ , а цикл  $\mu_1$  переходит в  $\mu_4$  (рис. 25, в). Согласно тому, что циклы  $\lambda_1$  и  $\lambda_4$  согласованные, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Следовательно, метка  $r = \infty$ , а метка  $\varepsilon = 1$ . Цикл  $\mu_4$  при этом несогласованный. Следовательно, на другой (верхней) границе атома  $R_4$  он станет согласованным. Этот факт также является базой индукции в доказательстве леммы 7.

Рассмотрим теперь ребра, соединяющие два атома из группы 3 или 4 (ребра  $R_3 - R_3$  и  $R_4 - R_4$ ). Заметим, что в обоих случаях цикл  $\lambda_-$  одного атома переходит в цикл  $\lambda_+$  другого атома, и то же для циклов  $\mu$ . При этом оба цикла  $\lambda$  согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Метка  $r = \infty$ , метка  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  нулевой. При этом на верхней границе обоих атомов циклы  $\mu$  сохраняют согласованность (на верхнем атоме  $R_3$  он по прежнему несогласованный, а на верхнем атоме  $R_4$  – согласованный).

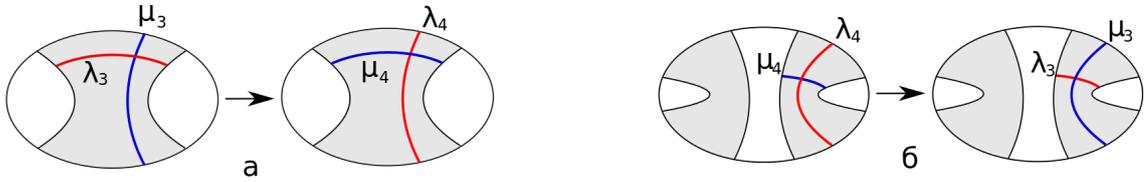


Рис. 26: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра  $R_3 - R_4$  (рис. а) и  $R_4 - R_3$  (рис. б)

Рассмотрим ребро, связывающее атомы из групп 3 и 4 (ребро  $R_3 - R_4$ ). С точностью до ориентации цикл  $\lambda_3$  атома  $R_3$  переходит в цикл  $\mu_4$  атома  $R_4$  и наоборот (рис. 26, а). По лемме 7 цикл  $\mu_3$  несогласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метка  $r = 0$ , а метка  $\varepsilon = -1$ . Это ребро может быть как входящим, так и выходящим для двух семей, причем вклад в метку  $n$  каждой из них нулевой. Заметим, что цикл  $\mu_4$  имеет несогласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе атома  $R_4$  она станет согласованной.

Аналогично, рассмотрим ребро  $R_4 - R_3$ . Как и раньше, цикл  $\lambda_3$  атома  $R_3$  переходит в цикл  $\mu_4$  атома  $R_4$  и наоборот (рис. 26, б). Но, согласно лемме 7, цикл  $\mu_4$  согласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  для каждой из двух возможных семей нулевой. Заметим, что цикл  $\mu_3$  имеет согласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе атома  $R_3$  она станет несогласованной.

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 1 и 5 (ребро  $A - A^*$ ). Заметим, что  $\lambda_5 = 2\lambda_1 + \mu_1$  в силу согласованности циклов  $\lambda_1$  и  $\mu_1$ , а циклы  $\lambda_1$  и  $\mu_5$  совпадают с точностью до ориентации (рис. 27, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид



Рис. 27: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра  $A - A^*$  (рис. а) и  $A - B$  (рис. б)

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$  нулевой. При этом, ориентация цикла  $\mu_5$  согласованная. Следовательно, на верхней границе атома  $A^*$  ориентация цикла  $\hat{\mu}$  является несогласованной.

Аналогичные соотношения на базисные циклы, и, следовательно, аналогичные метки соответствуют ребру  $A - B$ , соединяющему атомы из групп 1 и 6 (рис. 27, б). Отметим, что на верхней границе атома  $B$  ориентация цикла  $\mu$ , как и в прошлом случае, является несогласованной.

