

# Коротковолновые асимптотики внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в полнотории и их связь с классическими бильярдами

Курицина Е. А.<sup>\*</sup> Миненков Д. С.<sup>†</sup>

## Аннотация

В статье построены асимптотические собственные функции и асимптотика спектра для внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном полнотории.

## 1 Введение и постановка задачи

Рассматривается внутренняя задача Дирихле в полнотории  $T$  ( $\partial T$  – двумерный тор в трехмерном пространстве, его радиусы  $0 < r < R$ , см. рис. 1) для оператора Лапласа:

$$-\Delta u = \lambda^2 u, \quad (x, y, z) \in T, \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial T} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ ,  $(x, y, z)$  – трехмерные декартовы координаты.

Ищем коротковолновые асимптотические решения – асимптотические собственные функции оператора Лапласа и соответствующие асимптотические собственные числа  $E = \lambda^2$ , предполагая, что  $\lambda \rightarrow \infty$ . Асимптотические собственные числа точно приближают истинные, про асимптотические собственные функции не известно. Асимптотические собственные функции – формальные асимптотики, т.е. при подстановке в уравнение они дают малую невязку с учётом  $\lambda \rightarrow \infty$  и удовлетворяют граничным условиям точно.

Введем малый параметр  $0 < \xi := \lambda^{-1} \ll 1$  и перепишем (1.1) в виде сингулярно-возмущенного уравнения:

$$-\xi^2 \Delta u = u. \quad (1.3)$$

Для оператора Лапласа часто ищут собственные функции типа шепчущих галерей, локализованные вблизи границы области, исследовались во многих работах. Асимптотические формулы для собственных функций для оператора Лапласа, локализованных вблизи границы для двумерных областей, ограниченных гладкой выпуклой кривой, исследовались в [2, 1, 3], где такая асимптотика была выражена с помощью функций Эйри и их производных. В работах [7, 8, 9, 12, 13] рассматривались задачи анализа волн типа шепчущих галерей в двумерных областях с невыпуклой границей. В работе [14] были исследованы локализованные собственные функции оператора Лапласа с помощью метода параболического волнового уравнения (уравнения Шредингера). В [5] рассматривались геометрические вопросы локализации высокочастотных собственных функций для оператора Лапласа с помощью разделения переменных

---

<sup>\*</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова; e-mail: sensela@ya.ru

<sup>†</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова; ИПМех РАН; e-mail: minenkov.ds@gmail.com

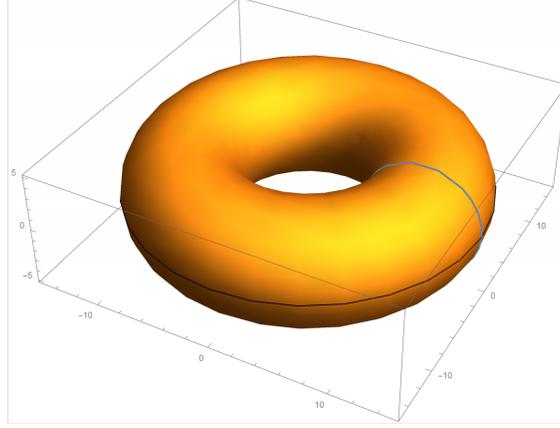


Рис. 1: Граница рассматриваемой области – тор,  $r = 5, R = 10$ .

для областей типа круга, эллипса и сферы. В случае специальной области, представляющей Т-образный волновод, локализованные собственные функции оператора Лапласа изучались в [4]. Задачи о построении локализованных вблизи границы акустических волн типа шепчущих галерей изучались в работах [15, 6]. В этих работах такие волны изучались с физической точки зрения и были проведены серии численного моделирования распространения локализованных акустических волн вблизи границы области. Задачи исследования собственных функций типа шепчущих галерей в трехмерном случае гораздо сложнее по сравнению с двумерной ситуацией. В недавних работах [10, 11] были построены асимптотические формулы для локализованных собственных функций оператора Лапласа в окрестностях геодезических строго выпуклых областей. Полученные таким образом асимптотики имеют аналогичную структуру, что и в работах [1, 3], и представляются с помощью функций Эйри. На основании таких асимптотик было построено волновое поле путем их суммирования по всем геодезическим, что близко к суммированию гауссовых пучков.

