

УДК 517.938.5

Бильярдная реализация неботтовских особенностей интегрируемых гамильтоновых систем с не более чем одним особым слоем расслоения ЗейфертаА. А. Кузнецова ¹

В работе реализуются вырожденные бифуркации торов Лиувилля систем с двумя степенями свободы при фиксированной энергии и при условии, что в соответствующем расслоении Зейферта не более одного особого слоя типа (p, q) .

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярдная книжка, слоение Лиувилля, вырожденные особенности, расслоение Зейферта, мультиатомы .

The paper implements degenerate bifurcations of Liouville tori of systems with two degrees of freedom at a fixed energy and provided that there is no more than one special layer of type (p, q) in the corresponding Seifert fiber space.

Key words: integrable system, billiard book, Liouville's foliation, degenerate exception, Seifert fiber space, multi-atom.

1. Введение.

Широко известен класс интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, обладающих боттовским (невырожденным) интегралом на выбранном уровне постоянной энергии Q^3 , см. [1, 2, 3]. Регулярные слои диффеоморфны торами (торы Лиувилля), а особые слои задают перестройки (бифуркации) этих торов. Окрестности особых слоев в Q^3 называются 3-атомами.

Известно, что бильярд в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик, интегрируем. В.В. Ведюшкиной был введен [4, 5] новый класс интегрируемых бильярдных книжек, получающихся из плоских бильярдов их склейками вдоль граничных ребер. Каждому ребру приписывается перестановка, диктующая правило перехода бильярдного шара с одного листа бильярда на другой.

В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой были доказаны разделы *A* и *B* гипотезы Фоменко (сформулированной в работе [6]) о моделировании любых невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы подходящими бильярдами. А именно, что произвольная невырожденная особенность слоения Лиувилля (классифицированы в работах А.Т.Фоменко, см. [3]) и любая база слоения Лиувилля (классифицирующим инвариантом которой является молекула или инвариант Фоменко [7]), реализуются алгоритмически задаваемыми бильярдными книжками, см. [4, 5] и [8] соответственно.

Оказалось, что гипотеза Фоменко (о реализуемости слоений бильярдами) справедлива и для некоторых гамильтоновых систем, чей интеграл имеет вырожденные особенности определенного типа. Была сформулирована новая гипотеза о возможности реализации “неботтовских” 3-атомов. В данной работе показано, что гипотеза Фоменко верна для вырожденных мультиседловых 3-атомов без звездочек и для вырожденных мультиседловых 3-атомов с одной звездочкой. Примеры моделирования бильярдными книжками некоторых вырожденных 3-атомов указаны в работе автора [9].

Автор благодарит А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкину и В.А. Кибкало за постановку задачи, ценные комментарии и обсуждения.

2. Простейшие бильярды и бильярдные книжки

Рассмотрим семейство софокусных квадрик на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ с плоской метрикой, описываемое уравнением:

¹Кузнецова Анастасия Андреевна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anastasiakuznecova0143@gmail.com.

Kuznetsova Anastasia Andreevna — Undergraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

$$x^2(b - \lambda) + y^2(a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda),$$

где $a > b > 0$ — параметры этого семейства, а число $\lambda \in (-\infty, a]$ — параметр кривой из этого семейства или параметр квадрики. Кривая из семейства софокусных квадрик является эллипсом при $\lambda \in (-\infty, b)$, гиперболой при $\lambda \in (b, a)$, вертикальной прямой при $\lambda = a$ и горизонтальной (фокальной) прямой при $\lambda = b$. Фокусы всех невырожденных квадрик совпадают и, при условии $a > b > 0$, находятся в паре точек горизонтальной прямой Ox .

В данной работе рассматривается простейший билиард A'_0 (см. рис.1а), являющийся плоской областью, граница которой образована гиперболой, эллипсом, фокальной прямой и вертикальной осью OY . Из нескольких копий такого билиарда мы будем конструировать нужные билиардные книжки.