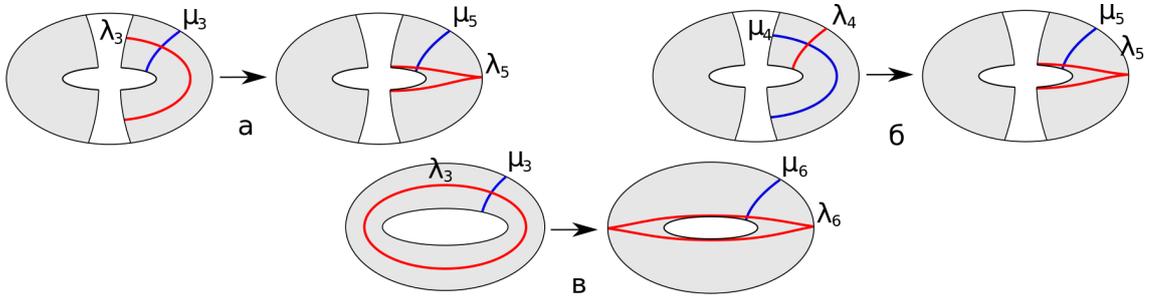


Рис. 28: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра  $R_3 - A^*$  (рис. а),  $R_3 - B$  (рис. б) и  $R_4 - A^*$  (рис. в)

Рассмотрим ребро, соединяющее атомы из 3 и 5 группы (ребро  $R_3 - A^*$ ). В силу леммы 7 соотношения на циклы имеют вид  $\lambda_5 = \lambda_3 - 2\mu_3$ , при этом циклы  $\mu_3$  и  $\mu_5$  совпадают с точностью до ориентации (рис. 28, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0.5$ , метка  $\varepsilon = -1$ . Вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$ , а также возможной другой семьи, для которой ребро  $R_3 - A^*$  является выходящим, равен  $-1$ . При этом заметим, что ориентация цикла  $\mu_5$  согласованная. Следовательно, на верхней границе атома  $A^*$  ориентация цикла  $\hat{\mu}$  также является несогласованной.

И опять, аналогичные соотношения на базисные циклы и метки соответствуют ребру  $R_3 - B$ , соединяющему атомы из групп 3 и 6 (рис. 28, б). Отметим, что на верхней границе атома  $B$  ориентация цикла  $\mu$ , как и в прошлом случае, является несогласованной.

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 4 и 5 (ребро  $R_4 - A^*$ ). В силу леммы 7 соотношения на циклы имеют вид  $\lambda_5 = 2\lambda_4 + \mu_4$ , при этом циклы  $\lambda_4$  и  $\mu_5$  совпадают с точностью до ориентации (рис. 28, в). Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ . Вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$  нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро  $R_3 - A^*$  является выходящим, равен 2. И опять, ориентация цикла  $\mu_5$  согласованная. Следовательно, на верхней границе атома  $A^*$  ориентация цикла  $\hat{\mu}$  также является несогласованной.

Заметим, что не существует ребер типа  $R_4 - B$ , соединяющих атомы из 4 и 6 группы. Действительно, атом  $B$  из 6 группы предполагает перестройку неодносвязной области

возможного движения в односвязную. Но атом  $R_4$  из 4 группы соответствует “разрыву” области вдоль дуг софокусных гипербол. После такого “разрыва” область возможного движения в любом случае станет объединением односвязных областей. Также невозможны ребра, соединяющие два атома из группы 5 или 6, или же два атома из групп 5 и 6, так как эти атомы лежат на одном уровне интеграла  $F$ .

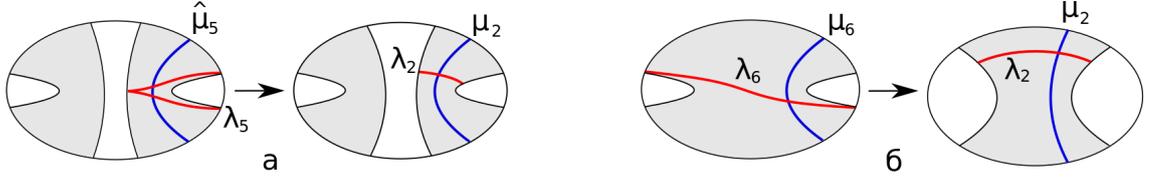


Рис. 29: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра  $A^* - A$  (рис. а) и  $B - A$  (рис. б)

Также отметим, что во всех разобранных случаях на верхней границе атомов из групп 5 и 6 циклы  $\mu$  (или  $\hat{\mu}$ ) ориентированы несогласованно. Рассмотрим теперь ребро  $A^* - A$ , соединяющее атомы из групп 2 и 5. В силу согласованности цикла  $\mu_2$ , соотношение на цикл  $\lambda_5$  имеет вид  $\lambda_5 = \pm 2\lambda_2 + \mu_2$ , при этом  $\hat{\mu}_5 = -\mu_2$  (рис. 29, а). Воспользуемся правилом выбора цикла  $\mu$  на атоме со звездой:  $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm\lambda_2$ . Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$  нулевой.

