УДК 517.938.5

В. А. Кибкало

Особенности смешанного типа центр-фокус и седло-фокус

В работе изучается вопрос топологического моделирования невырожденных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем с тремя степенями с помощью интегрируемых софокусных биллиардов с потенциалом Гука на столах-комплексах — биллиардных книжках.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, особенности, билллиард, геодезический поток, эллипсоид, слоение Лиувилля.

§ 1. Введение

Классификация невырожденных локальных особенностей интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем с n степенями свободы следует из результатов Элиассона [2] и Вэя [3]. Для простоты напомним случай невырожденных точек ранга 0, т.е. точек, в которых косые градиенты всех первых интегралов системы обращаются в ноль. Такую точку называют невырожденной, если некоторая линейная комбинация линеаризаций A_{f_i} векторных полей $sgrad\, f_i$ имеет n попарно различных и ненулевых собственных значений. При этом если $\alpha + \beta$ — собственное значение, то для всех комбинаций знаков $\pm_1 \alpha \pm_2 i\beta$ также являются собственными значениями. Отсюда тип особой точки ранга 0 определяется тройкой чисел n_e, n_s, n_f с условием $n_e + n_s + 2n_f = n$, задающей количество наборов собственных значений вида $\pm i\beta$, $\pm\alpha$, $\pm_1\alpha \pm_2 i\beta$.

Согласно теореме, для невырожденной особой точки ранга 0 существует окрестность, в которой слоение диффеоморфно (с сохранением симплектической структуры) произведению канонических локальных особенностей типа центр (эллиптическая), седло (гиперболическая) и фокус. Количество последних для выбранной особой точки равно числам n_e, n_s, n_f. Канонические особенности задаются функциями:

$$H_e = p_1^2 + q_1^2, \qquad H_s = p_1^2 - q_1^2, \qquad H_f = p_1q_1 + p_2q_2,\ F_f = p_1q_2 - p_2q_1.$$

Каждому из таких наборов отвечает эллиптическая (центр), гиперболическая (седло) или фокусная компоненты.

В системах с одной степенью свободы полулокальная эллиптическая особенность совпадает с локальной (особый слой состоит из особой точки типа центр), а полулокальная седловая особенность является 2-атомом, т.е. расслоенной окрестностью конечного графа с вершинами степени 4, вложенного в двумерную ориентируемую поверхность. Ребра графа ориентированы гамильтоновым

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-71-10106) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

векторным полем, и при циклическом обходе вокруг его вершин чередуются входящие и выходящие сепаратрисы. Полулокальная фокусная особенность устроена так: особый слой является тором с k перетяжками, и все близкие слои являются неособыми и гомеоморфны торам. Бифуркационная диаграмма Σ локально состоит из одной точки. При обходе вокруг нее базис на регулярном торе переходит в базис на регулярном торе, причем один из циклов гомологичен нулю в 4-мерной окрестности особого слоя. Выберем его в качестве первого базисного цикла. Тогда единственный нетривиальный элемент матрицы перехода, возникающей при обходе по прообразу границы малой окрестности точки Σ, равен количеству особых точек на особом слое.

Полулокальную структуру невырожденной особенности с точностью до послойного гомеоморфизма задает теорема Зунга [4]. Согласно ней, слоение в инвариантной (относительно гамильтонова действия, т.е. сдвигов вдоль гамильтоновых полей всех первых интегралов системы) окрестности особого слоя послойно гомеоморфно произведению нескольких полулокальных компонент типа центр (2-атом A), седло (седловой 2-атом V) и фокус, факторизованное по действию конечной группы G. Данная группа действует покомпонентно, сохраняет ранг орбиты точки относительно гамильтонова действия и является свободным на всем произведении. Говорят, что особенность представляется в виде типа почти прямого произведения.

Без ограничения общности можно считать, что каждый ненулевой элемент группы действует нетривиально хотя бы на двух сомножителях. Элементы, действующие нетривиально на одной компоненте, действуют на ней свободно и порождают подгруппу. После факторизации по ней, новая компонента произведения принадлежит к прежнему классу седловых или фокусных особенностей, и устроена проще, т.е. содержит меньшее количество точек ранга 0. Такое представление Н.Т.Зунгом было названо минимальной моделью особенности. Для седловых особенностей ранга 0 верно, что указанное представление для каждой особенности единственно.

