УДК 514.774.8

Г. В. Белозеров, А. Т. Фоменко

Обобщенная теорема Якоби-Шаля в неевклидовых пространствах

Классическая теорема Якоби-Шаля утверждает, что касательные линии, проведенные к каждой точке геодезической на n-осном эллипсоиде в евклидовом n-мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще $n-2$ софокусных с ним квадрик, общих для всех точек этой геодезической. Эта теорема обеспечивает интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде. Недавние результаты Г. В. Белозерова и В. А. Кибкало показывают, что аналогичная теорема справедлива для произвольного пересечения софокусных квадрик в евклидовом пространстве. В настоящей работе показано, что геодезический поток на пересечении нескольких софокусных квадрик в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$, а также в пространствах постоянной кривизны является интегрируемым. В качестве следствия доказан аналогичный результат для софокусных биллиардов на таких пересечениях. При этом, показано, что в случае размерности два последний результат нельзя распространить на поверхности, локально неизометричные пространствам постоянной кривизны.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: геодезический поток, интегрируемая система, софокусные квадрики, эллиптические координаты, теорема Якоби–Шаля.

§ 1. Введение

Согласно классической теореме Якоби-Шаля геодезический поток на n-осном эллипсоиде в евклидовом n-мерном пространстве является интегрируемым. Более того, касательные прямые, проведенные в каждой точке геодезической на эллипсоиде, одновременно касаются $n-2$ квадрик, софокусных с эллипсоидом и общих для всех точек этой геодезической (см. [1]-[3]). Современное доказательство теоремы Якоби-Шаля можно найти в работе [4].

Напомним, что *семейством софокусных квадрик в евклидовом n-мерном пространстве* $\mathbb{R}^n$ называется множество квадрик, заданных уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\dots+\frac{x_n^2}{a_n-\lambda}=1, \tag{1.1}$$

где $a_1<\dots<a_n$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр.

Не так давно В. А. Кибкало исследовал вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Он показал, что если размерность пересечения равна двум, то такая система будет интегрируемой. Как оказалось, верен более общий факт.

Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-10106.

Теорема 1 (Белозеров, [5]). *Пусть $Q_1, \dots, Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^n$ различных типов и $Q = \bigcap_{i=1}^{k} Q_i$. Тогда*

1. *геодезический поток на Q квадратично интегрируем;*
2. *касательные линии, проведенные во всех точках геодезической на Q, касаются помимо $Q_1, \dots, Q_k$ еще $n-k-1$ софокусных с ними квадрик, общих для всех точек данной геодезической.*

Замечание 1. Отметим, что этот факт нетривиален, то есть не следует из классической теоремы Якоби–Шаля. Действительно, геодезическая на пересечении нескольких софокусных квадрик $Q_1, \dots, Q_k$, вообще говоря, не является геодезической ни на одной из квадрик Q_i. В качестве примера рассмотрим предел семейства софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$ при $a_2, a_3 \to a_1$ (сначала устремляем a_2, а затем a_3). Нетрудно показать, что эллиптические координаты в пределе перейдут в сферические. Следовательно, софокусные квадрики перейдут в поверхности уровня сферических координат: шары, конусы и полуплоскости. Однако пересечением конуса и сферы с общим центром являются две окружности (см. рис. 1), которые не являются геодезическими ни на сфере, ни на конусе.

Замечание 2. Отметим, что теорема 1 становится содержательной, начиная с $n = 4$. Для плоскости эффект еще не виден. В $\mathbb{R}^3$ при $k = 1$ получается классическая теорема Якоби-Шаля, а при $k = 2$ эффект снова не наблюдаются так как пересечение двух софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$ одномерно.

Рис. 1. Сфера и конус с общим центром пересекаются по кривым, которые не являются геодезическими ни на сфере, ни на конусе.

Доказательство теоремы 1 подробно изложено в работе [6].