Теперь предположим, что ребро связывает атомы из 2 и 6 группы (ребро  $B - A$ ). В силу несогласованности цикла  $\mu_6$ , а также соотношения  $\lambda_5 = \pm\lambda_2 + \mu_2$  (рис. 29, б), матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$  равен 1.

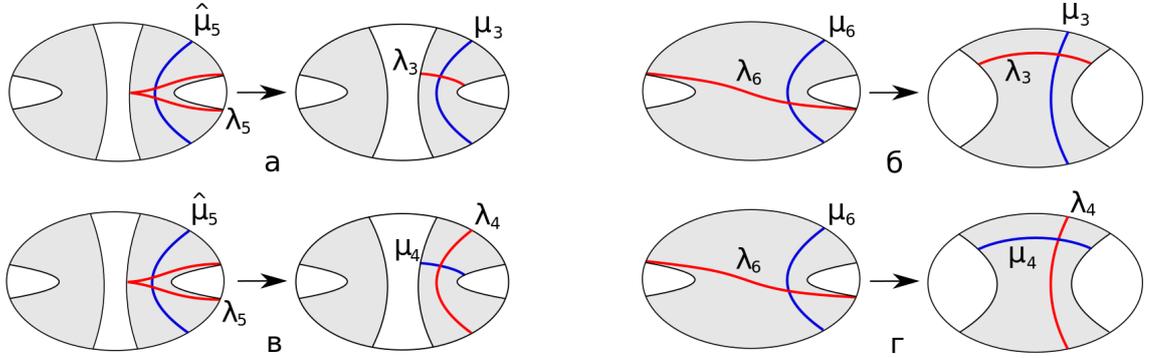


Рис. 30: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра  $A^* - R_3$  (рис. а),  $B - R_3$  (рис. б),  $A^* - R_4$  (рис. в) и  $B - R_4$  (рис. г)

Рассмотрим ребро вида  $A^* - R_3$ , соединяющее атомы из 5 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид  $\lambda_5 = 2\lambda_3 \pm \mu_3$ , при этом  $\hat{\mu}_5 = \mp\mu_3$  в силу несогласованности цикла  $\hat{\mu}_5$  (рис. 30, а). Следовательно, цикл  $\mu_5$  имеет вид  $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \lambda_3$ , а матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ . Вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$  нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро  $R_3 - A^*$  является выходящим, равен 2. Заметим, что выбор положительного знака означает согласованности цикла  $\mu_3$ . Следовательно, на верхней границе атома  $R_3$  цикл  $\mu$  несогласованный.

Аналогично рассмотрим ребро  $B - R_3$ , соединяющее атомы из 6 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид  $\lambda_6 = \lambda_3 \pm \mu_3$ , при этом  $\mu_5 = \mp\mu_3$  в силу несогласованности

(рис. 30, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ . Вклад в метку  $n$  семьи атома  $B$ , как и вклад в метку возможной другой семьи, равен 1. Как и в прошлом случае, выбор положительного знака означает согласованности цикла  $\mu_3$ . Следовательно, на верхней границе атома  $R_3$  цикл  $\mu$  также является несогласованным.

Рассмотрим теперь ребро, соединяющее атомы из групп 5 и 4 (ребро  $A^* - R_4$ ). Соотношения на циклы имеют вид  $\lambda_5 = \lambda_4 \pm 2\mu_4$ , при этом  $\hat{\mu}_5 = -\lambda_4$  в силу несогласованности цикла  $\hat{\mu}_5$  (рис. 30, в). Следовательно, цикл  $\mu_5$  имеет вид  $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm 2\mu_4$ , а матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0.5$ , метка  $\varepsilon = -1$ . Вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$ , как и вклад в метку возможной другой семьи, равен  $-1$ . Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла  $\mu_3$ . Следовательно, на верхней границе атома  $R_4$  цикл  $\mu$  согласованный.

Наконец, рассмотрим ребро, соединяющее атомы из групп 6 и 4 (ребро  $B - R_4$ ). Соотношения на циклы имеют вид  $\lambda_5 = \lambda_4 \pm \mu_4$ , при этом  $\mu_5 = -\lambda_4$  в силу несогласованности цикла  $\mu_5$  (рис. 30, г). Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = -1$ . Вклад в метку  $n$  семьи атома  $A^*$  нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи равен  $-1$ . Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла  $\mu_3$ . Следовательно, на верхней границе атома  $R_4$  цикл  $\mu$  также является согласованным.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях цикл  $\mu$  на верхней границе атома  $R_4$  является согласованным, а на верхней границе атома  $R_3$  – несогласованным. С учетом базы лемма 7 была доказана с помощью индукции по высоте критических уровней интеграла  $F$ .