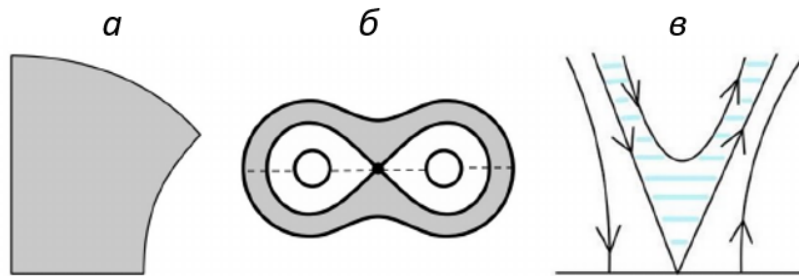


Рис. 1: (а) область A'_0 (б) простейший седловой невырожденный 2-атом B (в) полукрест.

Известно, что билиард в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик одного и того же семейства, интегрируем [10]. Гамильтонианом (энергией) системы является квадрат модуля вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Рассматривается движение (без трения) материальной частицы по области с плоской метрикой, где отражение от границы является абсолютно упругим (билиардное движение). Дополнительный первый интеграл Λ билиардной системы определяет параметр λ каустики траектории, проходящей через данную точку в данном направлении.

Теперь мы вкратце и наглядно опишем понятие билиардной книжки. Более подробное описание см. в работах [4, 5].

Зафиксируем n простейших билиардов и склеим их по граничным дугам. К каждой дуге припишем перестановку, определяющую правило перехода билиардного шара с одного билиарда (листа) на другой, в соответствии с условиями:

1. если две дуги из границы имеют общую точку, то есть являются соседними, то перестановки σ_1 и σ_2 , приписанные им, коммутируют;
2. к невыпуклым дугам границы всегда приписаны тождественные перестановки.

Данная конструкция является билиардной книжкой, склеенной из n простейших билиардов.

3. Понятия 2-атомов, 3-атомов и полукрестов

Рассмотрим гладкое многообразие X^n и на нем гладкую функцию $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1. Точка $x \in X^n$ для функции f называется *критической*, если все частные производные равны 0 в этой точке. Иначе точку называют *регулярной*. Уровень $f = c$, содержащий хотя бы одну критическую точку, называют *особым*. В точке можно рассмотреть матрицу вторых частных производных. Если ее определитель в критической точке равен нулю, то эту точку называют *вырожденной*.

Пусть дана функция Морса f на двумерном многообразии X^2 . Напомним, что функцией Морса называют гладкую функцию, у которой все критические точки невырождены, причем их конечное количество.

Определение 2. *Атомом* называют окрестность X^2 критического слоя, задаваемая неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε , расслоенная на линии уровня функции f и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности. Если критическое значение - локальный минимум или локальный максимум, то это будет *атом* A . Если критическое значение -

седловое, то соответствующий атом - *седловой*. Атом называется *ориентируемым* или неориентируемым в зависимости от того, является ли поверхность X^2 ориентируемой или неориентируемой.

Вернемся к функции Морса на двумерном многообразии. Рассмотрим её особую точку x_0 , такую что гессиан $d^2f|_{x_0}$ имеет собственные значения разных знаков, т.е. x_0 — седловая точка f . Рассмотрим для достаточно малых δ и ε множество $f^{-1}(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \cap B_\delta(x_0)$, т.е. пересечение прообраза некоторой окрестности критического значения $f(x_0)$ с малой окрестностью точки x_0 . Если x_0 седловая точка, тогда эта окрестность гомеоморфна “кресту”. Если удалить из креста особую точку и четыре сепаратрисы, соответствующие критическому уровню, то оставшееся множество будет расслоено на интервалы. Можно считать, что эти интервалы двух цветов — черные соответствуют значениям функции f меньшим $f(x_0)$, а белые — большим.

В дальнейшем нам потребуется следующая конструкция. Разрежем каждый крест на две половины трансверсально белым интервалам. Полученный объект будем называть “полукрестом”.

Определение 3. *Половина креста (полукрест)* - это прообраз ε -окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой окрестности точки (0,0) вместе со структурой слоения, пересеченный с верхней полуплоскостью $x \geq 0$, см. рис. 1в.