§ 2. Моделирование невырожденных особенностей с фокусными компонентами биллиардами с потенциалом Гука

2.1. Биллиард с потенциалом в подобласти эллипсоида вращения: моделирование локальной и полулокальной особенности. Рассмотрим семейство софокусных эллипсоидов и гиперболоидов вращения в $\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$ с полуосями $a_1 = a_2 < a_3$:

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_1^2}{a_3 - \lambda} = 1.$$

При $\lambda < a_1$ имеем эллипсоид вращения, пересекающий плоскость $x_3 = 0$ по окружности радиуса $\sqrt{a_1 - \lambda}$ с концами оси симметрии Ox_3 в точках $x_1 = x_2 = 0, x_3 = \pm\sqrt{a_3 - \lambda}$. При $a_1 < \lambda < a_3$ поверхностью-каустикой будет двуполостный гиперболоид вращения, проходящий через те же точки $(0, 0, \pm\sqrt{a_3 - \lambda})$.

В качестве гамильтониана биллиарда с потенциалом примем

$$H = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Относительно стандартной скобки Пуассона на $T^*\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$ первым интегралом системы является

$$F_0 = x_1 v_2 - x_2 v_1.$$

Для поиска другого первого интеграла воспользуемся следующим соображением. В случае трех попарно различных полуосей независимый набор первых интегралов образуют F_1 и F_2, имеющие вид

$$F_1 = ((a_3 + a_2)v_1^2 + (a_1 + a_3)v_2^2 + (a_2 + a_1)v_3^2 - (v_2 x_3 - v_3 x_2)^2 - (v_3 x_1 - v_1 x_3)^2 - \\ -(v_2 x_1 - v_1 x_2)^2 + k((a_2 + a_3)x_1^2 + (a_1 + a_3)x_2^2 + (a_1 + a_2)x_3^2))$$

$$F_2 = (a_3 a_2 v_1^2 + a_1 a_3 v_2^2 + a_1 a_2 y_3^2 - a_1(v_2 x_3 - v_3 x_2)^2 - a_2(v_3 x_1 - v_1 x_3)^2 - \\ -a_3(v_2 x_1 - v_1 x_2)^2 + k(a_2 a_3 x_1^2 + a_1 a_3 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2)).$$

С учетом $a_1 = a_2$ имеем $2a_1 F_1 - F_2 = a_1^2 H + (a_3 - a_1)F_0^2$, в качестве другого интеграла возьмем

$$G = 2a_1 F_1 + F_2 - a_1^2 H + (a_3 + a_1)F_0^2 = 2a_1 a_3(v_1^2 + v_2^2 + k(x_1^2 + v_2^2)) + 2a_1^2(kx_3^2 + v_3^2) - \\ -2a_1((x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_3 y_2 - x_2 y_3)^2).$$

Вычислив косые градиенты H, F_0, G, несложно проверить, что точка $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ фазового пространства, т.е. точка начала координат на столе, оснащенная нулевым вектором скорости, является критической точкой ранга ноль. Значения всех трех интегралов в ней равны нулю. Теперь вычислим в ней оператор линеаризации A векторного поля $sgrad(F_0 + G)$. Его характеристический многочлен имеет вид

$$(16a_1^4 k + \lambda^2)(256 a_1^4 a_3^4 k^2 + 32 a_1^2 a_3^2 k(\lambda^2 - 1) + (1 + \lambda^2)^2).$$

Первый сомножитель имеет пару ненулевых корней $\lambda = \pm 4a_1^2\sqrt{-k}$, которые при $k < 0$ являются действительными (компонента “седло”), а при $k > 0$ — мнимыми (компонента “центр”). Второй сомножитель имеет четыре корня $\lambda = \pm_1 i \pm_2 4a_1 a_3$, не зависящие от знака k и отвечающие невырожденной фокусной компоненте.