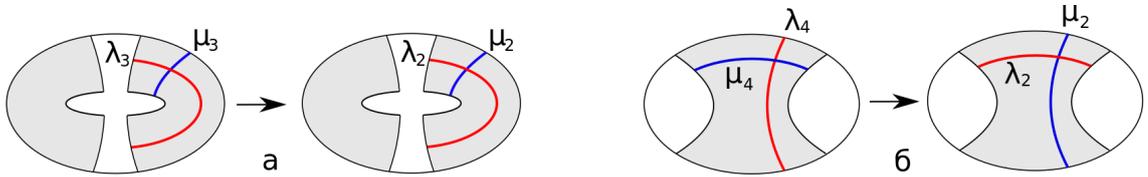


Рис. 31: Образы базисных циклов на границах атомов для ребра  $R_3 - A$  (рис. а) и  $R_4 - A$  (рис. б)

Пусть теперь ребро соединяет атомы из групп 2 и 3 ( $R_3 - A$ ). Заметим, что циклы  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ , а также  $\mu_2$  и  $\mu_3$  совпадают с точностью до ориентации (рис. 31, а). В силу леммы 7 матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Следовательно, метка  $r = \infty$ , а метка  $\varepsilon = 1$ .

И наконец, пусть ребро имеет вид  $R_4 - A$ , соединяющее атомы из групп 2 и 4. Цикл  $\lambda_4$  переходит в цикл  $\mu_2$  и наоборот (рис. 31, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Следовательно, метка  $r = 0$ , метка  $\varepsilon = 1$ , а вклад в метку  $n$  возможной семьи нулевой.

Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 9.** Заметим, что при выбранной ориентации  $Q^3$  циклы  $\lambda$  на максимальных атомах  $A$  также будут ориентированны согласованно.

Также заметим, что каждый атом из групп 5 и 6 ( $A^*$  и  $B$ ) образует семью. В зависимости от соседних атомов, метка  $n$  атома  $A^*$  может равняться  $-2$ ,  $-1$  или  $0$ , а метка  $n$  атома  $B$  может равняться  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$  или  $1$ .

Таким образом, были построены всевозможные инварианты Фоменко-Цишанга, соответствующие эллиптическому бильярду с потенциалом.

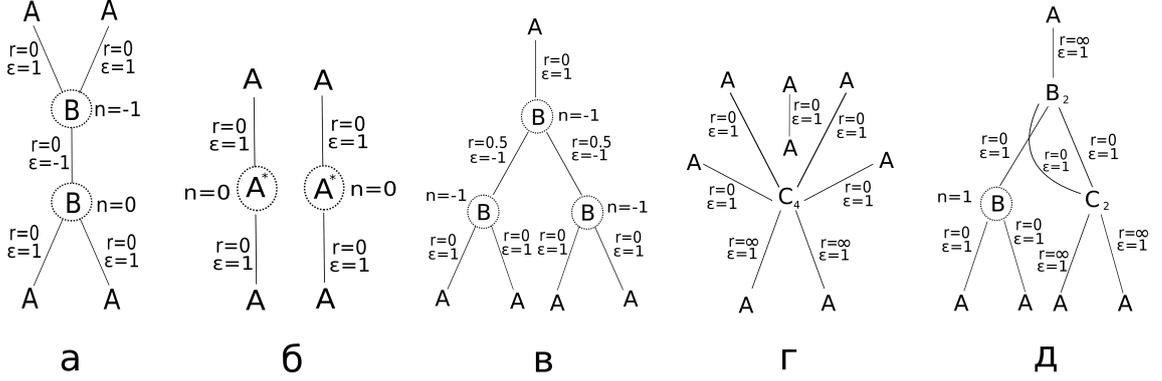


Рис. 32: Примеры меченых молекул с малым количеством критических значений интеграла  $F$  (не больше четырех)

## 7 Изоэнергетическое многообразие $Q^3$ .

Определим теперь, чему гомеоморфно изоэнергетическое многообразие  $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$ . Отметим, что единственное ограничение на вектор скорости задает следующая формула:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(h - W(x, y)),$$