Замечание 3. Пересечение нескольких софокусных квадрик в $\mathbb{R}^n$ диффеоморфно прямому произведению вида $\mathbb{R}^{k_0} \times S^{k_1} \times \dots \times S^{k_m}$ (здесь S^{k_i} — сфера размерности k_i). При этом, числа $m, k_0, \dots, k_m$ определяются следующим образом. Обозначим через $i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m$ номера эллиптических координат, зафиксированных на пересечении софокусных квадрик, и положим $i_0 = 0$, $i_{m+1} = n+1$

тогда $k_j = i_{j+1} - i_j - 1$ для всех $j = 0, \ldots, m$. Доказательство этого факта также изложено в работе [6].

Настоящая работа посвящена нахождению аналогов обобщенной теоремы Якоби-Шаля в неевклидовых пространствах, а именно, в пространствах Минковского $\mathbb{R}^{p,q}$ и в пространствах постоянной секционной кривизны по двумерным направлениям: сферы, пространства Лобачевского, проективные пространства.

Аналог классической теоремы Якоби-Шаля (об интегрируемости геодезического потока на эллипсоиде в $\mathbb{R}^{p,q}$) был доказан Б. Хесиным и С. Табачниковым в работе [7]. Из этой теоремы, в частности, следует, что геодезический поток на эллипсоиде в $\mathbb{R}^{p,q}$, а также классический биллиард внутри этого эллипсоида являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. Слоение Лиувилля геодезического потока на эллипсоиде в $\mathbb{R}^{2,1}$, а также биллиарда внутри эллипса на плоскости Минковского изучалось в работе [8] В. Драговича и М. Раднович. Е. Е. Каргинова в работах [9], [10] изучила топологию слоения Лиувилля биллиардов на плоскости Минковского, ограниченных софокусными квадриками. Отметим также работу [11] В. Драговича и М. Раднович, в которой они исследовали устройство эллиптических координат в $\mathbb{R}^{p,q}$ и периодические траектории псевдоевклидовых биллиардов, ограниченных софокусными квадриками.

Как оказалось, обобщенная теорема Якоби-Шаля верна для пространств $\mathbb{R}^{p,q}$. Ее доказательству посвящен третий параграф. Однако перед ним, во втором параграфе, мы изучим устройство семейства софокусных квадрик в $\mathbb{R}^{p,q}$ и докажем несколько его важных свойств.

Зачастую оказывается так, что если некоторое утверждение справедливо в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах, то непременно существует аналог этого факта для пространств постоянной кривизны. Основываясь на этом соображении, А. Т. Фоменко предположил, что обобщенная теорема Якоби-Шаля должна выполняться на сферах S^n, проективных пространствах $\mathbb{R}P^n$, пространствах Лобачевского L^n произвольной размерности (со стандартными римановыми метриками) и, возможно, для фактор-пространств S^n и L^n по дискретным подгруппам групп изометрий. В четвертом параграфе мы покажем, что эта гипотеза верна для S^n, L^n и $\mathbb{R}P^n$. Как оказалось, этот факт является следствием обобщенной теоремы Якоби-Шаля для евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Далее, в параграфе пять, основываясь на доказанных аналогах обобщенной теоремы Якоби-Шаля, мы покажем, что биллиарды, "живущие" на пересечениях софокусных квадрик и ограниченные конечным числом других софокусных квадрик, тоже являются интегрируемыми. Отметим, что интегрируемость биллиарда на сфере в области, ограниченной конусом с тем же центром, что и сфера, была показана в книге [12] В. В. Козлова и Д. В. Трещева. Аналогичный результат для пространств Лобачевского был получен С. В. Болотиным в работе [13].

Помимо этого в пятом параграфе, мы докажем, что в случае размерности 2 многообразие, на котором любой малый круговой геодезический биллиард квадратично интегрируем, локально изометрично либо двумерной сфере, либо плоскости Лобачевского, либо евклидовой плоскости, т.е. пространствам постоянной кривизны (положительной, отрицательной, нулевой). Это наталкивает на мысль о том, что обобщенная теорема Якоби-Шаля может быть справедлива только в случае пространств постоянной секционной кривизны по двумерным направлениям.