В данной работе мы рассматриваем задачу на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в полнотории и ищем асимптотики, характерные для волновода соответствующей формы.

## 2 Формулировка результата

С помощью операторного разделения переменных и метода ВКБ были найдены асимптотические собственные функции  $u = u_{nkl}(x, y, z, \xi) + O(\xi)$  и числа  $E = E_{nkl}(1 + O(\xi^2))$ , задаваемые следующим образом.

$$u(x, y, z) = e^{in\theta} \mathcal{U}(\rho, z, \xi), \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad (2.1)$$

где  $\rho = R + \tilde{x}$ ,  $\theta$  – полярные координаты на плоскости  $x, y$ ,  $R$  – расстояние от оси вращения тора до центра образующей его окружности,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  – квантовое число, отвечающее осцилляциям вдоль полярного угла. Асимптотики радиальных функций  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{nkl}(\tilde{x}, z, \xi)$  равны

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{nkl}(\tilde{x}, z, \xi) &= \hat{\chi} Z(z, \xi) = \chi_{nk}^0(\tilde{x}, z) Z_{nkl}(z, \xi) + O(\xi), \\ \chi_{nk}^0(\tilde{x}, z) &= \sqrt{R + \tilde{x}} \left( C_1(z) J_{\sqrt{\frac{1}{2} + n^2}}(\sqrt{V_{nk}(z)}(R + \tilde{x})) + C_2(z) Y_{\sqrt{\frac{1}{2} + n^2}}(\sqrt{V_{nk}(z)}(R + \tilde{x})) \right), \\ C_1(z) &= -Y_{\sqrt{\frac{1}{2} + n^2}}(x_-), \quad C_2(z) = J_{\sqrt{\frac{1}{2} + n^2}}(x_-), \quad x_{\pm}(z) = \sqrt{V_{nk}(z)}(R \pm \sqrt{r^2 - z^2}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

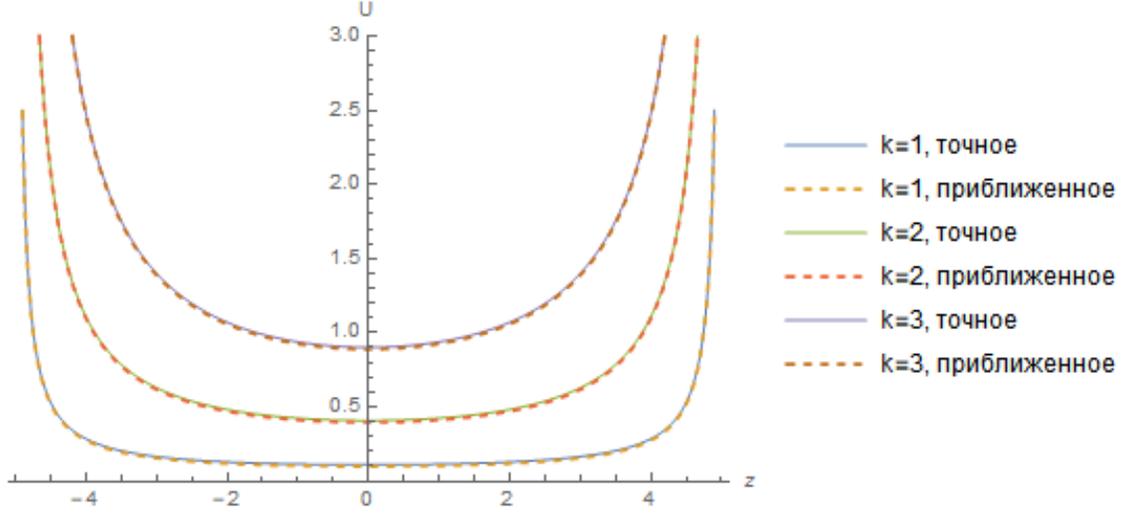


Рис. 2: График для потенциалов  $U(z)$  при различных  $k$ .