где  $W$  является потенциалом. Таким образом, если в точке  $(x, y)$  имеем  $W(x, y) < h$ , то этой точке соответствует целая окружность векторов скорости, если  $W(x, y) = h$ , ей соответствует один нулевой вектор, если  $W(x, y) > h$ , в этой точке не происходит движение. Следовательно, образ изоэнергетического многообразия  $Q^3$  при проекции  $p$  на бильярд задается неравенством

$$W(x, y) \leq h \quad (23)$$

**Лемма 8.** *Все точки, для которых выражение (23) обращается в равенство, являются граничными точками образа изоэнергетического многообразия  $p(Q^3)$ .*

*Доказательство.* Отметим, что по замечанию 6 и замечанию к теореме 4 фокусам всегда соответствует окружность векторов. Следовательно, если фокусы лежат в образе  $p(Q^3)$ , они удовлетворяют строгому неравенству (23) и являются внутренними точками.

Используя формулу (13) из леммы 2, приведем неравенство (23) к следующему виду:

$$h\lambda_1 - P(\lambda_1) \leq h\lambda_2 - P(\lambda_2).$$

Напомним, что  $V(z) = f + hz - P(z)$ . Согласно замечанию к теореме 4 о точках ранга 0, не существуют таких двух точек  $z = e_1 \in [-a, -b]$  и  $z = e_2 \in [-b, 0]$ , которые являются локальными экстремумами многочлена  $V(z)$  на своих отрезках (либо точками  $-a$ ,  $-b$  или 0) и  $V(e_1) = V(e_2) = 0$ . Следовательно, для любой точки  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , удовлетворяющей равенству (23), для одной из координат  $\lambda_i$  многочлен  $V$  является монотонным в окрестности точки  $z = \lambda_i$ , при этом  $\lambda_i$  не равняется  $-a$ ,  $-b$  или 0. Пусть без ограничения общности такой координатой является  $\lambda_1$ . Тогда в окрестности этой координаты существует значение  $\lambda'_1$ , для которого  $h\lambda'_1 - P(\lambda'_1) > h\lambda_1 - P(\lambda_1) = \lambda_2 - P(\lambda_2)$ . Следовательно, точка  $(\lambda'_1, \lambda_2)$  не принадлежит образу  $Q^3$ , а точка  $(\lambda_1, \lambda_2)$  является граничной.

Лемма доказана.  $\square$

Напомним, что многочлен  $V$  не имеет кратных корней по замечанию к теореме 4 о вырожденных орбитах. Следовательно, условие того, что точка  $z = e$  является экстремумом, эквивалентно условию  $V'(e) = 0$ .

**Лемма 9.** *Любая компонента края образа  $p(Q^3)$  гомеоморфна окружности.*

*Доказательство.* Для доказательства нужно показать, что множество  $(x, y) : W = h$  не имеет самопересечений и точек касания с граничным эллипсом. Докажем, что нет самопересечений. Достаточно показать, что для любой точки границы либо  $W'_x \neq 0$ , либо  $W'_y \neq 0$ . Вычислим полный дифференциал  $W$  в граничной точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$ :

$$dW = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(P'(\lambda_1) - h) - \frac{d\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(P'(\lambda_2) - h) = \frac{V'(\lambda_2)d\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{V'(\lambda_1)d\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если точка  $(\lambda_1, \lambda_2)$  не принадлежит осям  $0x$  и  $0y$ , условие  $W'_x = W'_y = 0$  эквивалентно условию  $V'(\lambda_1) = V'(\lambda_2) = 0$ . Однако, последнее означает, что выполнены условия  $C1$  и  $C2$ , что запрещено замечанием к теореме 4 о точках ранга 0.

Пусть теперь точка  $(\lambda_1, \lambda_2)$  принадлежит оси  $0y$ . Тогда  $W'_x = 0$  в силу того, что каждый моном многочлена  $W$  имеет четную степень по переменной  $x$ . При этом

$$W'_y = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}yV'(\lambda_2).$$

То, что  $V'(\lambda_2) = 0$  и  $V(-a) = V(\lambda_2)$ , означает, что выполнены условия  $C2$  и  $C4$ , что запрещено замечанием к теореме 4 о точках ранга 0. Если  $y = 0$ , то точка с координатами  $\lambda_1 = -a$  и  $\lambda_2 = -b$  принадлежит границе и  $V(-a) = V(-b)$ . Следовательно, выполнены условия  $C4$  и  $C5$ , что запрещено тем же замечанием. Аналогично рассматривается случай, когда точка  $(\lambda_1, \lambda_2)$  принадлежит оси  $0x$ .