Тем самым, доказана следующее утверждение: биллиарды в квадриках вращения с потенциалом Гука моделируют невырожденные локальные особенности, имеющие тип центр-фокус и седло-фокус.

Утверждение 1. *Система софокусного биллиарда с потенциалом Гука в области, граница которой не проходит через начало координат, содержит невырожденную особенность ранга ноль, имеющую тип центр-фокус при $k > 0$ и тип седло-фокус при $k < 0$.*

Теперь перейдем к изучению полулокального типа особенности, т.е. класса гомеоморфности слоения в инвариантной окрестности особого слоя. Рассмотрим стол $X_\pm$, ограниченный софокусным эллисоидом $\lambda = 0$ и гиперболоидом $a_1 < \lambda_h < a_3$ и содержащий начало координат. Для простоты вычислений примем $\lambda_h = (a_1 + a_3)/2$.

Вначале покажем, что во всех точках границы стола, лежащих на совместном уровне интегралов $(h, f_0, g) = (0,0,0)$, вектор скорости трансверсален к граничной поверхности (или обеим граничным поверхностям). Отсюда из результата В.Ф.Лазуткина [**?**] следует возможность ввести гладкую и симплектическую структуру на в окрестности особого слоя и далее изучать тип возникающей особенности классическими методами теории интегрируемых гамильтоновых систем.

Лемма 2.1. *Пусть $P \in \partial X_\pm$, и пара (P, v) принадлежит совместному уровню $H = F_0 = G = 0$. Тогда вектор v не равен нулю и трансверсален каждой из гладких двумерных компонент границы стола.*

Доказательство. 1. Рассмотрим точку, лежащую на гиперболоиде $\lambda_h = (a_1 + a_3)/2$ с условием $x_3 > 0$. На двуполостном гиперболоиде имеем $x_3 = \phi_3(x_1, x_2)$. Пусть вектор v касается его. Тогда координаты (P, v) имеют вид

$$\left(x_1, x_2, \pm\sqrt{\frac{(-a_3+\lambda_h)(x_1^2+x_2^2-(a_1-\lambda_h))}{a_1-\lambda_h}}, v_1, v_2, \pm v_1\frac{\partial x_3(x_1,x_2)}{\partial x_1} \pm v_2\frac{\partial x_3(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right).$$

Из условия $F_0(P, v) = 0$ имеем $v_1 = \beta x_1, v_2 = \beta x_2$ для $\beta \in \mathbb{R}$. Подставив данное условие в уравнение $H(P, v) = 0$, получим

$$-\frac{(a_1 - a_3 - 4(x_1^2+x_2^2))(a_1k - a_3k - 2(k+s^2)(x_1^2+x_2^2))}{2(a_1 - a_3 - 2(x_1^2+x_2^2))}.$$

Поскольку $a_1 < a_3$, то первая скобка числителя и знаменатель всегда отрицательны, в частности, отличны от нуля. Вторая скобка числителя обращается в ноль при $x_1^2 + x_2^2 = (a1 - a3)k/(2k + 2s^2)$. Подставив указанное значение вместе с выражениями для v_1, v_2 в уравнение $G(P, v) = 0$, получим $-a1(a1 - a3)^2k/2 = 0$, что не имеет решений при всех $k \neq 0$ и $s \in \mathbb{R}$.

2. Аналогично проверим случай касания эллисоида $\lambda = 0$. Поскольку фигура симметрична, примем $x_2 = 0$. Тогда $x_1 = \phi(x_2, x_3)$. Аналогично выразив v_1 через v_2, v_3, получим из условия $F_0(P, v) = 0$, что либо $v_2 = 0$, либо $x_3 = \pm\sqrt{a_3}$. Последний случай легко проверяется, но нам не интересен (конец оси симметрии не будет входит в изучаемый биллиардный стол). Подставив $v_2 = 0$ в уравнение $G(P, v) = 0$, получим $2a1^2a3k$, что при $k \neq 0$ отлично от нуля.