Определение 4. Так как любой невырожденный 2-атом является склейкой некоторого числа крестов друг с другом, то разбивая каждый полукрест на два заключаем, что каждый невырожденный 2-атом является склейкой полукрестов. Пусть теперь 2-атом имеет не только седловые морсовские, но и вырожденные “мультиседловые”. Каждое мультиседло является склейкой p экземпляров полукреста ($p > 2$). Критическая точка, соответствующая мультиседлу является вырожденной. Будем называть такие атомы *мультиседловыми 2-атомами*.

Рассмотрим, как получаются 3-атомы. Наличие интегрируемости требует также наличие дополнительного первого интеграла f . Ограничение интеграла на изоэнергетическую поверхность Q^3 является гладкой функцией. Такая функция имеет критические точки, в которых принимает особые значения. Прообразом окрестности особого значения интеграла и есть 3-атом. В случае, если в окрестности критической траектории в сечении имеем мультиседловую критическую точку. Полученные 3-атомы назовем *мультиседловыми 3-атомами*.

Уже подробно изучены невырожденные 3-атомы, например в работах [2, 3], а также в книге А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [1]. Такие 3-атомы являются расслоением Зейферта над “морсовской базой”, т.е. особые слои расслоения могут иметь только тип (2,1). Известно, что невырожденные атомы моделируются биллиардными книжками. Однако в данной работе изучаются случаи вырождения. Т.е. рассматривается другой тип атомов, вырожденных, являющихся также расслоением Зейферта, но над “неморсовской” базой. Согласно гипотезе Фоменко, некоторые классы вырожденных атомов, а именно — мультиседловые атомы, тоже можно реализовать биллиардными книжками.

Определение 5. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие (с краем или без края), разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои), называется *многообразием Зейферта*, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Для особого слоя типа (n, k) таких что $\text{НОД}(k, n) = 1$, напомним, такая окрестность получается из прямого произведения диска D^2 на отрезок I склейкой по граничным дискам $D^2 \times \{0\}$ и $D^2 \times \{1\}$ с поворотом вокруг оси симметрии на рациональный угол $2\pi k/n$. Многообразие Зейферта с заданной на нем структурой слоев называется *расслоением Зейферта*.

Определение 6. Пусть Q - многообразие Зейферта. Пусть две точки на нем эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном слое. Фактор-пространство многообразия Q по этому отношению эквивалентности назовем *базой расслоения Зейферта*.

Определение 7. Возьмем произвольный атом (X^2, K) , и рассмотрим его граф $K = \{f = c\}$. При этом наряду с прежними атомами рассмотрим еще один простой атом, получающийся следующим образом. В качестве поверхности X мы возьмем кольцо и объявим графом K любую его осевую окружность. Этот атом можно рассматривать как окрестность неособого (регулярного) уровня функции f .

Изготовим атомы со звездочками. Отметим на некоторых ребрах графа K произвольное число внутренних точек. Объявим их новыми вершинами графа K и обозначим звездочками.

Атом (X^2, K) , у которого есть хотя бы одна вершина-звездочка, называется *атомом со звездочками*.

4. Теорема о реализации вырожденных атомов с не более, чем одной звездочкой.

Гипотеза А (Фоменко). Любые бифуркации двумерных торов Лиувилля в изоэнергетическом многообразии любой интегрируемой невырожденной системы с двумя степенями свободы моделируются при помощи интегрируемых бильярдных.

Теорема (Ведюшкина-Харчева, [4, 5]). Гипотеза Фоменко А верна, а именно, для любого ориентируемого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится бильярдная книжка, склеенная из простейших бильярдных A'_0 , такая, что слоение Лиувилля прообразом окрестности особого значения интеграла $\lambda = b$ ее интеграла Λ (в случае атома А - в окрестности особого значения $\lambda = 0$) ее изоэнергетической поверхности Q^3 послойно гомеоморфно данному атому.