Докажем теперь, что нет точек касания с граничным эллипсом. Достаточно показать, что вектора  $(W'_x, W'_y)$  и  $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$  линейно независимы. Если точка  $(\lambda_1, \lambda_2)$  не лежит на осях  $0x$  и  $0y$ , из условия линейной зависимости вытекает, что  $V'(\lambda_1) = 0$ . Следовательно, выполнены условия  $C1$  и  $C3$ , что запрещено. Если же точка касания лежит на осях  $0y$  или  $0x$ , то автоматически выполнены условия  $C3$  и  $C4$  или условия  $C3$  и  $C5$  соответственно, что также запрещено.

Лемма доказана. □

В итоге имеем, что образ изоэнергетического многообразия  $p(Q^3)$  при проекции  $p$  на бильярд ограничен контурами, гомеоморфными окружности, и всем внутренним точкам этого образа соответствует окружность векторов скорости. Компоненты связности этого образа могут быть как односвязным, так и представлять собой “дырявые” диски со сколь угодно большим числом дырок.

**Теорема 6.** *Изоэнергетическое многообразие  $Q^3$  состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых гомеоморфна либо трехмерной сфере  $S^3$ , либо связной сумме  $(S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)$  нескольких многообразий  $S^1 \times S^2$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим односвязную компоненту связности образа  $p(Q^3)$  (обозначим ее  $K$ ). Разобьем ее по некоторому внутреннему контуру на две области: дисковую  $K_1$  и кольцевую  $K_2$  (рис. 33, а). По замеченному ранее, каждой точке области  $K_1$  соответствует окружность векторов. Следовательно, прообраз  $p^{-1}(K_1)$  в  $Q^3$  гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы  $\lambda_1$  и  $\mu_1$  так, что цикл  $\lambda_1 = p^{-1}(x, y)$ , т.е. окружность векторов, соответствующая одной точке  $(x, y)$  области  $\Pi_1$ , а  $\mu_1 = \{(x, y, \dot{x}, 0) : (x, y) \in \partial\Pi_1\}$ , то есть прообраз границы области  $\Pi_1$ , каждой точке которой сопоставлен вектор скорости с компонентой  $\dot{y} = 0$ . Заметим, что цикл

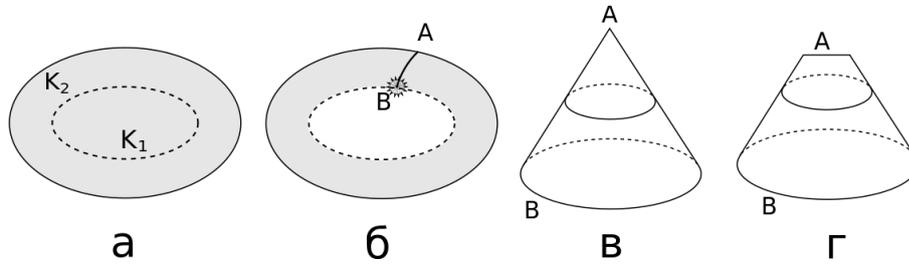


Рис. 33: Случай многообразия  $S^3$

$\lambda_1$  задает образующую фундаментальной группы полнотория  $p^{-1}(\Pi_1)$  (является его параллелью), а  $\mu_1$  стягивается в точку (является меридианом).

Докажем теперь, что прообраз области  $K_2$  также гомеоморфен полноторию. Действительно, разобьем ее на стягиваемые отрезки, трансверсальные ее границе, начало которых лежит на границе области  $K$  (точка  $A$ ), а конец – на внутренней границе области  $K_2$  (точка  $B$ ), как изображено на рис. 33, б. Заметим, что если точка  $A$  не лежит на границе бильярда, ей соответствует нулевой вектор скорости. Следовательно, в прообразе отрезка  $AB$  лежит конус (рис. 33, в), т.е. он гомеоморфен двумерному диску. Если же точка  $A$  принадлежит граничному эллипсу, в прообразе отрезка  $AB$  лежит цилиндр, одна граница которого стянута на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе бильярда (рис. 33, г). Таким образом, прообраз отрезка  $AB$  опять гомеоморфен двумерному диску. Следовательно, прообраз всей области  $\Pi_2$  гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы  $\lambda_2 = \mu_1$  и  $\mu_2 = \lambda_1$ . Заметим, что цикл  $\lambda_2$  задает образующую фундаментальной группы полнотория  $p^{-1}(K_2)$  (является его параллелью), а  $\mu_2$  стягивается в точку (является меридианом).

