Собственные функции для двумерного оператора Шредингера в области, склеенной из двух экземпляров камеры Вейля

А.А. Золотухина, Д.С. Миненков*

Аннотация

Рассматривается двумерное уравнение Шредингера в области (книжке) состоящей из двух одинаковых камер Вейля $0 < x_2 < x_1$. Построены асимптотики собственных чисел и функций и отвечающее им лагранжево многообразие. При этом рассматривались 3 случая, когда две области сшиваются по одному ребру (2 варианта) и когда две области сшиваются по обоим ребрам (3й вариант). В случае 3 биллиардный стол представляет собой задачу на двумерной поверхности с конической точкой.

1 Постановка задачи

1.1 Общая постановка

Рассмотрим уравнение Шредингера в двумерной камере Вейля $\mathcal{D}_0 = \{0 \le x_2 \le x_1\}$, с границей $\delta\mathcal{D}_0$ [1, 2]:

$$\hat{H}\Psi := \Big(\frac{1}{2}(\hat{p_1}^2 + \hat{p_2}^2) + \widetilde{V}(x_1,\, x_2)\Big)\Psi = E\Psi, \quad \widetilde{V}(x_1,\, x_2) = V(x_1) + V(x_2). \tag{1}$$

где $V(x)$ – монотонно растущая функция одной переменной, растущая на бесконечности.

Рассмотрим (a) задачу Дирихле и (b) задачу Неймана (собственные числа и функции будем соответственно обозначать (E_{kl}, Ψ_{kl}) для задачи Дирихле и (Ξ_{kl}, Φ_{kl}) для задачи Неймана):

$$(a) \quad \Psi|_{\delta\mathcal{D}} = 0, \tag{2}$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial n}\Phi|_{\delta\mathcal{D}} = 0. \tag{3}$$

Такая постановка задачи получается квантованием гамильтониана (символа оператора Шредингера)

$$\mathcal{H}(x_1,\, x_2,\, p_1,\, p_2) = H(x_1, p_1) + H(x_2, p_2), \quad H(x,p) = p^2 + V(x).$$

Как хорошо известно, соответствующий классический биллиард интегрируем и соответственно переменные в квантовой задаче можно разделить. В случае камеры Вейля разделение переменных проводится с помощью определителя Слэтера.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН;
e-mail: a.zolotukhina19@yandex.ru, minenkov.ds@gmail.com;
Авторы благодарны С.Ю. Доброхотову и В.А. Кибкало за ценные дискуссии и поддержку. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-71-10106.

Именно, обозначим через $(\varepsilon_k, \psi_k), k \in \mathbb{N}$ собственные числа и функции для одномерной задачи Дирихле и через $(\xi_k, \phi_k), k \in \mathbb{N}$ – для задачи Неймана:

$$H(x,\, p)\psi_k(x) = \big(\frac{\hat{p}^2}{2} + V(x)\big)\psi_k(x) = \varepsilon_k \psi_k(x), \quad \psi_k(x)|_{x_1=0,\, x_2=0} = 0. \tag{4}$$

$$H(x,\, p)\phi_k(x) = \big(\frac{\hat{p}^2}{2} + V(x)\big)\phi_k(x) = \xi_k \phi_k(x), \quad \phi'_k(x)|_{x_1=0,\, x_2=0} = 0. \tag{5}$$

тогда собственные числа и функции в камере Вейля с условиями Дирихле $(E_{kl}, \Psi_{kl}), k, l \in \mathbb{N}$ и условиями Неймана $(\Xi_{kl}, \Phi_{kl}), k, l \in \mathbb{N}$ выражаются следующим образом (подробнее см. п. 1.3 ниже)

$$E_{k,\, l} = \varepsilon_k + \varepsilon_l, \quad \Psi_{k,\, l}(x_1,\, x_2) = \begin{vmatrix} \psi_k(x_1) & \psi_l(x_1) \\ \psi_k(x_2) & \psi_l(x_2) \end{vmatrix} = \psi_k(x_1)\psi_l(x_2) - \psi_l(x_1)\psi_k(x_2);$$

$$\Xi_{kl} = \xi_k + \xi_l, \quad \Phi_{k,\, l}(x_1,\, x_2) = \begin{vmatrix} \phi_k(x_1) & -\phi_l(x_1) \\ \phi_k(x_2) & \phi_l(x_2) \end{vmatrix} = \phi_k(x_1)\phi_l(x_2) + \phi_l(x_1)\phi_k(x_2).$$

В данной работе рассматривается задача о поиске собственных функций или их асимптотик для нескольких различных областей, получаемых склейкой камеры Вейля. Интерес к данным областям связан с исследованием биллиардов и их связи с квазиклассическими асимптотиками (см. [3]).