Гипотеза \tilde{A} . В классе слоений Лиувилля интегрируемых бильярдных реализуются не только боттовские бифуркации торов Лиувилля, но и достаточно богатые классы бифуркаций торов Лиувилля, описываемых “неботтовскими” 3-атомами, включая мультиседловые особенности ранга 1.

Лемма

Рассмотрим бильярдную книжку $\mathbb{B}(A'_0, n)$, склеенную из n экземпляров бильярда A'_0 , так что на корешке, который проецируется на фокальную прямую стоит циклическая перестановка $\sigma = (1..n)$, на вогнутой гиперболической и эллиптической – тождественные перестановки, а на выпуклой гиперболической дуге перестановка либо тождественная, либо σ^k , $k < n$, $(n, k) = 1$. Тогда атом, описывающий бифуркацию слоения Лиувилля на фокальном слое, имеет вид расслоения Зейферта с двумерной базой P , которая является вырожденным двумерным атомом с одной вершиной (см. рис. 5). Если перестановка на выпуклой гиперболической дуге тождественная то 3-атом гомеоморфен прямому произведению $P \times S^1$. Если перестановка на выпуклой гиперболической дуге σ^k , то соответствующее слоение Зейферта имеет один особый слой типа (n, k) .

Доказательство.

Обозначим через $h : Q^3 \rightarrow \mathbb{B}(A'_0, n)$ проекцию трехмерной изоэнергетической поверхности бильярдной книжки на стол-комплекс. Она расслоена на слои дополнительного интеграла Λ .

Рассмотрим дугу гиперболы, заключенную между граничными дугами гипербол бильярда A'_0 , экземпляры которого являются листами книжки. Объединение всех дуг по всем листам книжки является одномерным клеточным комплексом L , склеенным из n отрезков, отождествленных в точке на фокальной прямой (см. пример на рисунке 2а).

Докажем, что точки прообраза $h^{-1}(L)$ лежащие на линиях уровня $\Lambda \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ для некоторого достаточно малого ε , образуют несвязное объединение двух атомов P (см. пример на рисунке 2б).

Заметим, что если мы зафиксируем уровень дополнительного интеграла $\Lambda = \lambda$, то тогда точки $h^{-1}(L)$, лежащие на данном уровне, получают оснащение точки x_0 единичным вектором скорости v , таким, что прямая, проходящая через точку x_0 в направлении вектора v , касается квадрики с параметром λ_0 (или проходит через фокус, если $\lambda = b$). При этом все вектора естественным образом разбиваются на два класса – одни сонаправлены с направлением прямой Ox (такие вектора будем называть направленными вправо), а другие – направлены противоположно (такие вектора будем называть направленными влево). Очевидно, что если комплекс L не находится на границах-корешках книжки, то эти вектора скорости не перемешиваются, то есть после отражения на эллиптической границе или при переходе на другой лист на фокальной прямой вектор скорости, приписанный материальной точке остается направленным или вправо или влево. Поэтому прообраз $h^{-1}(L)$ естественным образом разбивается на две гомеоморфных друг другу части. Рассмотрим часть этого прообраза, состоящую из точек вида (x, v) , таких, что $x \in L$, вектор скорости v направлен “вправо”, а значение интеграла $\Lambda \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Число $\varepsilon > 0$ выбирается таким образом, чтобы дуга эллипса с параметром $b - \varepsilon$ лежала внутри области A'_0 , образующей листы бильярдной книжки, а дуга гиперболы с параметром $b + \varepsilon$ не лежала бы на оси Oy , т.е. $\varepsilon < b - a$. Обозначим указанную часть прообраза через \tilde{L}_r . Покажем, что \tilde{L}_r послойно гомеоморфна 2-атому P .

Рассмотрим оснащение точек комплекса L векторами вправо. Тогда, если $\lambda = b$, то векторов скорости, которые могут быть приписаны данной точке не более двух – один направлен от левого фокуса а другой – к правому фокусу. На эллиптической границе (которой приписана тождественная перестановка) эти вектора отождествляются согласно бильярдному закону. На фокальной прямой эти вектора по определению совпадают (см. пример на рисунке 2в). Таким образом, каждому отрезку комплекса L соответствует окружность на критическом уровне $\lambda = b$ в многообразии

\tilde{L}_r . Эти окружности необходимо отождествить в критической точке, которая соответствует нульмерной клетке комплекса L , лежащей на фокальной прямой.