Здесь  $J_\nu, Y_\nu$  – функции Бесселя и Неймана порядка  $\nu$  соответственно;  $k \in \mathbb{N}$  – второе квантовое число, равное количеству нулей  $\chi^0(\tilde{x}, z)$  внутри интервала  $\tilde{x} \in (-\sqrt{r^2 - z^2}, \sqrt{r^2 - z^2})$ ; функции  $V_{nk}(z)$  определяются из трансцендентного уравнения:

$$-Y_{\sqrt{\frac{1}{2}+n^2}}(x_-)J_{\sqrt{\frac{1}{2}+n^2}}(x_+) + J_{\sqrt{\frac{1}{2}+n^2}}(x_-)Y_{\sqrt{\frac{1}{2}+n^2}}(x_+) = 0,$$

и задают эффективный потенциал для уравнения на функцию  $Z(z)$  вдоль вертикальной оси:

$$\hat{L}Z(z, \xi) = (-\hat{p}^2 + U(z) - 1 + i\xi\hat{L}^1)Z(z, \xi) = O(\xi^2), \quad L^1 = \langle H_{p_z}\chi_z^0, \chi^0 \rangle \|\chi_0\|^{-2},$$

где норма и скалярное произведение берутся как от функций по  $\tilde{x}$  в  $L_2[-\sqrt{r^2 - z^2}, \sqrt{r^2 + z^2}]$ , в то время как “замороженная” переменная  $z$  является параметром. Воспользовавшись асимптотикой функций Бесселя и Неймана (которые имеют хорошую точность уже в окрестности первого положительного нуля), можно получить приближённые формулы для потенциала:

$$V_{nk}(z) \approx \frac{(\pi k)^2}{4(r^2 - z^2)}$$

Графики потенциалов  $V_{nk}$  для разных  $k$  изображены на рис. 2, каждый потенциал формирует потенциальную яму, причем при  $U \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \pm r$ , а значит  $Z(z, \xi) \rightarrow 0$ . Для заданного уровня энергии существует лишь конечное число уровней  $n$ , а для каждого уровня  $n$  – конечный набор чисел  $k$ , отвечающих осциллирующим решениям.

Асимптотика вне окрестности фокальных точек  $z \in [-z_{turn} + \sigma, z_{turn} - \sigma], \sigma > 0$ , определяемых из условия  $1 = V(z_{turn})$ , имеет вид:

$$Z(z, \xi) = \left( e^{\frac{i}{\xi} \int_{z_0}^z \sqrt{1-V(z')} dz'} + e^{-\frac{i}{\xi} \int_{z_0}^z \sqrt{1-V(z')} dz'} \right) e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\int_{z_0}^z \frac{L_1(z')}{2\sqrt{1-V(z')} dz'}}}{\sqrt[4]{1-V(z)}}, \quad (2.3)$$

Вблизи фокальных точек это представление не может быть использовано, так как якобиан обращается в нуль и функция  $Z$  неограниченно возрастает. Было построено равномерное пред-

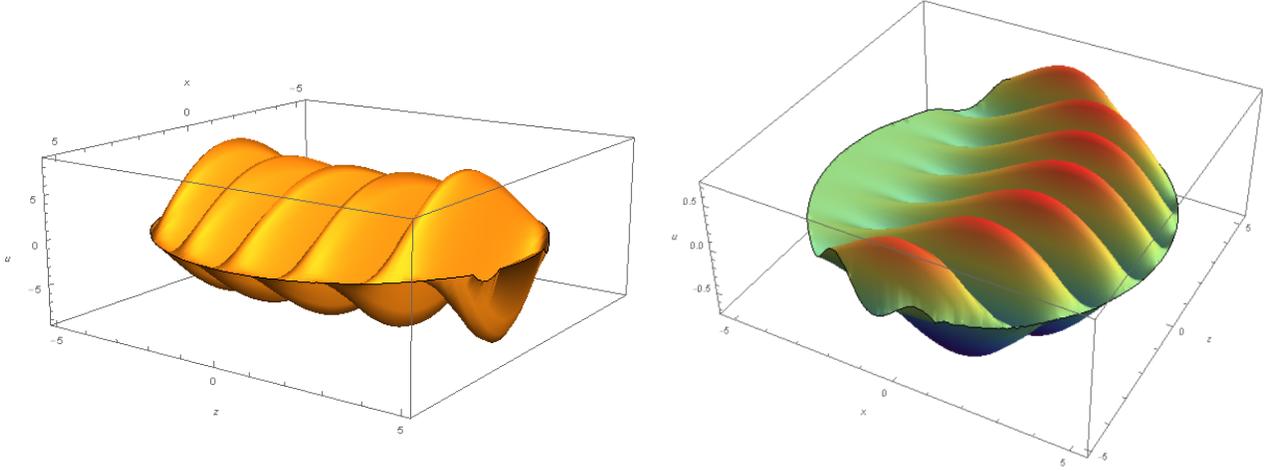


Рис. 3: Асимптотики радиальных компонент  $U_{nkl}(x, z)$  для  $n = 3, k = 1, l = 10$  (слева) и  $n = 10, k = 1, l = 12$  (справа).