1.2 Первая координатная четверть $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Рассмотрим простейшую область, определяемую как первую координатную четверть $(x_1,\, x_2)$:

$$\mathcal{D}_1 = \{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0\}.$$

Поставим граничные условия при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ так, чтобы отражение от осей происходило по принципу равенства углов.

В такой области переменные тривиальным образом разделяются и собственную функцию можно искать в виде:

$$\Psi_{k,\, l}(x_1,\, x_2) = \psi_k(x_1)\psi_l(x_2), \tag{6}$$

или

$$\Phi_{k,\, l}(x_1,\, x_2) = \phi_k(x_1)\phi_l(x_2), \tag{7}$$

где функции $\psi_k(x)$, $\phi_k(x)$ являются собственными функциями одномерной задачи с условием Дирихле и Неймана соответственно (4), (5).

Тогда собственные значения двумерной задачи связаны с собственными значениями одномерной задачи следующим образом для Дирихле (4):

$$E_{k,\, l} = \varepsilon_k + \varepsilon_l$$

и для Неймана (5):

$$\Xi_{k,\, l} = \xi_k + \xi_l.$$

Причем уравнения

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi_{k,\, l} = E_{k,\, l}\Psi_{k,\, l}(x_1,\, x_2),$$

$$\hat{\mathcal{H}}\Phi_{k,\, l} = \Xi_{k,\, l}\Phi_{k,\, l}(x_1,\, x_2)$$

справедливым в том числе для $k = l$.

1.3 Камера Вейля $0 \leq x_2 \leq x_1$

Перейдем к области, заданной как половина $\mathcal{D}_1$, заключенная между осью $x_1 = 0$ и прямой $x_2 = x_1$ в первой координатной четверти:

$$\mathcal{D}_2 = \{x_1 \geq 0, \quad x_1 \geq x_2\}$$

В ней поставим условия Дирихле:

$$\Psi|\delta\mathcal{D}_2 = 0.$$

Тогда собственные функции должны быть устроены схожим образом. Для этого можно рассматривать функцию $\Psi_{k,l}$ как следующую линейную комбинацию:

$$\Psi_{k,l}(x_1,\, x_2) = C_1\psi_k(x_1)\psi_l(x_2) + C_2\psi_l(x_1)\psi_k(x_2), \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Здесь $\psi_k(x)$ — собственные функции соответствующей одномерной задачи с гамильтонианом $\hat{H}(x,\, p)$. Определим константы из условия на границе:

$$\Psi_{k,l}|_{x_1=x_2} = 0.$$

Тогда $C_1 = -C_2$. Для нормировки можно выбрать $C_1 = 1/2$ или для простоты — $C_1 = 1$. Будем тогда считать собственные функции двумерной задачи в данной области как определитель Слеттера:

$$\Psi_{k,l}(x_1,\, x_2) = \begin{vmatrix} \psi_k(x_1) & \psi_l(x_1) \\ \psi_k(x_2) & \psi_l(x_2) \end{vmatrix}.$$

Собственные значения тогда связаны следующим образом:

$$E_{k,l} = \varepsilon_k + \varepsilon_l.$$

В таком случае при $k = l$ получается тривиальное решение.

Аналогичный результат получается и в том, случае, если на границе поставить условие Неймана:

$$\frac{\partial}{\partial n}\Phi|_{\delta\mathcal{D}_\in} = 0.$$

Такую производную по нормали можно переписать в виде:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2})\Phi|_{x_1=x_2} = 0.$$

Тогда собственные функции двумерной задачи будут также определяться через немного модифицированный определитель Слеттера, но из функций $\phi_k(x)$, удовлетворяющих условию Неймана:

$$\Phi_{k,l}(x_1,\, x_2) = \begin{vmatrix} \phi_k(x_1) & -\phi_l(x_1) \\ \phi_k(x_2) & \phi_l(x_2) \end{vmatrix} = \phi_k(x_1)\phi_l(x_2) + \phi_l(x_1)\phi_k(x_2).$$

1.4 Четверть-плоскость $x_1 \le |x_2|$

Продлим область $\mathcal{D}_2$ четным образом относительно оси x_1, также теперь будем считать потенциал четным: $V(x) = V(-x)$.