Если $\lambda < b$, то не все точки комплекса L могут быть оснащены подходящими векторами скорости. А именно, необходимо удалить из каждого отрезка, составляющего L , часть, которая попадает внутрь эллипса с параметром λ . Тогда комплекс L распадётся в n отрезков, каждый из которых проецируется в один лист биллиардной книжки. Оснащая каждый отрезок подходящими векторами скорости, получаем, что внутренние точки отрезков оснащаются парами векторов, тогда как граничные – одной. Тогда в \tilde{L}_r на данном уровне интеграла в прообразе каждого отрезка лежит окружность (см. пример на рисунке 2г). Наконец, если $\lambda > b$, то в прообразе комплекса L лежит одна окружность, составленная из последовательных отрезков, лежащих в прообразе каждого подотрезка в комплексе L . В самом деле, точка, соответствующая нульмерной клетке комплекса L , лежащая на фокальной прямой, может быть оснащена двумя векторами скорости (см. пример на рисунке 2д). Однако в \tilde{L}_r ей соответствует $2n$ пар (точка, вектор), которые будучи отождествлены по биллиардному закону становятся n парами (точка, вектор). Можно считать, что вектор всегда направлен “наружу” биллиарда A'_0 , составляющего лист биллиардной книжки. Вдоль этих точек в \tilde{L}_r склеиваются отрезки, лежащие в прообразах отрезков, составляющих комплекс L . В результате такой склейки получается одна окружность.

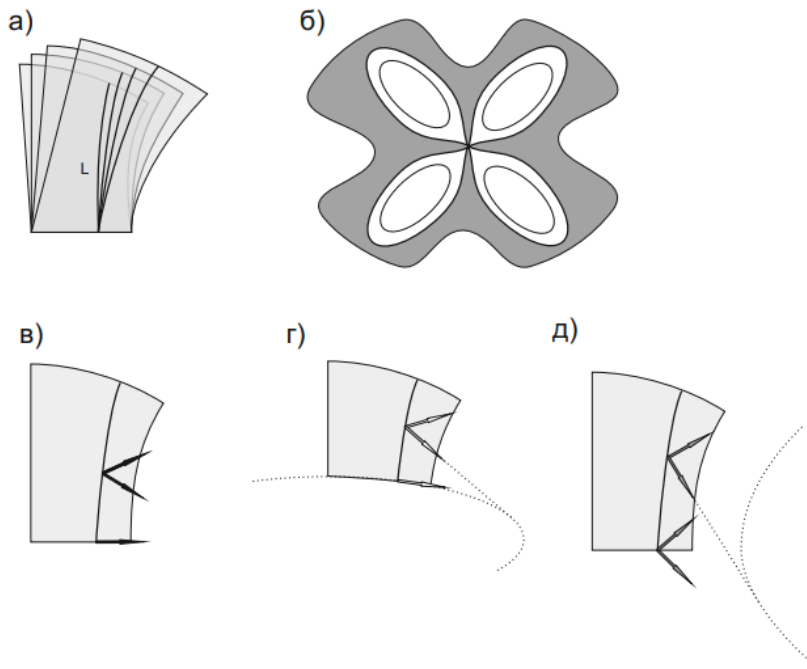


Рис. 2: Биллиардная книжка, склеенная из четырёх листов A'_0 и комплекс L на ней а). Часть прообраза \tilde{L}_r комплекса L гомеоморфна 2-атому, изображенному на рисунке б). Один лист биллиардной книжки и оснащение векторами скорости сегментов комплекса L при различных значениях интеграла Λ (в-д).

Таким образом, многообразию \tilde{L}_r послойно гомеоморфно искомому особому 2-атому P , который описывает симметричную бифуркацию n окружностей в одну, и содержит одну критическую точку. Если в определении части \tilde{L}_r прообраза $h^{-1}(L)$ рассматривать вектора направленные “влево”, то получим часть прообраза \tilde{L}_l , которая также послойно гомеоморфна 2-атому P .