Благодарности. Авторы благодарят В. Н. Завьялова за внимание к работе.

§ 2. Софокусные квадрики и эллиптические координаты в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{p,q}$

Напомним, что *пространством Минковского* $\mathbb{R}^{p,q}(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$ называется вещественное векторное пространство размерности $n = p + q$ с координатами $(x_1, \dots, x_n)$, наделенное псевдоскалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которое в этих координатах вычисляется по формуле:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{p} v_i w_i - \sum_{i=p+1}^{n} v_i w_i \quad \forall v = (v_1, \dots, v_n),\ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{p,q}.$$

Далее, координаты $(x_1, \dots, x_n)$ мы будем называть *декартовыми*.

Поскольку псевдоскалярное произведение, вообще говоря, не является положительно определенным, все векторы в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ принято делить на три класса: *времениподобные*, *пространственноподобные*, *изотропные*. Напомним, что вектор $v \in \mathbb{R}^{p,q}$ называется пространственноподобным, если $\langle v, v \rangle > 0$, времениподобным, если $\langle v, v \rangle < 0$, изотропным, если $\langle v, v \rangle = 0$.

Определение 1. *Семейством софокусных квадрик в пространстве Минковского* $\mathbb{R}^{p,q}(x_1, \dots, x_n)$ мы будем называть множество квадрик, заданных уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_p^2}{a_p - \lambda} + \frac{x_{p+1}^2}{b_1 + \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{b_q + \lambda} = 1, \tag{2.1}$$

где $0 < a_1 < \dots < a_p$, $0 < b_1 < \dots < b_q$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр.

Замечание 4. Отметим, что если $\lambda = a_i$ или $\lambda = -b_j$ для некоторого i или j, то квадрика, соответствующая этому параметру, не определена. Для того чтобы ее определить, необходимо сначала умножить уравнение 2.1 на произведение $\prod_i (a - \lambda_j) \prod_j (b + \lambda_j)$, а уже затем в полученное выражение подставить значение $\lambda = a_i$. Нетрудно убедиться, что квадрикой, соответствующей параметру a_i, является гиперплоскость $x_i = 0$.

Докажем несколько важных свойств софокусных квадрик в $\mathbb{R}^{p,q}$.

Предложение 1. *1) Через каждую точку пространства Минковского* $\mathbb{R}^{p,q}$ *проходит либо* n, *либо* $n-2$ *софокусные квадрики с учетом кратности. Параметры по крайней мере* $n-2$ *квадрик лежат на отрезках* $[a_i, a_{i+1}]$, $[-b_{j+1}, -b_j]$, *где* $i = 1, \dots, p-1$, $j = 1, \dots, q-1$.

2) Если через точку пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ *проходит квадрика параметра*

- $\lambda \in (-\infty, -b_q)$,
- $\lambda \in (-b_1, a_1)$,
- $\lambda \in (a_p, +\infty)$,

то через нее проходит еще одна квадрика (с учетом кратности), параметр которой принадлежит тому же интервалу.

Доказательство. Начнем с первого пункта. Докажем его в случае общего положения, предполагая, что все координаты точки $P = (x_1, \ldots, x_n)$ отличны от нуля. Рассмотрим функцию

$$f_P(\lambda) = \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \cdots + \frac{x_p^2}{a_p - \lambda} + \frac{x_{p+1}^2}{b_1 + \lambda} + \cdots + \frac{x_{p+q}^2}{b_q + \lambda}.$$

График этой функции для точки пространства $\mathbb{R}^{4,4}$ изображен на рисунке 2.