3. Также заметим, что из $x_3 = 0$ и $v_3 \neq 0$ имеем, что пара (P, v) не лежит на требуемом уровне интеграла: выразив $v_1 = sx_1, v_2 = sx_2$ из $F_(P, v) = 0$ и подставив в $H(P, v) = 0$, получим $x_1^2 + x_2^2 = -v_3^2/(k + s^2)$. Подставив это в $G(P, v) = 0$, получим $2a_1v_3^2(a_1 - a_3 + v_3^2/(k + s^2))$, т.е. при $v_3 \neq 0$ имеем не ноль. Аналогично заметим, что в точках оси $x_1 = x_2$ на данный уровень попадут лишь точки, где $y_1 = y_2 = 0$. Действтительно, при этом $F_0 = 0$, а $v_1^2 + v_2^2 = -kx3^2 - v3^2$ и $2a_1(a_1 - a_3 + x_3^2)(kx_3^2 + y_3^2)$. Первая скобка отлична от нуля, т.е. $v_1^2 + v_2^2 = 0$. Из данного рассуждения получаем, что на оси симметрии и в экваториальной плоскости на данный особый уровень попадут лишь точки, в которых вектор скорости оставляет частицу в данном множестве.

Особый слой компактен и ограничен в $T^*X_\pm$: сам стол $X_\pm$ компактен, и при фиксированных (x_1, x_2, x_3) множество допустимых векторов скорости пусто или принадлежит сфере, квадрат радиуса которой равен $h - k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

Отсюда для каждой пары точка-вектор со слоя, близкого к особому, имеется близкая пара точка-вектор с этого особого слоя. В частности, отсюда имеем трансверсальность (к границе) всех векторов скорости на близких слоях. Тем самым, верен результат Лазуткина о гамильтоновом сглаживании, и все бифуркации слоения в окрестности особого слоя связаны лишь с наличием критических точек набора первых интегралов (а не с отражением от границы или ее касанием).

На следующем шаге опишем критическое множество системы.

Лемма 2.2. *Критическое множество системы состоит из двух серий точек, с четырьмя и двумя параметрами*

$$(x_1, x_2, 0, v_1, v_2, 0), \qquad (0, 0, x_3, 0, 0, v_3).$$

Доказательство. 1. Пусть $\alpha dH + \beta dF_0 + \gamma dG = (0,0,0,0,0,0)$. Тогда равны нулю компоненты, отвечающие x_3 и v_3. Полученные уравнения на x_3, v_3 являются линейными однородными, т.е. имеют лишь нулевое решение. Отсюда, исключая случай $\beta = \gamma = 0$ (тогда $dF_0 = 0$ на множестве точек $(0,0,x_3,0,0,v_3)$), все критические точки принадлежат подпространству $x_3 = 0, v_3 = 0$.

2. Покажем, что все они являются критическими. Дифференциал линейной комбинации интегралов при этом имеет вид

$$(v_2\beta + 2kx_1(\alpha + 2a_1a_3\gamma), -v_1\beta + 2kx_2(\alpha + 2a_1a_3\gamma), 0,$$
$$-x_2\beta + 2v_1(\alpha + 2a_1a_3\gamma), x_1\beta + 2y_2(\alpha + 2a_1a_3\gamma), 0)$$

При $\beta = 0, \alpha = -a_1a_3\gamma$ все компоненты тождественно равны нулю, т.е. все такие точки являются критическими.

3. Все они, кроме точки $(0,0,0,0,0,0)$, имеют ранг 2: dH и dG на всем этом множестве линейно зависимы, а условие $dF_0 + \gamma dG = 0$ задает однородную систему линейных уравнений на x_1, x_2, y_1, y_2, ранг матрицы которой при всех $\gamma \in \mathbb{R}$ максимален. Т.е. всюду в это плоскости, исключая точку $(0,0,0,0,0,0)$, линейно независимы dF_0 и dG.

На основе утверждения и двух лемм сформулируем следующую теорему о моделировании биллиардами полулокальных особенностей смешанных серий.