Таким образом, прообраз  $K$  состоит из двух полноторий, склеенных по граничному тору по правилу  $\lambda_2 = \mu_1$  и  $\mu_2 = \lambda_1$ . Итоговое трехмерное многообразие гомеоморфно  $S^3$  (см., например, [7], т. I, стр. 201).

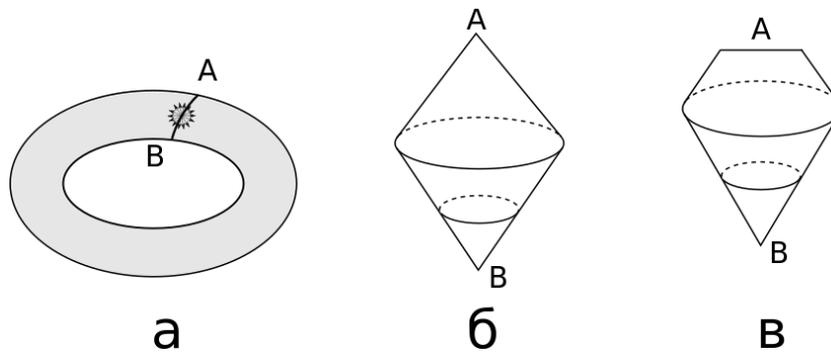


Рис. 34: Случай многообразия  $S^1 \times S^2$

Теперь рассмотрим неодносвязную компоненту связности образа  $p(Q^3)$ , гомеоморфную кольцу (обозначим ее  $U$ ). Как и в случае области  $K_2$ , разобьем ее на стягиваемые отрезки, трансверсальные ее границе, начало которых лежит на внешней границе области  $U$  (точка  $A$ ), а конец – на внутренней границе (точка  $B$ ), как изображено на рис. 34, а. Заметим, что если точка  $A$  не принадлежит границе бильярда, ей соответствует нулевой вектор скорости, прообраз отрезка  $AB$  гомеоморфен цилиндру, границы которого стянуты в точку (рис. 34, б). Если же точка  $A$  принадлежит границе бильярда, прообраз отрезка  $AB$  гомеоморфен цилиндру, одна граница которого стянута в точку, а вторая – на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе бильярда (рис. 34, в). Таким образом, прообраз отрезка  $AB$  всегда гомеоморфен двумерной окружности  $S^2$ . Следовательно, прообраз всей области  $U$  гомеоморфен прямому про-

изведению  $S^2 \times S^1$ .

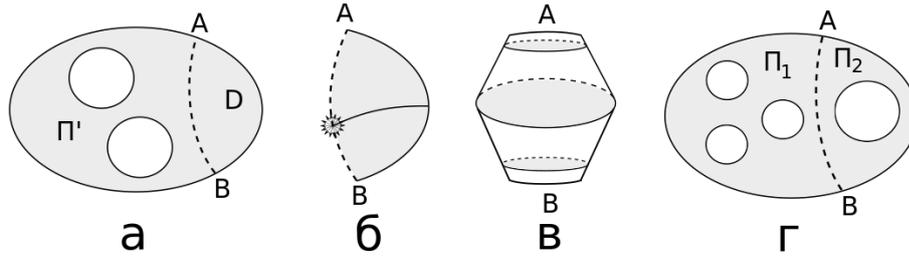


Рис. 35: Случай многообразия  $S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1$

Наконец, рассмотрим общий случай, при котором компонента связности образа  $p(Q^3)$  (обозначим ее  $\Pi$ ) содержит произвольное количество компонент края (“дырок”). Покажем по индукции, что если  $\Pi$  содержит  $n$  “дырок”, ее прообраз гомеоморфен связной сумме  $n$  пространств  $S^2 \times S^1$ . Шаг индукции при  $n = 1$  был доказан ранее. Предположим, что утверждение доказано для значения  $n = k$ . Пусть области  $\Pi$  соответствует  $k' \leq k$  дырок. Выберем на ее внешней границе точки  $A$  и  $B$  и разобьем ее на две области  $\Pi'$  и  $D$  стягиваемым отрезком  $B$  так, чтобы область  $D$  не содержала “дырок” (рис. 35, а). Докажем, что прообраз области  $D$  гомеоморфен трехмерному диску. Действительно, ее граница разбивается на два отрезка точками  $A$  и  $B$ , причем один из них лежит на границе области  $\Pi$ , а каждой точке второго соответствует окружность векторов скорости. Разобьем область  $D \setminus \{A, B\}$  на отрезки, начала которых лежат на одной границе, а концы – на другой (рис. 35, б). Как и в случае области  $K_2$ , прообраз каждого такого отрезка разбиения гомеоморфен двумерному диску  $D^2$ . Следовательно, прообраз области  $D$  гомеоморфен  $D^2 \times [A, B]$ , где границы  $D^2 \times \{A\}$  и  $D^2 \times \{B\}$  стянуты в точку или на отрезок, т.е. трехмерному диску (рис. 35, в). Таким образом, по предположению индукции, прообраз области  $\Pi'$  гомеоморфен