ставление асимптотики через функцию Эйри ( $Ai$ ) – для этого достаточно согласования аналитических функций в обоих представлениях в регулярной карте.

$$Z(z, \xi) = \frac{2^{\frac{1}{3}} \sqrt{2\pi} e^{i \int_{z_0}^z \frac{L_1(z')}{2\sqrt{1-V(z')}} dz'} \left| \int_{z_0}^z \sqrt{1-V(z')} dz' \right|^{\frac{1}{6}}}{2\sqrt[4]{1-V}} \frac{1}{\xi^{\frac{1}{6}}} Ai \left( - \left( \frac{3}{2\xi} \int_{z_0}^z \sqrt{1-V(z')} dz' \right)^{\frac{3}{2}} \right), \quad (2.4)$$

$$-r \leq z \leq r + \sigma, \quad \sigma > 0$$

$$Z(z, \xi) = \frac{2^{\frac{1}{3}} \sqrt{2\pi} e^{-i \int_{-z_0}^z \frac{L_1(z')}{2\sqrt{1-V(z')}} dz'} \left| \int_{-z_0}^z \sqrt{1-V(z')} dz' \right|^{\frac{1}{6}}}{2\sqrt[4]{1-V}} \frac{1}{\xi^{\frac{1}{6}}} Ai \left( - \left( \frac{3}{2\xi} \int_{-z_0}^z \sqrt{1-V(z')} dz' \right)^{\frac{3}{2}} \right), \quad (2.5)$$

$$-r - \sigma \leq z \leq r, \quad \sigma > 0$$

Асимптотика спектра  $E = E_{nkl} = 1/\xi_{nkl}^2 (1 + O(\xi_{nkl}^2))$  задачи определяется из условия квантования Бора-Зоммерфельда (соответствует требованию, чтобы представления в 2 картах функции  $Ai$  были согласованы в регулярной карте):

$$\frac{2S_{nk}}{\xi_{nkl}} = 2\pi l + \pi, \quad S_{nk} = \int_{-z_{turn}}^{z_{turn}} \sqrt{1-V(z')} dz,$$

где  $l \in \mathbb{N}$ ,  $V_{nk}(z) = \frac{(\pi k)^2}{4(r^2 - z^2)}$ , точки поворота  $\pm z_{turn}$  определяются из уравнения  $V_{nk}(z_{turn}) = 1$ .

Примеры асимптотики радиальной части  $\mathcal{U}_{nkl}(x, z, \xi)$  изображены на рис. 3.

## 3 Вывод асимптотических формул

### 3.1 Сведение задачи к двумерной

В уравнении 1 сделаем полярную замену координат:  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $z = z$ , где  $\rho = R + \tilde{x}$ ,  $R$ -расстояние от оси вращения тора до центра образующей его окружности,  $\tilde{x}$ -координата внутри образующей окружности, перпендикулярная оси вращения,  $\theta$  – полярный

угол (угол вращения малой окружности тора вокруг оси  $z$ ). Тогда:

$$-\Delta v = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial^2 z} - \frac{\partial^2 v}{\partial^2 \rho} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

$$v|_{z^2+R^2=4R^2\rho^2} = 0$$

$$v(\theta, \rho, z) = v(\theta + 2\pi, \rho, z)$$

Отделим осцилляции по углу  $\theta$ , сделав замену:  $v = w(z, \rho)e^{in\theta}$ , тогда уравнение примет вид:

$$\lambda^2 w = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{n^2 w}{\rho^2}\right)$$

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  и  $n\lambda \gg 1$ . Сделаем замену:  $v = \frac{u}{\sqrt{\rho}}$

$$\lambda^2 u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \rho} - \frac{(4n^2 + 1)u}{4\rho^2}\right)$$

Будем считать, что собственные значения оператора Лапласа достаточно большие:  $\lambda^2 = E$ ,  $\frac{1}{E} = \xi^2$  и домножим уравнение на  $\xi^2$ :

$$-\xi^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \tilde{x}}\right) + \frac{ua^2}{(R + \tilde{x})^2} = u$$

где  $a^2 = \frac{(4n^2+1)\xi^2}{4}$ ,  $\rho = \tilde{x} + R$ .