Теорема 1. *Системы софокусного биллиарда с потенциалом Гука в области $X_\pm$ моделируют невырожденные полулокальные особенности ранга 0 сложности 1 типа центр-фокус в случае притягивающего потенциала $k > 0$ и седло-фокус (типа прямого произведения $B \times F_1$) в случае отталкивающего $k < 0$.*

С точностью до послойного гомеоморфизма, существует ровно одна особенность сложности 1, имеющая типа центр-фокус и две такие особенности типа седло-фокус. Последний факт был показан Л.М.Лерманом [5]. Две эти особенности имеют вид $B \times F_1$ и $(B \times F_2)/\mathbb{Z}/2$, где F_k — фокальная особенность сложности k (т.е. имеющая k точек ранга 0), а группа $\mathbb{Z}_2$ действует на 2-атоме B и особенности F_2 как центральная симметрия.

Доказательство. Для доказательства теоремы остается показать два факта: выполнение условия нерасщепляемости и вид прямого произведения получаемой особенности.

Первое следует из устройства критического множества вблизи точки ранга 0: оно состоит из двух подмножеств размерности 2 и 4, которые пересекаются ровно по точке ранга 0. Образ первой компоненты образует кривую $(h, 0, 2a_1^2 h)$, а образ второй — двумерную поверхность $(h, f_0, 2a_1a_3h)$, т.е. компоненты разных типов (отвечающие занулению разных координат) не могут "смешиваться".

Второй факт несложно получить, определив количество некомпактных орбит ранга 3, лежащих на особом слое, содержащем точку ранга 0. В представлении почти прямого произведения они получаются как произведения сепартрисы 2-атома (гомеоморфной интервалу) на двумерную орбиту фокусной особенности (гомеоморфную цилиндру). После факторизации по действию группы получаем произведение некомпактной орбиты ранга 1 седловой компоненты B произведении $(B \times F_2)/\mathbb{Z}_2$. Теорема доказана.

2.2. Моделирование особенностей седло-фокус биллиардными книжками. Рассмотрим биллиардную область X, получаемую как половину области $X_\pm$, лежащую не ниже плоскости $x_3 = 0$. Рассмотрим биллиардные книжки, склеиваемые из нескольких экземпляров такой области X по их двумерным граням, имеющим один из трех типов. Один из них отвечает плоскости $x_3 = 0$, второй — эллипсоиду $\lambda = 0$, а третий — гиперболоидам $\lambda = (a_1 + a_3)/2$. В отличие от случая $a_1 < a_2 < a_3$, через каждую точку пространства (исключая фокальные кривые) проходит не три софокусные квадрики разных типов, а две — эллипсоид и двуполостный гиперболоид. Отвечающие им координаты λ_1 и λ_2 можно дополнить угловой координатой $\varphi : \tan\varphi = x_2/x_1$. На прямой $x_1 = x_2 = 0$ координаты вырождаются, в точках плоскости $x_3 = 0$, где $x_1^2 + x_2^2 > 0$, координаты задаются парой чисел (λ_1, a_1) и по-прежнему задают гомеоморфизм.

Склеиваемые из области X книжки обладают S^1-симметрией, получаемой поднятием таковой из $X \subset \mathbb{R}^3$. Иными словами, существенных вершин (0-мерных клеток) они не содержат, т.е. корректность закона отражения следует из корректности для двумерных книжек. В нормальном расслоении к 1-клетке (пересечению двух граней границы — 2-клеток) имеем локальную двумерную книжку (задаваемую парой перестановок на двух перпендикулярных друг другу кривых), а проекция вектора скорости на касательное пространство к 1-клетке сохраняется.

