

УДК 511

Эллиптический бильярд с косинусным законом преломления на софокусных квадриках.

М. А. Никулин¹

Изучается бильярд в ограниченной эллипсом области, разбитой дугами софокусных квадрик на несколько областей, заполненных однородными средами с разными плотностями. При пересечении границы раздела двух сред предполагается, что траектория отклоняется по модифицированному (косинусному) закону преломления. Для полученной таким образом системы получена постоянная движения.

Ключевые слова: бильярд в эллипсе, интеграл движения, модифицированный закон преломления.

For a billiard in an elliptic domain we consider several confocal quadrics, which divide this domain into several regions each filled with a homogeneous medium with various densities. When crossing the quadric separating the two media, it is assumed that the trajectory deviates from a straight line according to the modified (cosine) law of refraction. For the system obtained in this way, a constant of motion is obtained.

Key words: billiards in an ellipse, integral of motion, modified law of refraction.

1. Введение. Интерес к составным бильярдам возникает в связи с активно разрабатываемой в школе А. Т. Фоменко теорией бильярдов со сложной топологией, таких как бильярдные книжки. Современное состояние этой теории см. в обзоре [1].

Рассмотрим ограниченную эллипсом область, разбитую дугой софокусной квадрики на две области с разными плотностями, но постоянными внутри каждой из областей. Тогда мы можем рассмотреть бильярдную траекторию, которая при пересечении границы раздела двух сред меняет направление по закону Снеллиуса [2]: отношение синусов углов падения и преломления равно обратному отношению плотностей сред. Экспериментальная компьютерная проверка демонстрирует, что такой бильярд неинтегрируем.

С другой стороны, в физике известны законы преломления другого вида. В задачах теплопроводности направление векторов плотностей теплового потока на границе раздела двух сред определяется отношением тангенсов [3, 4]. В некоторых задачах оптики встречаются законы, формулируемые в терминах отношения косинусов углов падения и преломления [5, 6].

В настоящей работе мы рассматриваем бильярд в эллипсе, разделенном дугами софокусных квадрик на несколько областей Ω_i с постоянными в них плотностями n_i , при этом закон преломления задан равенством $n_1 \cos \theta_1 = n_2 \cos \theta_2$. Мы покажем, что в полученная система будет интегрируемой (см. пункты 5 и 6) и предъядвим дополнительный интеграл. В некоторых случаях значения этого дополнительного интеграла принадлежат не прямой, а окружности, см. пункт 7.

2. Классический бильярд. Зафиксируем большую и малую полуоси эллипса a и b , где $a > b > 0$ и во внутренности эллипса $\left(f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right)$ рассмотрим движение материальной точки с координатами $\mathbf{x} = (x, y)$ и вектором скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, при котором на границе эллипса $f(x, y) = 1$ векторы скорости до отражения и после него образуют равные по величине углы с вектором нормали $n = \nabla f(x, y)|_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right)$ к эллипсу в точке отражения (x_0, y_0) .

Обозначим $\Psi = \{Q_\lambda \mid \lambda \in (0, a^2)\}$ – однопараметрическое семейство софокусных квадрик, где квадрика Q_λ задается уравнением $f_\lambda(x, y) = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$.

¹Никулин Михаил Александрович – м.н.с. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фонд. и прикл. матем., e-mail: nikmihale@gmail.com.

Nikulín Mikhail Aleksandrovich – Junior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Интегрируемость классического бильярда обусловлена классической теоремой из геометрии: если какое-то звено бильярдной траектории коснулось софокусной квадрики Q_λ из семейства Ψ , то и все остальные звенья касаются этой же квадрики, поэтому λ является первым интегралом.

3. Интеграл Иоахимсталия.

Пусть $M = Q_0 \times \mathbb{R}^2$ – фазовый цилиндр бильярда в эллипсе Q_0 . Для точки $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = ((x, y), (v_x, v_y)) \in M$ рассмотрим функцию $J(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\left(\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2}\right)$. Функция $J(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ не является интегралом движения точки в эллиптическом бильярде, так как не сохраняется на прямолинейных отрезках траектории. Тем не менее, для «дискретного» бильярда в эллипсе, когда траектория записывается последовательностью точек на эллипсе, в которых траектории испытывают отражения, функция $J(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ является интегралом. А именно, прямолинейное звено бильярдной траектории будем кодировать начальной точкой звена (x, y) и его вектором скорости (v_x, v_y) . Тогда выполняется следующее утверждение:

Теорема 1[7, с. 61]. Пусть $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) \in M$, $i = 1, \dots$, – последовательность точек на фазовом цилиндре, кодирующая последовательные звенья некоторой бильярдной траектории. Тогда $J(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) = J(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1})$ для всех i .