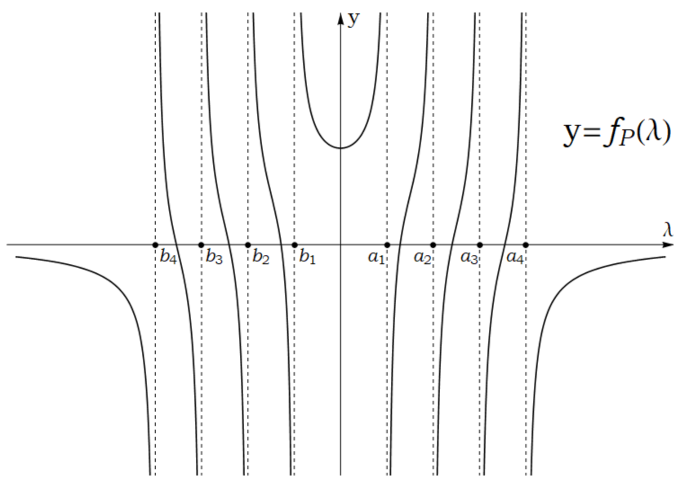

Рис. 2. График функции $f_P(\lambda)$ для точки пространства $\mathbb{R}^{4,4}$.

Заметим, что правый предел этой функции в точках a_i равен $-\infty$, в то время как левый предел равен $+\infty$. Следовательно, по теореме о промежуточном значении непрерывной функции на каждом из интервалов (a_i, a_{i+1}), где $i = 1, \ldots, p-1$, функция $f_P(\lambda)$ принимает хотя бы один раз значение 1. Аналогично, на каждом из интервалов $(-b_{i+1}, -b_i)$, где $i = 1, \ldots, q-1$, функция $f_P(\lambda)$ принимает хотя бы один раз значение 1.

Следовательно, функция $f_P(\lambda)$ принимает значение 1 по крайней мере в $n-2$ точках. Это равносильно тому, что через точку P проходит по крайней мере $n-2$ софокусные квадрики. Остается, заметить, что функция $\prod_{i=1}^{p}(a_i - \lambda)\prod_{j=1}^{q}(b_j+\lambda)(f_P(\lambda)-1)$ является многочленом степени n. А значит, уравнение $f_P(\lambda) = 1$ имеет не более n вещественных корней с учетом кратности. Таким образом, первый пункт нами полностью доказан.

Теперь перейдем ко второму пункту. Предположим, что через точку P проходит квадрика параметра $\lambda_0 \in (-b_1, a_1)$. В случае общего положения должно найтись такое $\lambda' \in (-b_1, a_1)$, что $f_P(\lambda') < 1$. Без ограничения общности можем считать, что $\lambda' > \lambda_0$. Поскольку при стремлении к концам интервала

$(-b_1, a_1)$ функция $f_P(\lambda)$ уходит на $+\infty$, по теореме о промежуточном значении непрерывной функции существует $\lambda'' \in (-\lambda', a_1)$, такое, что $f_P(\lambda'') = 1$. Аналогичным образом разбираются оставшиеся случаи. Предложение доказано.

Это предложение побуждает выделить среди других софокусные квадрики, параметры которых лежат на интервалах $(-\infty, -b_q)$, $(-b_1, a_1)$, $(a_p, +\infty)$.

Определение 2. Квадрику семейства 2.1 параметра $\lambda \in (-\infty, -b_q) \cup (-b_1, a_1) \cup (a_p, +\infty)$ будем называть *уникальной*.

Предложение 2. *Касательные плоскости, проведенные в точке пересечение двух софокусных квадрик в $\mathbb{R}^{p,q}$ ортогональны (в смысле $\mathbb{R}^{p,q}$).*

Доказательство. Предположим, что софокусные квадрики параметров λ_1 и λ_2 пересекаются в точке $P = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда справедлива следующая система.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1 - \lambda_1} + \cdots + \dfrac{x_p^2}{a_p - \lambda_1} + \dfrac{x_{p+1}^2}{b_1 + \lambda_1} + \cdots + \dfrac{x_{p+q}^2}{b_q + \lambda_1} = 1 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1 - \lambda_2} + \cdots + \dfrac{x_p^2}{a_p - \lambda_2} + \dfrac{x_{p+1}^2}{b_1 + \lambda_2} + \cdots + \dfrac{x_{p+q}^2}{b_q + \lambda_2} = 1 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, а затем разделим полученное равенство на $\lambda_1 - \lambda_2$.

$$\frac{x_1^2}{(a_1 - \lambda_1)(a - \lambda_2)} + \cdots - \frac{x_{p+q}^2}{(b_q + \lambda_1)(b_q + \lambda_2)} = 0 \tag{2.2}$$

Полученное уравнение эквивалентно тому, что векторы нормалей к квадрикам параметров λ_1 и λ_2 ортогональны в точке P. Предложение доказано.