С учетом симметрии относительно оси вращения тора  $z$  задача свелась к двумерной задаче Дирихле в круге для стационарного уравнения Шредингера:  $\hat{\mathcal{H}} u = u$ , где  $\mathcal{H}(\tilde{x}, \hat{p}_{\tilde{x}}, \hat{p}_z) = (\hat{p}_{\tilde{x}})^2 + (\hat{p}_z)^2 + \frac{a^2}{(R+\tilde{x})^2}$  - символ гамильтониана  $\mathcal{H}$ .

$$-\xi^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \tilde{x}}\right) + \frac{ua^2}{(R + \tilde{x})^2} = u \quad (1.31)$$

$$u|_{\tilde{x}^2+z^2=r^2} = 0 \quad (1.32)$$

$a^2 = \frac{(4n^2+1)\xi^2}{4}$ ,  $n -$ ,  $z$ ,  $\xi = \frac{1}{\lambda}$  - малый параметр,  $R$  - расстояние от оси вращения тора до центра образующей его окружности,  $\tilde{x}$  - координата внутри образующей окружности, перпендикулярная оси вращения,  $r$  - радиус образующей окружности.

### 3.2 Операторное разделение переменных

Заметим, что уравнение (1.31) можно переписать в виде:

$\hat{\mathcal{H}} u = u$ , где  $\mathcal{H}(\tilde{x}, \hat{p}_{\tilde{x}}, \hat{p}_z) = (\hat{p}_{\tilde{x}})^2 + (\hat{p}_z)^2 + \frac{a^2}{(R+\tilde{x})^2}$  - символ гамильтониана  $\mathcal{H}$ .

В соответствии с операторным методом разделения переменных ищем решение в виде:

$$u(x, z) = \hat{\chi}(\hat{p}_z, z, x) Z(z, \xi)$$

$x = \frac{\tilde{x}}{\xi}$ . Зависимость от  $z$  возникает из-за граничного условия 1.32, в соответствии с адиабатическим приближением  $\chi$  меняется от  $z$  медленно, зависимость от  $\tilde{x}$  быстрая, что способствует отделению осцилляций по направляющей оси тора.

Пусть существует такой оператор  $\hat{L}$ , что:  $\hat{L}(\hat{p}_z, z) Z = Z$ .

Тогда наше уравнение принимает вид:  $\hat{\mathcal{H}}\hat{\chi}=\hat{\chi}\hat{L}$ . Соответствующие уравнения для символов  $\chi = \chi_0 + \xi\chi_1 + O(\xi^2)$ ,  $L = L_0 + \xi L_1 + O(\xi^2)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}(\tilde{x}, p_{\tilde{x}}, p_z) - L_0(p_z, z))\chi_0(p_z, z, x) &= 0 \\ (\mathcal{H}(\tilde{x}, p_{\tilde{x}}, p_z) - L_0(p_z, z))\chi_1(p_z, z, x) - i\mathcal{H}_{p_z}\chi_0 &= \chi_0 L_1 - i\chi_0 p_z L_{0x} \\ &\dots \end{aligned}$$

Символы  $\chi_n$  удовлетворяют условию Дирихле на границе круга – поперечного сечения тора.

### 3.3 Решение одномерного уравнения Бесселя

В первом приближение уравнение (1.31) имеет вид:

$$-\chi_0'' + (p_z^2 + \frac{a^2}{(R + \xi x)^2} - L_0)\chi_0 = 0$$

Здесь  $z$  и  $p_z$  рассматриваются как параметры.

Соответствующие граничные условия:  $\chi_0(\hat{p}_z, z, x)|_{x^2=\frac{r^2-z^2}{\xi^2}} = 0$ .