Функцию J называют интегралом Иоахимсталия. Заметим, что эту функцию можно переписать в виде

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \nabla f_0(x, y) \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

Прежде чем перейти к геометрическому смыслу интеграла Иоахимсталия, рассмотрим следующий вопрос: сколько квадрик из семейства $\Psi = \{Q_\lambda \mid \lambda \in (0, a^2)\}$ касаются фиксированной произвольным образом прямой в \mathbb{R}^2 ?

Утверждение. Рассмотрим прямую $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$, проходящую через точку $\mathbf{x} = (x, y)$ на плоскости \mathbb{R}^2 и имеющую направление $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Тогда:

(i) Прямая касается не более одной квадрики Q_λ из семейства Ψ .

(ii) Исключая вертикальную ось $x = 0$ и прямые, проходящие хотя бы через один из фокусов, такая касательная квадратика Q_λ существует и ее параметр λ определяется по формуле

$$\lambda = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{a^2 v_y^2 + b^2 v_x^2 - (xv_y - yv_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1)$$

Доказательство. Прямая $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ касается квадрики Q_λ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{(x + tv_x)^2}{a^2 - \lambda} + \frac{(y + tv_y)^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

имеет ровно одно решение по t , то есть когда дискриминант квадратного уравнения с переменной t равен нулю. Приравняв дискриминант к нулю и решая равенство относительно параметра софокусной квадрики λ можно получить формулу (1) из второго пункта формулировки утверждения. В случаях, если $\lambda = a^2$ или $\lambda = b^2$, касательная квадратика Q_λ вырождается в прямую (проходящую через малую полуось при $\lambda = a^2$ и проходящую через большую полуось при $\lambda = b^2$), следовательно прямая $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ не касается никакой софокусной квадрики Q_λ . \square

Заметим, что для бильярда в эллипсе вычисленный в точке (\mathbf{x}, \mathbf{v}) фазового цилиндра M интеграл Иоахимсталия связан с параметром софокусной квадрики λ , которой касается прямая с направляющим вектором \mathbf{v} , проходящая через точку \mathbf{x} .

Утверждение. Пусть (\mathbf{x}, \mathbf{v}) кодируют некоторое звено бильярдной траектории. Пусть λ – параметр квадрики Q_λ , касающейся прямой $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$. Тогда

$$\lambda = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = a^2 b^2 \frac{J^2(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad (2)$$

Доказательство. Выражение (1) для λ перепишем, домножив обе части на знаменатель:

$$(v_x^2 + v_y^2)\lambda = a^2 v_y^2 + b^2 v_x^2 - (xv_y - yv_x)^2 = (a^2 - x^2)v_y^2 + (b^2 - y^2)v_x^2 + 2xyv_x v_y. \quad (3)$$

Точка (x, y) находится на эллипсе Q_0 , поэтому

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2} \text{ и } b^2 - y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\|\mathbf{v}\|^2 \lambda = \frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} + 2xyv_x v_y = \|\mathbf{v}\|^2 a^2 b^2 \left(\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2} \right)^2 = a^2 b^2 J^2(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

□

4. Модифицированный закон преломления. Предположим, что две среды с показателями «плотности» n_1 и n_2 разделены кривой Q_0 . Пусть падающая траектория из среды с показателем n_1 пересекает Q_0 в некоторой точке. Будем считать, что при $n_1 \cos \theta_1 < n_2$ преломленная траектория из этой точки уходит в область с показателем преломления n_2 и в другую полуплоскость по отношению к вектору нормали \mathbf{n} , причем выполняется закон преломления

$$n_1 \cos \theta_1 = n_2 \cos \theta_2, \tag{5}$$

где θ_1, θ_2 — углы, образованные падающим и преломленным отрезками траектории, соответственно, по отношению к вектору нормали \mathbf{n} к кривой Q_0 в точке преломления.

Если $n_1 > n_2$ и $\cos \theta_1 > \frac{n_2}{n_1}$, тогда угол θ_2 не определен и мы считаем, что траектория испытывает полное внутреннее отражение по классическому закону «угол падения равен углу отражения».