Обозначим через A и B упорядоченные наборы коэффициентов $(a_1, \ldots, a_p)$ и $(b_1, \ldots, b_q)$ соответственно. Подмножество $\mathbb{R}^{p,q}$, через каждую точку которого проходит в точности n софокусных квадрик с учетом кратности, обозначим через $D(A, B)$.

Замечание 5. Согласно предложению 1 через любую точку, лежащую на эллипсоиде семейства 2.1, проходит в точности n софокусных квадрик (с учетом кратности). Следовательно, множество $D(A, B)$ не пусто.

Для любой точки $P \in D(A, B)$ через $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ обозначим параметры софокусных квадрик, проходящих через нее.

Определение 3. Функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, определенные на множестве $D(A, B)$ будем называть *эллиптическими координатами в пространстве Минковского* $\mathbb{R}^{p,q}$.

Отметим, что эллиптические координаты можно ввести в любой точке $\mathbb{R}^{p,q}$ как набор решений уравнения 2.1, однако согласно предложению 1 это уравнение может иметь $n-2$ вещественных корня $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-2}$ и 2 комплексно-сопряженных корня λ_{n-1}, λ_n. В таком случае набор функций λ_i мы будем называть *псевдоэллиптическими координатами*, которые ввиду комплексно-значности λ_{n-1} и λ_n не являются координатами в $\mathbb{R}^{p,q}$. Однако поскольку λ_{n-1} и λ_n являются комплексно-сопряженными, мы можем заменить их на

$z_{n-1} = \lambda_1 + \lambda_2$ и $z_n = i(\lambda_1 - \lambda_2)$ соответственно. После такой замены набор функций $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ будет являться гладкой регулярной системой координат (почти всюду).

Определение 4. *Обобщенными эллиптическими координатами* будем называть как эллиптические координаты в $D(A,B)$, так и псевдоэллиптические координаты в оставшейся части пространства $\mathbb{R}^{p,q}$.

Для удобной работы введем единообразные обозначения. Обозначим числа $-b_1, \ldots, -b_q$ через $a_{p+1}, \ldots, a_n$ соответственно. В таком случае семейство софокусных квадрик будет задаваться формулой:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} - \sum_{i=p+1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1.$$

Положим

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 1, \ldots, p, \\ -1, & \text{если } i = p+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Следующее предложение устанавливает связь между декартовыми координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ и обобщенными эллиптическими $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Предложение 3. *Декартовы координаты* $(x_1, \ldots, x_n)$ *и обобщенные эллиптические* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *связаны следующим набором соотношений:*

$$x_i^2 = s_i \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_i - \lambda_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (a_i - a_j)}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Сделаем замену $\tilde{x}_j = i x_j$ (здесь i — мнимая единица) при $j = p+1, \ldots, n$. После такого преобразования уравнение семейства софокусных квадрик в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{p,q}(x_1, \ldots, x_n)$ перейдет в уравнение семейства софокусных квадрик в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n(x_1, \ldots, x_p, \tilde{x}_{p+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$.

Остается применить формулы связи эллиптических координат с декартовыми в евклидовом пространстве (см, например [2], [6]) и сделать обратную замену. Предложение доказано.

Замечание 6. Явные формулы связи эллиптических координат с декартовыми были найдены К. Г. Якоби в работе [2].