Рассмотрим теперь часть многообразия Q^3 , отвечающую значениям интеграла $\Lambda \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$. Обозначим её через Q^3_ϵ и удалим из неё точки, проекции которых лежат на гиперболических корешках книжки. То, что осталось, естественным образом разбивается на две части – часть R , для которой в парах (x, v) вектор v всегда направлен “вправо”, и часть L , для которой вектора v направлены “влево”. При этом и часть R и часть L гомеоморфны прямому произведению отрезка на

2-атом P . В самом деле, фиксируем точку на критической окружности. Она лежит на фокальной оси и имеет направление. Рассмотрим в каждом листе книжки дугу гиперболы, проходящую через данную точку. Получим комплекс L или ему гомеоморфный. Оснастим его векторами скорости, соответствующими направлению точки критической окружности. Получим атом P .

Осталось склеить части L и R вдоль точек, лежащих на корешках книжки. На корешке с тождественной перестановкой склейка всегда происходит без “подкрутки” – номер листа при ударе о такую границу не меняется. Если же на гиперболическом корешке стоит нетождественная перестановка, то необходимо при склейке “подкрутить” базу. В результате окрестность особого слоя в Q^3 становится нетривиально расслоенным полноторием. Лемма доказана.

Теорема *Для любого вырожденного мультиседлового 3-атома без звездочек, т.е. вида прямого произведения вырожденного мультиседлового 2-атома на окружность, алгоритмически строится бильярдная книжка, склеенная из простейших бильярдов A'_0 , такая что её слоение Лиувилля на фокальном слое описывается заданным 3-атомом.*

Доказательство.

Алгоритм построения книжки

Искомая бильярдная книжка строится аналогично случаю невырожденных атомов.

Рассмотрим вырожденный 2-атом Y , соответствующий данному 3-атому, т.е. такой, что 3-атом гомеоморфен $Y \times S^1$. Пусть количество полукрестов, на которые разбивается вырожденный атом Y равно n . Для того чтобы восстановить атом, в начале склеим все полукресты в кресты и мультиседла (в дальнейшем будем называть их просто сёдлами). Пусть количество сёдел равно k . Занумеруем все полукресты, образующие атом Y .

Рассмотрим бильярдную книжку, склеенную из n экземпляров бильярда A'_0 . Перестановки, соответствующие гиперболическим корешкам книжки, оставим тождественными. Для каждого мультиседла и креста рассмотрим его обход по часовой стрелке и запишем в цикл номера полукрестов, его образующих. Полученные k циклов образуют некоторую перестановку $\sigma_1 \in S_n$, которую припишем корешку книжки, лежащему на фокальной оси.

Рассмотрим склейку полукрестов, соответствующую сепаратрисам. Для каждого полукреста фиксированы две сепаратрисы: исходящая и входящая. Рассмотрим полукрест с некоторым номером i_1 . Найдём полукрест, такой что исходящая сепаратриса полукреста с номером i_1 переходит в его входящую сепаратрису. Пусть номер найденного креста i_2 . Далее найдём полукрест, входящая сепаратриса которого соответствует исходящей сепаратрисе креста с номером i_2 . Обозначим новый полукрест i_3 . Продолжая процесс в какой-то момент мы вновь вернемся на полукрест с номером i_1 . Запишем номера встреченных полукрестов в цикл (i_1, i_2, i_3, \dots) . В результате мы выпишем номера всех полукрестов в некоторое объединение циклов. Объединим все циклы в одну перестановку σ_3 и припишем её эллиптическому корешку книжки. Полученную бильярдную книжку обозначим $\mathbb{B}(A'_0, Y)$.