Если же $\frac{n_1}{n_2} < 1$ и $\cos \theta_1 = 1$, тогда $\theta_2 = \arccos \frac{n_1}{n_2}$, и существуют два способа определить вектор скорости после преломления:

$$\mathbf{w} = \begin{cases} R(\theta_2)\mathbf{v}, & \text{«левая траектория»} \\ R(-\theta_2)\mathbf{v}, & \text{«правая траектория»} \end{cases}, \tag{6}$$

где $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ — матрица поворота. Мы будем считать, что в такой ситуации «левая» или «правая» траектории выбираются случайно. Ниже будет показано, что в случае, который рассматривается в настоящей статье, значение дополнительного интеграла в обоих случаях будет одно и то же, т.е. этот случайный выбор на интегрируемости не сказывается.

Для простоты будем считать, что модуль вектора скорости при преломлении или полном отражении не меняется; тогда кинетическая энергия $E = \frac{m\|\mathbf{v}\|^2}{2}$ постоянна на траекториях.

Утверждение. Пусть \mathbf{n} — вектор нормали в точке преломления (x_0, y_0) , а также пусть \mathbf{v} — вектор скорости до преломления. Считаем, что траектория бильярда в точке (x_0, y_0) переходит из среды с показателем преломления n_1 в область с показателем n_2 . Тогда если вектор \mathbf{v} не параллелен вектору \mathbf{n} , то для вектора \mathbf{w} после преломления справедливо выражение $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{n}$, где $\beta = \frac{\|\mathbf{w}\|\mu - \|\mathbf{v}\|\alpha}{\|\mathbf{n}\|} \cos \theta_1$,

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\|} \sqrt{\frac{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1}{1 - \cos^2 \theta_1}}, \theta_1 - \text{угол, образованный векторами } \mathbf{v} \text{ и } \mathbf{n}, \mu = \frac{n_1}{n_2}.$$

Доказательство. Из закона преломления (5) следует $\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{n}\| \cos \theta_2 = \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{n}\| \mu \cos \theta_1$.

В то же время, из линейности скалярного произведения $\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle + \beta \|\mathbf{n}\|^2 = \alpha \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\| \cos \theta_1 + \beta \|\mathbf{n}\|^2$, следовательно, $\beta = \frac{\|\mathbf{w}\|\mu - \|\mathbf{v}\|\alpha}{\|\mathbf{n}\|} \cos \theta_1$.

Подставляя полученное значение β в равенство $\|\mathbf{w}\|^2 = \|\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{n}\|^2 = \alpha^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta_1) + \mu^2 \|\mathbf{w}\|^2 \cos^2 \theta_1$, получим нужную формулу для α . □

Замечание. Эти формулы очевидным образом упрощаются для $\|\mathbf{n}\| = 1$ и $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$. В дальнейшем мы будем использовать эти формулы при $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$, но $\|\mathbf{n}\| \neq 1$.

Замечание. Если траектория подходит к границе раздела сред Q_{λ_0} под прямым углом (т.е. вектор скорости \mathbf{v} пропорционален вектору нормали \mathbf{n} квадрики Q_{λ_0} в точке преломления (x_0, y_0)) и коэффициенты преломления не дают полное отражение (то есть $n_1 \cos \theta_1 = n_1 \leq n_2$), то вектор скорости после преломления может быть определен предельным переходом:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} - \mu \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} &= \sqrt{\frac{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1}{1 - \cos^2 \theta_1}} \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} - \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \right) = \frac{\sqrt{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1}}{\sin^2 \theta_1} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 - 1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 - 1 \end{pmatrix} \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \\ &= \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2 \theta_1} \begin{pmatrix} -\tan \frac{\theta_1}{2} & -1 \\ 1 & -\tan \frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \xrightarrow{\theta_1 \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - \mu^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}, \end{aligned}$$

что эквивалентно формуле (6).

5. Постоянная движения для бильярда с преломлением. Сначала мы рассмотрим модельный пример: эллипс, разделенный дугой софокусной квадрики с параметром λ_0 на две области Ω_1 и Ω_2 (возможны два варианта: этой дугой является софокусный эллипс или одна дуга софокусной гиперболы). Коэффициент преломления в области Ω_i обозначим $n_i, i = 1, 2$.

Определим функцию $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ по формуле:

$$\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_1^2, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_2^2 + \lambda_0(n_1^2 - n_2^2), & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Как будет видно из дальнейшего, $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ непрерывна в том числе и на общей границе Ω_1 и Ω_2 .

Теорема. Функция $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ является постоянной на траекториях для бильярда с законом преломления, описанным в пункте 4.