Далее мы будем активно использовать эллиптические координаты. В связи с этим введем ряд обозначений, упрощающих работу с формулами.

$$\Delta_k = \prod_{j=1}^{n} (a_k - \lambda_j) \qquad \rho_k = \prod_{j \neq k} (a_k - a_j)$$

Через $\sigma^m_{i_1,\ldots,i_k}(a_1, \ldots, a_n)$ мы будем обозначать элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $\{a_1, \ldots, a_n\} \backslash \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, полагая, что при $m = 0$ он тождественно равен единице, а при $m = -1$ — нулю.

Заметим, что в этих обозначениях предложение 2 можно переписать следующим образом.

Предложение 4. *При всех* $i, j = 1, \ldots, n$ *и* $i \neq j$ *выполнено следующее равенство.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{\rho_k(a_k - \lambda_i)(a_k - \lambda_j)} = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Сначала заметим, что формулы связи 2.3 эллиптических координат с декартовыми в $\mathbb{R}^{p,q}$ можно переписать так.

$$x_i^2 = s_i \frac{\Delta_i}{\rho_i} \tag{2.5}$$

Остается заметить, что при всех $i \neq j$ справедлива формула 2.2, которая с учетом равенств 2.5 переписывается в требуемом виде. Предложение доказано.

В следующем параграфе, используя полученные сведения о софокусных квадриках и эллиптических координатах в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{p,q}$, мы сформулируем и докажем аналог обобщенной теоремы Якоби-Шаля.

§ 3. Обобщенная теорема Якоби-Шаля в псевдоевклидовых пространствах

Ниже мы будем рассматривать геодезические потоки на подмногообразиях в $\mathbb{R}^{p,q}$. Поскольку при движении по геодезической сохраняется длина ее вектора скорости, разделим все геодезические линии в соответствии с длиной их вектора скорости на три класса: *временеподобные*, *пространственноподобные* и *изотропные*.

Теорема 2 (Белозеров, Фоменко). *Пусть* $Q_1, \ldots, Q_k$ *— невырожденные различные софокусные квадрики в* $\mathbb{R}^{p,q}$ *и* $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i \neq \varnothing$. *Тогда*

1. *геодезический поток на* Q *квадратично интегрируем;*
2. *касательные линии, проведенные во всех точках временеподобной или пространственноподобной геодезической на* Q*, касаются помимо* $Q_1, \ldots, Q_k$ *еще* $n-k-1$ *или* $n-k-3$ *софокусных с ними квадрик, общих для всех точек данной геодезической.*

Доказательство. Доказательство проведем в несколько этапов. Сначала мы рассмотрим вспомогательную задачу. А именно, изучив движение материальной точки в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ по инерции, найдем параметры софокусных квадрик семейства 2.1, которых касается прямая-траектория материальной точки. Как мы увидим, эти параметры будут являться корнями многочлена, коэффициенты которого суть функции, определенные на $T\mathbb{R}^{p,q}$. На следующем шаге, переходя к эллиптическим координатам, мы изучим свойства этих функций и докажем формулу разделяющихся переменных. И уже на основе полученных свойств и формул докажем утверждения сей теоремы.

Шаг 1. Рассмотрим прямую в $\mathbb{R}^{p,q}$, проходящую через точку $P = (x_1, \ldots, x_n)$ в направлении вектора скорости $v = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$. Отметим, что любая прямая является траекторией материальной точки, движущейся по инерции в $\mathbb{R}^{p,q}$. Чтобы найти точки пересечения этой прямой с квадрикой параметра μ, нужно решить следующее квадратное (относительно параметра τ) уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \frac{(x_i + \tau \dot{x}_i)^2}{a_i - \mu} = 1.$$

При этом, прямая касается квадрики в том и только в том случае, когда дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю. Последнее условие можно переписать следующим образом.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \frac{x_i \dot{x}_i}{a_i - \mu}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \frac{\dot{x}_i^2}{a_i - \mu}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i \frac{x_i^2}{a_i - \mu} - 1\right) \tag{3.1}$$

Следовательно, чтобы найти квадрики, которых касается прямая-траектория материальной точки, нужно решить уравнение 3.1 относительно μ.