Это модифицированное уравнение Бесселя, сделав соответствующий ряд замен:  $U^2 = L_0 - p_z^2$ ,  $x^* = R + \xi x$ ,  $\chi_0 = \sqrt{x^*}\tilde{\chi}_0$ ,  $\bar{x} = x^*\sqrt{\frac{U^2}{\xi^2}}$ . Мы получаем уравнение Бесселя:

$$\bar{x}^2\tilde{\chi}_0'' + \bar{x}\tilde{\chi}_0' + (\bar{x}^2 - (1/2 + n^2))\tilde{\chi}_0 = 0$$

Его решение:

$$\chi_0 = \sqrt{R + \xi x} (C_1 J_{\frac{1}{2}+n^2}(\frac{\sqrt{L_0 - p_z^2}(R + \xi x)}{\xi}) + C_2 Y_{\frac{1}{2}+n^2}(\frac{\sqrt{L_0 - p_z^2}(R + \xi x)}{\xi})) \quad (1.33)$$

$J_\nu, Y_\nu$  - функции Бесселя и Неймана порядка  $\nu$  соответственно. Символы  $\chi_0, L_0$  определяются из задачи Штурма–Лиувилля в круге, как собственные функции и числа оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  соответственно. Выражения для символа  $L_0$  является точным. А выражение для  $U(z)$  находится с помощью асимптотики для нулей функций Бесселя и Неймана при подстановке 1.33 в 1.32, поэтому является приближённым. Таким образом,  $\hat{\chi}_0$  не зависит от  $\hat{p}_z$  и является просто функцией.

Обозначим  $x_+ = \frac{\sqrt{L_0 - p_z^2}(R + \sqrt{r^2 - z^2})}{\xi}$  и  $x_- = \frac{\sqrt{L_0 - p_z^2}(R - \sqrt{r^2 - z^2})}{\xi}$ , тогда используя граничное условие (1.2) при  $x_+$  и асимптотику Бесселя и Неймана:

$$C_1 \cos(x_+ - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + C_2 \sin((x_+ - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4})) = 0,$$

где  $\alpha = n^2 + \frac{1}{2}$

Поделив выражение на  $C_2 \neq 0$  и  $\cos(x_+ - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \neq 0$  (мы можем так сделать, иначе решение 1.33 содержало бы только функцию Бесселя, что не подходит для рассматриваемой задачи), получим:

$$C_1 = -tg(x_+ - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

Граничное условие с  $x_-$  даёт уравнение :

$$tg(x_+ - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = tg(x_- - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

Откуда находим:

$$L_0 = p_z^2 + U^2(z), \quad U^2 \approx \frac{(\pi k \xi)^2}{4(r^2 - z^2)}, \quad k - \text{второе квантовое число, которое определяется из условия}$$

$$\text{квантования Бора-Зоммерфельда: } \frac{2S_a}{\xi k} = 2\pi k + \pi, \quad S_a = \frac{i}{\xi} \int_{z_0}^z \sqrt{E - \frac{U(z')}{\xi}} dz$$

Если область узкая, то для всех  $z$  можно пренебречь функцией Неймана, т.к. константа перед

$$\text{ней экспоненциально мала. } C_2 = -\frac{C_1 J_{\sqrt{\frac{1}{2}+n^2}}(x_-)}{Y_{\sqrt{\frac{1}{2}+n^2}}(x_-)} = O(\exp^{-\frac{1}{\xi} \int_{x_-}^{x_2} \dots dx}), \quad x_2 - \text{точка поворота, где}$$

$$E = \frac{U(x)}{\xi}.$$

$$\chi_0 = C \sqrt{R + \xi x} J_{\sqrt{\frac{1}{2}+n^2}} \left( \frac{\sqrt{L_0 - p_z^2}(R + \xi x)}{\xi} \right)$$

Главный символ  $L$  находится также из граничных условий, воспользовавшись асимптотикой Бесселя:

$$L_0 = \frac{(\pi \xi)^2}{4(R + \sqrt{r^2 - z^2})^2} \left( 2k + \frac{3}{2} + \sqrt{n^2 + 1/2} \right)^2 + p_z^2.$$

$\left( \frac{\sqrt{L_0 - p_z^2}(R + \sqrt{r^2 - z^2})}{\xi} \right) \approx \frac{\pi}{2} \left( 2k + \frac{3}{2} + \sqrt{n^2 + 1/2} \right)$ . Таким образом, получили семейство решений при фиксированном  $z$ .

## Благодарности

Работа выполнена в рамках гранта РНФ 22-71-10106 в МГУ им. М.В. Ломоносова. Авторы признательны С.Ю. Доброхотову за ценные дискуссии и поддержку.