$$\mathcal{D}_3 = \{x_1 \ge 0, \quad -x_2 \le x_1 \le x_2\}$$

Тогда при нахождении собственных функций данной задачи в такой области $\mathcal{D}_3$ необходимо проверить склейку при $x_1 = 0$ — мягкой стенки. Будем требовать, чтобы функция $\Psi_{k,l}$ оставалась непрерывной, как и ее производная:

$$\begin{gathered}\Psi_{k,l}(x_1, x_2 + 0) = \Psi_{k,l}(x_1, x_2 - 0),\\ (\Psi_{k,l})_{x_2}(x_1,\, x_2 + 0) = (\Psi_{k,l})_{x_2}(x_1,\, x_2 - 0).\end{gathered}$$

Используя анзац в виде определителя Слеттера

$$\Psi_{k,l}(x_1,\, x_2) = \begin{vmatrix} \psi_k(x_1) & \psi_l(x_1) \\ \psi_k(x_2) & \psi_l(x_2) \end{vmatrix}.$$

и учитывая данное условие, получаем, что функции $\psi_k(x)$ должны быть дополнительно четными или нечетными по своему аргументу. Что приводит к двум наборам собственным функций и соответствующим им собственным значениям:

$$\begin{array}{cc} \hat{H}\psi_{n_1} = \varepsilon_{n_1}\psi_{n_1}, & \hat{H}\phi_{n_2} = \xi_{n_2}\phi_{n_2}, \\ \psi_{n_1}(-x) = -\psi_{n_1}(x), & \phi_{n_2}(-x) = \phi_{n_2}(x), \\ \psi_{n_1}(0) = 0. & \phi'_{n_2}(0) = 0. \end{array}$$

Перенумеруем данные спектры следующим образом:

$$\begin{gathered} n = 1 \to \phi_1, \\ n = 2 \to \psi_1, \\ n = 3 \to \phi_2, \\ \dots \\ n = 2k \to \phi_{2k}, \\ n = 2k + 1 \to \psi_{2k+1}. \end{gathered}$$

Перенумеруем данные спектры так, что собственная функция $\psi_k(x)$ и собственное значение ε_k с индексом $k = 2n, \quad n = 0,\, \dots,\, \infty$ отвечают четным собственным функциям, а с индексом $k = 2n{+}1, \quad n = 0,\, \dots,\, \infty$ отвечают нечетным собственным функциям. Так, получим дискретный спектр из собственных функций $\psi_k(x)$ и их собственных значений, через которые определяются собственные функции $\Psi_{k,l}(x_1,\, x_2)$ и собственные значения $E_{k,l} = \varepsilon_k + \varepsilon_l$ двумерной задачи в соответствующей области.

1.5 Коническая область

Теперь склеим 2 листа, определяемые как $\mathcal{D}_2$ — область в виде камеры Вейля, так, чтобы получился конус в $\mathbb{R}_3$. Такую область будем называть $\mathcal{D}_4$.

В такой области будем искать функции $\Psi(x_1,\, x_2)^I$, удовлетворяющей задаче в I-ом листе и $\Psi(x_1,\, x_2)^{II}$, удовлетворяющей задаче в II-ом листе. Тогда необходимо потребовать на границу (местах склейки) условия непрервности. Рассмотрим два типа таких условий A и B:

$$A: \begin{cases} \Psi(x_1,\, 0)^I = \Psi(x_1,\, 0)^{II}, \\ \Psi(x_1,\, 0)^I_{x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\Psi(x_1,\, 0)^{II}. \end{cases},$$

$$B: \begin{cases} \Psi(x_1,\, x_1)^I = \Psi(x_1,\, x_1)^{II}, \\ \Psi(x_1,\, x_1)^I_{n} = -\frac{\partial}{\partial n}\Psi(x_1,\, x_1)^{II}. \end{cases}.$$

Эти условия определяют переход с одного листа на другой. Нижний индекс n здесь обозначает нормальную производную, а условие B требует непрерывность функции и равенство нормальных производных относительной одной и той же нормали, направленной внутрь области. То есть условие B можно записать в ином виде:

$$B: \begin{cases} \Psi(x_1,\, x_2)^I = \Psi(x_1,\, x_2)^{II}, \\ \Psi(x_1,\, x_2)^I_{x1} - \Psi(x_1,\, x_2)^I_{x_2} = \Psi(x_1,\, x_2)^{II}_{x_2} - \Psi(x_1,\, x_2)^{II}_{x_1}. \end{cases}.$$

Тогда рассмотрим систему уравнений для каждого листа:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi^I = E\Psi^I,$$
$$\hat{\mathcal{H}}\Psi^{II} = E\Psi^{II},$$

Причем заметим, что E в оба уравнения входит то же самое.