Доказательство.

Очевидно, что функция $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ является константой на каждом отрезке бильярдной траектории с преломлением, полностью лежащем в Ω_1 или Ω_2 . Легко сообразить, что в момент отражения функция $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ также не меняет своего значения. Остается рассмотреть момент преломления. С геометрической точки зрения удобно воспользоваться функцией

$$J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = - \left(\frac{xv_x}{a^2 - \lambda_0} + \frac{yv_y}{b^2 - \lambda_0} \right) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \nabla f_{\lambda_0}(x, y) \rangle,$$

определенной на дуге $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ квадрики Q_{λ_0} , заданной уравнением $f_{\lambda_0}(x, y) = 1$.

На дуге $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ имеет место равенство

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Нам понадобится два вспомогательных факта.

Утверждение. Рассмотрим точку $\mathbf{x} = (x, y) \in Q_{\lambda_0}$ и пару векторов скоростей \mathbf{v}, \mathbf{w} до и после преломления в точке \mathbf{x} , соответственно. Имеет место равенство

$$\frac{n_2 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{n_1 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (7)$$

Замечание. Мы записали основное равенство в этом утверждении именно в такой форме, чтобы была очевидна связь с формулой (2) для $\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

Доказательство. Из определения функции J_{λ_0} следует равенство $J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\| \cos \theta_1$, а с учетом формул для коэффициентов α и β из утверждения пункта 4 получаем

$$\begin{aligned} J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) &= \alpha J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \beta J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \alpha J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \frac{\beta}{2} \|\mathbf{n}\|^2 = \\ &= \alpha J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{n}\|^2 \frac{\|\mathbf{w}\| \mu - \|\mathbf{v}\| \alpha J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\|} = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\|} \mu J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

что эквивалентно $\frac{n_2 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{n_1 J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Утверждение.

(i) При $\theta_1 = 0$ и $n_1 \leq n_2$ равенство (7) тоже выполняется

(ii) Более того, величины $J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ для «левой» и «правой» траекторий совпадают.

Доказательство.

(i) Поскольку $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$, $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|$, то очевидно равенство

$$J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\| \cos \arccos \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_1}{n_2} J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

(ii) В силу четности косинуса из определения $J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ следует, что

$$\begin{aligned} J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, R(\theta_2)\mathbf{v}) &= -\frac{1}{2} \langle \mathbf{n}, R(\theta_2)\mathbf{v} \rangle = -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta_2 = \\ &= -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\| \cos -\theta_2 = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{n}, R(-\theta_2)\mathbf{v} \rangle = J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, R(-\theta_2)\mathbf{v}). \end{aligned}$$

□

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим траекторию бильярда в момент преломления. Для определенности предположим, что до преломления частица движется в среде с коэффициентом преломления n_1 с вектором скорости \mathbf{v} , который меняется на вектор \mathbf{w} после перехода в среду с коэффициентом преломления n_2 . При движении в обратном порядке эти два звена меняются местами, а нижеследующие утверждения по-прежнему справедливы.

Сначала рассмотрим каустику для области, коэффициент преломления которой равен n_1 : пусть $(x, y) \in Q_{\lambda_0}$ и прямая $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ касается квадрики с параметром α_1 .

Перепишем (1) эквивалентным способом:

$$\alpha_1 = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{(a^2 - x^2)v_y^2 + (b^2 - y^2)v_x^2 + 2xyv_xv_y}{v_x^2 + v_y^2}. \tag{8}$$

Из условия $(x, y) \in Q_{\lambda_0}$, т.е. из равенства $\frac{x^2}{a^2 - \lambda_0} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_0} = 1$, используя соотношения (4), получаем:

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 - \lambda_0}{b^2 - \lambda_0} y^2 + \lambda_0 \quad \text{и} \quad b^2 - y^2 = \frac{b^2 - \lambda_0}{a^2 - \lambda_0} x^2 + \lambda_0.$$

Подставим эти выражения в формулу (8) для α_1 :