Теорема 2. *Слоение Лиувилля биллиарда с отталкивающим потенциалом Гука на биллиардной книжке, склеенной из $2n$ экземпляров области X по перестановкам $\tau = (1, n+1)\dots(n, 2n), \rho, \sigma$ для двумерных граней, отвечающих соответственно плоскости $x_3 = 0$, эллипсоиду $\lambda = 0$ и гиперболоиду $\lambda = (a_1 + a_3)/2$ и коммутирующих $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau, \rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, моделирует полулокальную особенность типа седло-фокус.*

Доказательство теоремы следует из того, что проекция малой окрестности каждой точки особого слоя на фазовое пространство биллиарда в области $X_\pm$ переводит слоение в слоение, а траекторию в траекторию, либо сразу, либо (в точках $x_3 = 0$) после предварительного отражения областей с номерами $n+1, \dots, 2n$ относительно плоскости $x_3 = 0$. В окрестности точек, лежащих на 1-клетках книжки это следует из коммутирования перестановок (отметим, что книжка не имеет существенных 0-мерных клеток в силу 1-симметрии стола). Отсюда получаем выполнение результата Лазуткина о наличии гладкой и симплектической структуры. Свойство нерасщепляемости особенности также остается верным, а критические или некомпактные орбиты на особом слое и в его окрестности получаются склейкой из таковых для биллиарда в области X_{pm} в половинах (отвечающих $x_3 > 0$ или $x_3 < 0$) последних. Сложность получаемой особенности, при условии транзитивности действия группы, порожденной перестановками τ, ρ, σ, равна n.

Тем самым, для особенностей фокус-седло возникает новое представление в пары коммутирующих перестановок, действующих на четном числе элементов. Одна из них также коммутирует с перестановкой, составленной из n независимых транспозиций. Было бы интересно проверить, каждая ли особенность седло-фокус реализуется при этом, и установить связь между представлением типа почти прямого произведения (его минимальными моделями) и наборами перестановок.

Классификация пары перестановок, коммутирующих друг с другом и действующих транзитивно на множестве из N элементов, была ранее получена В.А.Кибкало [**?**]. При этом независимые циклы перестановки σ_1, σ_2 имеют одинаковые длины s_1, s_2. Для однозначного задания пары перестановок остается указать величину сдвига на пересечении двух циклов разных перестановок. Данный результат требуется дополнить: наложить дополнительные условия, чтобы ρ мог коммутировать с набором независимых транспозиций τ, а также рассмотреть случай, когда несколько орбит пары перестановок ρ и σ "сшиваются" перестановкой τ.

Класс невырожденных особенностей ранга 0 в интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы был выделен в работах [**?**, **?**]. Невырожденной точкой ранг

f-графа, введенного А.А.Ошемковым ранее в работе [**?**] для 2-атомов — невырожденных особенностей гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Такие особенности, напомним, содержат одну или несколько критических точек, которые невырождены по Морсу и имеют гиперболический тип.

В работе А.А.Ошемкова [**?**] был введен новый инвариант невырожденной полулокальной седловой (гиперболической) особенности, названный f_n-графом этой особенности. Этот инвариант обобщает понятие f-графа на случай интегрируемых систем с произвольным количеством степеней свободы.

Рассмотрим биллиард на столе, ограниченном эллипсом. При добавлении потенциала Гука (отталкивающего или притягивающего) его начало координат

В работе [**?**] было отмечено, что слоение Лиувилля биллиарда с потенциалом Гука на кусочно-плоском столе $2A_2$ (склеенном из двух одинаковых плоских столов, ограниченных эллипсом) лиувиллево эквивалентно слоению геодезического потока на эллипсоиде с таким же потенциалом.

Список литературы

[1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Издат. дом “Удмурт. ун-т”, Ижевск, 1999.

[2] L.H. Eliasson, Normal form for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals - elliptic case, Comm. Math. Helv. 65 (1990), 4-35.

[3] J.Vey, Sur Certains Systemes Dynamiques Separables, Amer. J. Math., v.100 No.3 (1978), 591-614.

[4] Nguyen Tien Zung, Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities, Compositio Math. 101 (1996), 179-215

[5] L.M. Lerman, Isoenergetical Structure of Integrable Hamiltonian Systems in an Extended Neighborhood of a Simple Singular Point: Three Degrees of Freedom, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 2000, vol. 200, pp. 219–242.

[6] И. К. Козлов, А. А. Ошемков, Классификация особенностей типа седло-фокус, Чебышевский сб., 2020, 21:2, 228–243

В. А. Кибкало (V. A. Kibkalo)
Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Поступила в редакцию
15.05.2024