Особый слой слоения Лиувилля бильярдной книжки $\mathbb{B}(A'_0, Y)$ описывается 3-атомом Y . Разрежем бильярдную книжку $\mathbb{B}(A'_0, Y)$ вдоль корешка, лежащего на эллиптической границе. Получим вообще говоря несвязное объединение бильярдных книжек, склеенных из бильярдов A'_0 вдоль горизонтальных корешков, лежащих на фокальной оси. Атом для каждой такой бильярдной книжки согласно лемме это мультиседло, который состоит из полукрестов, число которых равно количеству листов – бильярдов A'_0 – которое в свою очередь равно длине соответствующего цикла перестановки σ_1 , приписанной горизонтальному корешку книжки $\mathbb{B}(A'_0, Y)$.

Далее практически дословно повторяя доказательство, предьявленное в работе В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчёвой, можно показать, что склейка таких простейших бильярдных книжек в единую книжку $\mathbb{B}(A'_0, Y)$ склеивает мультисёдла в искомый 3-атом.

Пример построения бильярдной книжки для вырожденного атома без звездочек.

Рассмотрим один из 2-атомов степени 4 (см. рис. 3). Он состоит из 4 полукрестов, значит, бильярдная книжка будет состоять из 4 листов. По алгоритму $\sigma_2 = \sigma_4 = id$. Сложность данного атома – 1, поэтому σ_1 состоит из одного цикла длины 4. Пусть мы занумеровали полукресты от одного до четырех по часовой стрелке. Тогда $\sigma_1 = (1234)$.

Исходящая стрелка первого полукреста соединяется со своей же входящей стрелкой, поэтому $\sigma_3(1) = 1$. В это же время $\sigma_3(2) = 3, \sigma_3(3) = 4, \sigma_3(4) = 2$. Таким образом, $\sigma_3 = (1)(234)$.

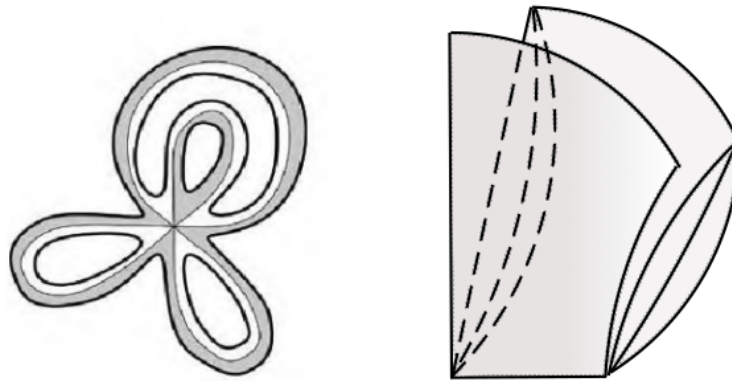


Рис. 3: 2-атом и бильярдная книжка, которая реализует данный атом.

Добавив склейки на фокальной оси можно обобщить доказанную теорему, разрешив так называемые звездочки – особые слои расслоения Зейферта.

Теорема Для любого вырожденного мультиседлового 3-атома с одной звездочкой, т.е. слоение Зейферта которого содержит ровно 1 особый слой вида (p, q) (где целые p, q взаимно-просты) алгоритмически строится бильярдная книжка, склеенная из простейших бильярдов A'_0 , такая что её слоение Пуанкаре на фокальном слое описывается заданным 3-атомом.

Доказательство.

Рассмотрим заданный 3-атом, содержащий одну звездочку. Он может быть описан с помощью базы $Y - 2$ атома без звездочек, у которой на одном из ребер (обозначим его e) критического графа стоит звездочка. Для построения 3-атома по данной информации необходимо для начала рассмотреть p экземпляров разрезанного 2-атома Y вдоль белого кольца. Далее, занумеруем полученные экземпляры и последовательно склеим их вдоль разрезов. В новом 2-атоме Y_p звездочка превратится в мультиседло (в котором сходятся p полукрестов). Рассмотрим прямое произведение $Y_p \times I, I = [0, 1]$. Склеим края $Y_p \times \{0\}$ и $Y_p \times \{1\}$ с поворотом, т.е. 1-ый экземпляр разрезанного атома Y в $Y_p \times \{1\}$ склеим с $q + 1$ -ым экземпляром разрезанного атома Y в $Y_p \times \{0\}$ и т.д.