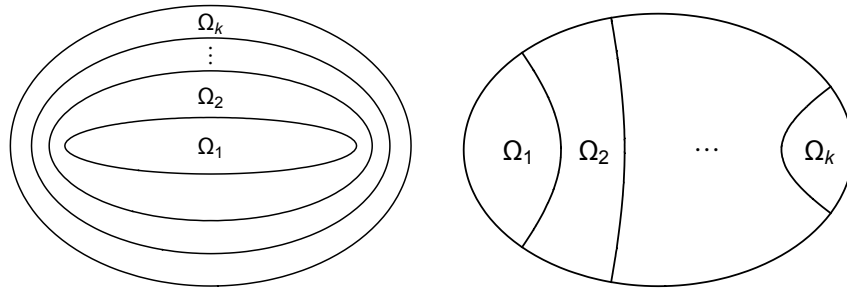
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\frac{a^2 - \lambda_0}{b^2 - \lambda_0} y^2 v_y^2 + \lambda_0 v_y^2 + \frac{b^2 - \lambda_0}{a^2 - \lambda_0} x^2 v_x^2 + \lambda_0 v_x^2 + 2xyv_xv_y}{v_x^2 + v_y^2} = \\ &= \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{\left(\frac{xyv_x}{a^2 - \lambda_0} + \frac{yv_y}{b^2 - \lambda_0}\right)^2}{v_x^2 + v_y^2} = \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}. \end{aligned}$$

Повторяя те же рассуждения для преломленного луча \mathbf{w} , для параметра каустики $\alpha_2 = \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ имеем

$$\alpha_2 = \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{w})^2}{\|\mathbf{w}\|^2} = \lambda_0 + (a^2 - \lambda_0)(b^2 - \lambda_0) \frac{J_{\lambda_0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2. \tag{9}$$

В результате из равенств (8) и (9) следует, что $\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \lambda_0 = (\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - \lambda_0) \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$. Доказательство теоремы закончено. □

6. Случай нескольких областей, разделенных непересекающимися дугами софокусных квадрик. Пусть внутренность эллипса разбита попарно непересекающимися дугами софокусных квадрик на области $\Omega_1, \dots, \Omega_k$. Перенумеруем области так, чтобы общие границы имели только области с соседними номерами. Пусть λ_j — это параметр софокусной квадрики, разделяющий Ω_j и Ω_{j+1} , $j = 1, \dots, k - 1$. Два возможных варианта показаны на рис. 1.

Рис. 1: Взаимное расположение областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$.

Здесь и далее коэффициент плотности в области Ω_j обозначим через n_j .

Определим функцию $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ по формуле:

$$\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_1^2, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq k. \end{cases}$$

Теорема. Функция $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ является константой на траекториях бильярда с модифицированным законом преломления (5)

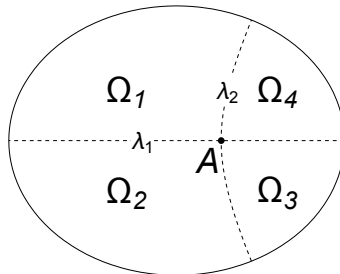
Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы из пункта 5.

7. Преломление на пересекающихся софокусных квадриках.

Случай 1: 1 точка пересечения.

Предположим, что внутренность эллипса разделена на области дугами софокусных квадрик таким образом, что имеются всего 1 точка их пересечения, которую обозначим A .

Занумеруем области против часовой стрелки $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$. Пусть общая часть границы $\Omega_1 \cup \Omega_4$ и $\Omega_2 \cup \Omega_3$ — дуга софокусной квадрики с параметром λ_1 , а общая часть границы $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\Omega_3 \cup \Omega_4$ — дуга софокусной квадрики с параметром λ_2 (см. рис.2).

Рис. 2: Взаимное расположение областей $\Omega_1, \dots, \Omega_4$

Введем индекс ветвления в точке A по формуле

$$\gamma_A = \lambda_1(n_1^2 - n_2^2) + \lambda_2(n_2^2 - n_3^2) + \lambda_1(n_3^2 - n_4^2) + \lambda_2(n_4^2 - n_1^2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2).$$

Определим в этой ситуации вспомогательную функцию $\tilde{\Xi}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$

$$\tilde{\Xi}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_1^2, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq 4. \end{cases}$$

Неформально говоря, она почти подходит на роль дополнительного интеграла, но имеет разрыв на дуге, разделяющей области Ω_1 и Ω_4 . Однако, как легко видеть, на любой бильярдной траектории, пересекающей эту дугу, она испытывает один и тот же скачок, равный индексу ветвления γ_A . Поэтому мы определим дополнительный интеграл $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ со значениями в $S^1 = \mathbb{R}/\gamma_A\mathbb{Z}$ по формуле

$$\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \tilde{\Xi}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \pmod{\gamma_A}.$$