Искать частные решения, удовлетворяющие условиям A и B, будем следующим образом:

$$(a): \begin{cases} \Psi^I(x_1,\, x_2) = \chi(x_1)\phi_n(x_2), \\ \Psi^{II}(x_1,\, x_2) = \chi(x_1)\phi_n(x_2), \end{cases},$$

$$(b): \begin{cases} \Psi^I(x_1,\, x_2) = \chi(x_1)\psi_n(x_2), \\ \Psi^{II}(x_1,\, x_2) = -\chi(x_1)\psi_n(x_2). \end{cases}.$$

Здесь $\psi_n(x), \phi_n(x)$ — ранее определенные собственные функции, удовлетворяющие условию Дирихле и Неймана соотвественно, а функция $\chi(x)$ — неизвестная, которую требуется определить.

Заметим, что при таком анзаце условие B выполнено автоматически.

Подставим функции в таком виде в рассматриваемые уравнения:

$$(a): \phi_n(x_2)\left[\hat{H}(x_1)\chi(x_1) + \chi(x_1)\xi_n\right] = E\chi(x_1)\phi_n(x_2)$$

Таким образом, получаем соотношение на собственные значения:

$$\hat{H}(x_1)\chi(x_1) = (E - \xi_n)\chi(x_1).$$

Введем обозначение:

$$\lambda = \lambda(E,\, \xi_n,\, n) = E - \xi_n \geq 0.$$

Причем λ принимает любые неотрицательные значения.в

Тогда назовем собственную функцию с собственным числом λ как $\chi_\lambda(x)$. Она удовлетворяет следующему уравнению:

$$\hat{H}\chi_\lambda(x) = \lambda\chi_\lambda(x).$$

Будем считать, что ее норма на луче $x_1 > 0$ конечна:

$$||\chi_\lambda(x)||_{L^2(x_1>0)} < \infty$$

На втором листе получится то же самое уравнение и та же самая функция.

В угловой точке конуса $x_1 = x_2 = 0$ потребуется дополнительное условие, назовём это условие условием C.

$$C : \left[\begin{array}{c} \chi(x_1) \sim c, \\ \chi(x_1) \sim \ln x_1. \end{array}\right.$$

Здесь $\sim$ обозначает прямую пропорциональность. По смыслу условие C требует или конечность определяемой функции или, наоборот ее бесконечный рост, то есть функция должна вести себя в окрестности угловой точки как константа или как логарифм.

Рассмотрим спектральный параметр в исходной задаче:

$$E \geq \xi_{n_0}, \quad n_0 \in \mathbb{Z}^+.$$

Тогда собственные функции образуют непрерывный спектр:

$$\Psi^I = \Psi^{II} = \{\phi_n(x_2)\chi_\lambda(x_1)\}_{n=0}^{n_0}$$

Аналогичным образом получаем для:

$$E \geq \varepsilon_{k_0}, \quad k_0 \in \mathbb{Z}^+,$$
$$\mu = \mu(E,\, \varepsilon_k,\, k) = E - \varepsilon_k \geq 0.$$

Спектр тогда выглядит следующим образом:

$$\Psi^I = \{\psi_n(x_2)\chi_\mu(x_1)\}_{n=1}^{k_0}, \quad \mu = E - \varepsilon_{k_0}.$$

Рассмотрим теперь следующий анзац:

$$\Psi^I = \chi_\mu(x_1)\chi_\lambda(x_2), \quad \mu = E - \lambda.$$

Здесь:

$$\hat{H}(x_1)\chi_\mu(x_1) = (E - \lambda)\chi_\mu(x_1)$$

Список литературы

[1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics: In 10 Vols.: Vol. 3. Quantum Mechanics (Nonrelativistic Theory), 3rd ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.

[2] S.Yu. Dobrokhotov, D. S. Minenkov, S. B. Shlosman, Asymptotics of Wave Functions of the Stationary Schrödinger Equation in the Weyl Chamber, Theoret. and Math. Phys. 197 2 (2018) 1626–1634.

[3] В. Ф. Лазуткин, Квазиклассическая асимптотика собственных функций, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, М.: ВИНИТИ, 34 (1988) 135–174