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{k'} \setminus D^3.$$

Пусть теперь области  $\Pi$  соответствует  $k + 1$  дырка. Выберем на ее внешней границе точки  $A$  и  $B$  и разобьем ее на две области  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  стягиваемым отрезком  $AB$  так, чтобы область  $\Pi_1$  содержала  $k$  “дырок”, а область  $\Pi_2$  – одну “дырку” (рис. 35, г). Согласно доказанному выше, прообразы этих областей гомеоморфны

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_k \setminus D^3$$

и

$$S^2 \times S^1 \setminus D^3$$

соответственно. Следовательно, прообразом области  $\Pi$  является склейка этих двух пространств по граничной сфере, что гомеоморфно связной сумме  $\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{k+1}$ .

Теорема доказана. □

**Замечание 10.** Эта теорема схожа с теоремой Смейла из динамики твердого тела. Она гласит следующее: рассмотрим образ изоэнергетического многообразия  $Q^3$  при его проекции на сферу Пуассона. Если этот образ покрывает всю сферу, то  $Q^3$  гомеоморфно проективному пространству  $\mathbb{R}P^3$ ; если образ гомеоморфен сфере с одной дыркой, то  $Q^3$  гомеоморфно сфере  $S^3$ ; если образ содержит  $m > 1$  дырок, то  $Q^3$  гомеоморфно связной сумме  $\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{m-1}$

**Замечание 11.** Заметим, что в каждом конкретном случае конфигурации многочлена  $V$  мы независимо строим инвариант Фоменко-Цишанга и определяем тип многообразия  $Q^3$ , который в частности и определяется этим инвариантом. Иными словами, мы получили наглядный способ определения типа  $Q^3$ , соответствующего некоторой меченой молекулой (определенного вида), с помощью бильярда в эллипсе.

## 8 Лиувиллево эквивалентные системы.

Определим теперь, какие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы лиувиллево эквивалентны нашей бильярдной системе на некотором значении гамильтониана  $H$ . Согласно теореме Фоменко-Цишанга достаточно сравнить меченые молекулы этих двух систем. Таблица 1 сопоставляет меченую молекулу, появляющуюся в нашей бильярдной системе, со случаями систем динамики твердого тела, имеющими эту же молекулу (список меченых молекул для случаев динамики твердого тела был приведен в [7], глава 5). Отметим, что все инварианты Фоменко-Цишанга, встречающиеся в динамике твердого тела, имеют не слишком большое число атомов. Следовательно, эквивалентные им случаи нашего бильярда нужно искать для потенциалов достаточно малого порядка. И действительно, все приведенные инварианты в таблице 1 встречаются уже для потенциалов второй и четвертой степени.

№	Молекула	Случаи динамики твердого тела
1	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	Лагранж (1), Ковалевская (1), Жуковский (7) Эйлер (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1)
2	$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Жуковский (8)
3	$A \begin{cases} \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \\ \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Эйлер (2), Клебш (5)
4	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \textcircled{A} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $n=0$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский (2)
5	$A \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \textcircled{B} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \textcircled{B} \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$ $n=0$ $n=-1$	Ковалевская (3)

Таблица 1: Эквивалентные системы динамики твердого тела

## Список литературы

- [1] Биркгоф Дж. Динамические системы М.;Л.; Гостехиздат, 1941.
- [2] Якоби К. Лекции по динамике. М.; Гостехиздат, 1936.
- [3] Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.

- [4] V. I. Dragovich, Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse, J. Appl. Maths Mechs, Vol. 62, No. 1, pp. 159-162, 1998
- [5] И. Ф. Кобцев, Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ, Матем. сб., 211:7 (2020), 93–120
- [6] Пустовойтов С. Е. Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021.
- [7] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I, II— Ижевск: РХД, 1999.
- [8] Фокичева В. В., Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.
- [9] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, Генетическое введение в динамику систем с ударами, М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [10] Харламов М. П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, том 6, №4, с.769-805.