## Список литературы

- [1] В.М. Бабич, В.С. Булдырев. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. // Наука, 1972
- [2] J.V. Keller, S.I. Rubinow, Asymptotic Solution of Eigenvalue Problems. // Annals of Physics, 1960, vol. 9, pp. 25-75
- [3] Н.Я. Кирпичникова. Равномерная асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи. // Зап. Научн. Сем. ЛОМИ, 1979, т. 89, 112-119.
- [4] С.А. Назаров, Локализованные волны в Т-образном волноводе. // Акустический журнал, 2010, т. 56, N. 6, с. 747-758
- [5] В.-Т. Nguyen, D. S. Grebenkov, Localization of Laplacian Eigenfunctions in Circular, Spherical, and Elliptical Domains. //SIAM J. Appl. Math., 2013, 73(2), 780–803.
- [6] P.S. Petrov, X. Antoine, Pseudodifferential adiabatic mode parabolic equations in curvilinear coordinates and their numerical solutions. // J. Of Computational Physics, vol. 410, 2020, 109392
- [7] М.М. Попов, Шепчущая галерея в окрестности точки перегиба границы. Асимптотика волнового поля при  $t$ , стремящемся к бесконечности. // Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, 1984, т. 140, с. 151-166
- [8] М. М. Попов, К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы. // Зап. Научн. Сем. ЛОМИ, 1976, том 62, страницы 197–206
- [9] М. М. Попов, И. Пшенчик, Волны шепчущей галереи в окрестности точки перегиба границы // ДАН СССР, 1976, том 230, номер 4, страницы 822–825

- [10] М.М. Попов, Новая концепция поверхностных волн интерференционного типа для гладких строго выпуклых поверхностей, вложенных в трехмерное пространство. // Зап. Науч. Сем. ПОМИ, 2020, т. 493, с. 301-313
- [11] М.М. Попов, О согласовании интегральной асимптотики поверхностных волн интерференционного типа с волновым полем их источника. // Зап. Науч. Сем. ПОМИ, 2020, т. 493, с. 314-322
- [12] В.П. Смышляев, о сосредоточенности решений вблизи предельного луча в окрестности точки перегиба границы. // Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, 1988, т. 173, с. 155-158
- [13] V. P. Smyshlyaev, I. V. Kamotski, Searchlight asymptotics for high-frequency scattering by boundary inflection. // Алгебра и анализ, 2021, том 33, выпуск 2, страницы 275–297
- [14] D.P.Hewett J.R.Ockendon V.P.Smyshlyaev, Contour integral solutions of the parabolic wave equation. // Wave Motion Volume 84, January 2019, p. 90-109.
- [15] B.G. Katsnelson, P.S. Petrov, Whispering gallery waves localized near circular isobaths in shallow water. // JASA, 2019, pp. 1965-1978
- [16] V.V. Grushin, S.Yu. Dobrokhotov, S.A. Sergeev, B. Tirozzi. Asymptotic Theory of Linear Water Waves in a Domain with Nonuniform Bottom with Rapidly Oscillating Sections. //Russian Journal of Mathematical Physics, 2016, Vol. 23, N. 4, pp. 455-474
- [17] С.А. Сергеев, Асимптотическое решение задачи Коши с локализованными начальными данными для волнового уравнения с малыми дисперсионными эффектами. // Дифференциальные уравнения, 2022, том 58, N. 10, с. 1380-1399
- [18] Й. Брюнинг, В.В. Грушин, С.Ю. Доброхотов, Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы. // Мат. Заметки, т. 92, вып. 2, 2012, с. 163-180
- [19] С.Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, С. Б. Шлосман, Асимптотика волновых функций стационарного уравнения Шредингера в камере Вейля, ТМФ, 2018
- [20] S. Yu. Dobrokhotov, D. S. Minenkov, A. I. Neishtadt, S. B. Shlosman, “Classical and Quantum Dynamics of a Particle in a Narrow Angle”, Regul. Chaotic Dyn., 24:6 (2019), 704–716
- [21] Г. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Т. 2, функция Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные полиномы. // Москва, Наука, 1974
- [22] V. E. Nazaiinskii, V. E. Shatalov, B. Yu. Sternin, Methods of Noncommutative Analysis. Theory and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 1996.
- [23] А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. В. Цветкова, Равномерная асимптотика в виде функции Эйри для квазиклассических связанных состояний в одномерных и радиально-симметричных задачах. // ТМФ, 201:3 (2019), 382–414; Theoret. and Math. Phys., 201:3 (2019), 1742–1770