Случай, когда границы раздела областей пересекаются по 2 и более точками сложнее. Мы приведем 2 примера, которые проиллюстрируют общую закономерность, заключающуюся в следующем: для каждой точки пересечения $A_i, i = 1, \dots, t$, определен индекс ветвления γ_{A_i} . Тогда дополнительный интеграл $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ принимает значения в $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z})$. Если γ_{A_i} соизмеримы, т. е. всевозможные дроби $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}}$ — рациональные числа (или бесконечность), то $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}) = S^1$. Если же среди γ_{A_i} есть пара с иррациональной дробью $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}}$, то подгруппа $\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}$ всюду плотна в \mathbb{R} . В этом случае, хотя дополнительный интеграл $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ корректно определен, но использовать его для топологического анализа структуры траекторий представляется весьма затруднительным.

Случай 2: две точки пересечения.
Рассмотрим области, изображенные на рис.3.

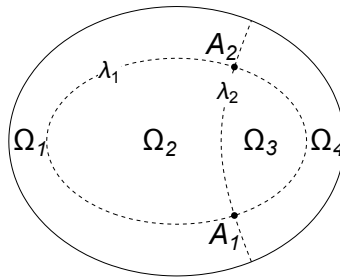


Рис. 3: Взаимное расположение областей $\Omega_1, \dots, \Omega_4$

Легко вычислить индексы ветвления в точках A_1, A_2 (т.е. скачки дополнительного интеграла при обходе вокруг точки против часовой стрелки):

$$\gamma_{A_1} = \lambda_2(n_1^2 - n_4^2) + \lambda_1(n_4^2 - n_3^2) + \lambda_2(n_3^2 - n_2^2) + \lambda_1(n_2^2 - n_4^2) = (\lambda_2 - \lambda_1)(n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2).$$

$$\gamma_{A_2} = \lambda_1(n_1^2 - n_2^2) + \lambda_2(n_2^2 - n_3^2) + \lambda_1(n_3^2 - n_4^2) + \lambda_2(n_4^2 - n_1^2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2).$$

Как видно, в этом случае

$$\gamma_{A_1} = -\gamma_{A_2}.$$

Поэтому дополнительный интеграл $\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ может быть задан по модулю γ_{A_1} формулой

$$\Xi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{cases} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_1^2, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v})n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq 4. \end{cases}$$

Случай 3: две точки пересечения. Рассмотрим области, изображенные на рис.4.

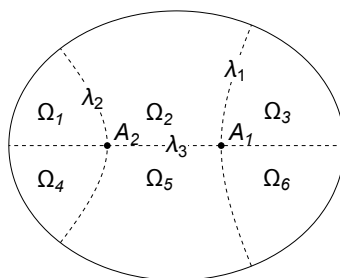


Рис. 4: Взаимное расположение областей $\Omega_1, \dots, \Omega_6$

Легко видеть, что индексы ветвления в точках A_1, A_2 задаются формулами:

$$\gamma_{A_1} = (\lambda_3 - \lambda_1)(n_2^2 - n_5^2 + n_6^2 - n_3^2).$$

$$\gamma_{A_2} = (\lambda_3 - \lambda_2)(n_1^2 - n_4^2 + n_5^2 - n_2^2).$$

Ясно, что в зависимости от значений параметров отношение $\frac{\gamma_{A_1}}{\gamma_{A_2}}$ может быть как рациональным, так и иррациональным.

Автор приносит благодарность академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание и интерес к работе, а также Ф. Ю. Попеленскому за постановку задачи, ценные комментарии и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина* Биллиарды и интегрируемые системы // Успехи математических наук, 2023, Т. 78, 5(473), с. 93–176
 2. *Huygens, C.* Traite de la lumiere. // Chez Pierre Vander Aa marchand libraire, 1690
 3. *Holland L. R.* Crucible surface, thermal refraction, boundaries, and interface shape in melt growth // Journal of crystal growth. – 1989. – Т. 96. – №. 3. – С. 577-583.
 4. *Tan A., Holland L. R.* Tangent law of refraction for heat conduction through an interface and underlying variational principle // American Journal of Physics. – 1990. – Т. 58. – №. 10. – С. 988-991.
 5. *Smith T.* The optical cosine law // Transactions of the Optical Society. – 1922. – Т. 24. – №. 1. – С. 31.
 6. *Steward G. C.* On Herschel's Condition and the Optical Cosine Law // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1927. – Т. 23. – №. 6. – С. 703-712.
 7. *Табачников С. Л.* Геометрия и бильярды. – 2011.
-