Алгоритм

Рассмотрим бильярдную книжку $\mathbb{B}(A'_0, Y)$, построенную по алгоритму из теоремы 1 для 3-атома вида $Y \times S^1$.

Ребру e в атоме Y (на котором лежит звездочка) соответствует некоторое место $i j$ в некотором цикле $(...i j...)$ перестановки σ_3 на эллиптическом корешке. Вклеим в бильярдную книжку $\mathbb{B}(A'_0, Y)$ дополнительный лист A'_0 вдоль эллиптического корешка приписав ему новый номер k , так что указанный выше цикл преобразуется в цикл $(...i k j...)$. Полученную бильярдную книжку обозначим через $\mathbb{B}(A'_0, Y + A'_0)$. Рассмотрим p экземпляров такой книжки. Будем называть каждый экземпляр книжки главой. Вначале склеим все главы вдоль горизонтальных корешков добавленных листов A'_0 с помощью циклической перестановки $\tau = (1..p)$, меняющей номер главы при ударе о горизонтальный корешок добавленных листов A'_0 . А затем добавим склейку вдоль вертикальных корешков, лежащих на выпуклых гиперболических дугах. Теперь при ударе о такой корешок бильярдная частица остается на том же листе, но меняет номер главы по перестановке τ^q . Очевидно, что указанные перестановки корректно задают бильярдную книжку.

Реализация

Докажем, что построенная бильярдная книжка действительно реализует заданный 3-атом.

Разрежем построенную по алгоритму бильярдную книжку по вертикальному корешку и по отрезку фокальной прямой так, чтобы получить p бильярдных книжек $\mathbb{B}(A'_0, Y + A'_0)$. Фиксируем гиперболу - координатную линию, пересекающую одну из копий, и уровень интеграла $\Lambda = \lambda$. Гипербола оснащена четырьмя векторами, которые при приближении к фокальному уровню образуют критический уровень бильярдной книжки $\mathbb{B}(A'_0, Y)$. Таким образом, добавление листа по верхнему корешку бильярдной книжки не меняет атом, который она реализует.

Теперь оставим только разрез по вертикальному корешку. Изоэнергетическая поверхность в окрестности уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ есть 3-атом $Y_p \times S^1$. Если убрать точки из левой границы,

получим домножение на отрезок, и соответственно цилиндр $Y_p \times I$ в окрестности уровня интеграла, где $I = [0, 2\pi]$.

Осталось показать, что перестановка на левой границе τ^q склеивает основания цилиндра с поворотом на угол $\frac{2\pi q}{p}$. Такая перестановка переводит бильярдный шар при ударе о вертикальный корешок с главы с номером i на главу с номером $i + (q \bmod p)$. Это аналогично тому, что при полном обходе копия атома Y с номером i склеивается с копией с номером $i + (q \bmod p)$. Следовательно, перестановка на левой границе бильярдной книжки, а именно τ^q , правильно склеивает края Y_p . Далее, ссылаясь на работу В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой, получаем, что приведенный алгоритм корректен и реализует вырожденные атомы со звездочкой.

Работа выполнена в МГУ им. М.В.Ломоносова при поддержке гранта РФФ № 22-71-10106.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999.
2. Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР. 1986. **287**, №5. 1071–1075.
3. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, №6. 1276–1307.
4. Ведюшкина В. В., Фоменко А.Т., Харчева И. С. Моделирование невырожденных бифуркаций замкнутых решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами // Докл. РАН. 2018. **479**, №6. 607–610.
5. Ведюшкина В.В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, №12. 17–56.
6. Фоменко А.Т., Ведюшкина В. В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. №3. 15–25.
7. Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44**, №1 (265). 145–173.
8. В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева "Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем Матем. сб., 212:8 (2021), 89?150;
9. А.А. Кузнецова Кузнецова А.А., "Моделирование вырожденных особенностей интегрируемых бильярдных систем бильярдными книжками" Вестн. Моск. ун-та Матем. Механ. 2023 № 5 3-10
10. Дж.Д. Биркгоф "Динамические системы" // Изд. дом Удмуртский университет, 1999

Поступила в редакцию