Преобразуем это уравнение: раскроем скобки в обеих частях равенства, перенесем все слагаемые в левую часть и выделим полные квадраты.

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \frac{\dot{x}_i^2}{a_i - \mu} - \sum_{i<j} \frac{s_i s_j K_{i,j}^2}{(a_i - \mu)(a_j - \mu)} = 0$$

Здесь $K_{i,j} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i$. Домножим обе части этого уравнения на $\prod_i (a_i - \mu)$.

$$\sum_{k=1}^{n} s_i \prod_{m \neq k} (a_m - \mu)\, \dot{x}_k^2 - \sum_{i<j} s_i s_j \prod_{m \neq i,j} (a_m - \mu)\, K_{i,j}^2 = 0 \tag{3.2}$$

Полученное уравнение будем называть *уравнением касания*, а многочлен слева — *многочленом касания*. Многочлен касания будем обозначать через $W(\mu)$. Его степень в случае общего положения равна $n - 1$. Обозначим через F_m коэффициент $W(\mu)$ при $2 \cdot (-1)^{n-1-m} \mu^{n-m-1}$. Получим следующие равенства.

$$F_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} s_i \sigma_k^m (a_1, \ldots, a_n)\, \dot{x}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i<j} s_i s_j \sigma_{i,j}^{m-1} (a_1, \ldots, a_n)\, K_{i,j}^2 \tag{3.3}$$

Замечание 7. Заметим, что все функции F_m являются гладкими в $T\mathbb{R}^{p,q}$. При этом, функция F_0 равна кинетической энергии материальной точки в $\mathbb{R}^{p,q}$.

Далее мы изучим свойства коэффициентов многочлена касания. К сожалению, их довольно сложно разглядеть в декартовой системе координат. Однако поскольку $W(\mu)$ возник при изучении касания софокусных квадрик, весьма разумно найти явный вид этого многочлена в обобщенных эллиптических координатах.

Заменим $x_{p+1}, \ldots, x_n$ на $i\tilde{x}_{p+1}, \ldots, i\tilde{x}_n$ (здесь i — мнимая единица). После такой замены полином $W(\mu)$ преобразуется в многочлен касания семейства софокусных квадрик в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n(x_1, \ldots, x_p, \tilde{x}_{p+1}, \ldots, \tilde{x}_n)$.

Поэтому согласно выводу аналогичных формул в работе [6] функции F_m перепишутся в следующем виде.

$$F_m = \frac{1}{8}\sum_{p=1}^{n} \sigma_p^m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) A_p \dot{\lambda}_p^2,$$

где

$$A_p = \frac{(\lambda_1 - \lambda_p)\ldots(\lambda_{p-1} - \lambda_p)(\lambda_{p+1} - \lambda_p)\ldots(\lambda_n - \lambda_p)}{(a_1 - \lambda_p)\,(a_2 - \lambda_p)\ldots(a_{n-1} - \lambda_p)(a_n - \lambda_p)}$$

Отметим, что в обобщенных эллиптических координатах функции F_m записываются в более простом виде. Поскольку исследование свойств этих функций мы будем проводить с точки зрения гамильтоновой механики, перейдем к координатно-импульсному представлению.

Мы уже заметили, что функция F_0 равна кинетической энергии материальной точки (см. 7). Положим $\hat{A}_p = A_p^{-1}$. Согласно определению обобщенных импульсов

$$p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_i} = \frac{1}{4} A_i \dot{\lambda}_i,$$

откуда $\dot{\lambda}_i = 4\hat{A}_i p_i$. Следовательно,

$$F_m = 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \hat{A}_i p_i^2. \tag{3.4}$$

Шаг 2. Как было показано выше, функции F_i являются гладкими на фазовом пространстве рассматриваемой системы. Определим на кокасательном расслоении к $\mathbb{R}^{p,q}$ в координатах $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, p_1, \ldots, p_n)$ n скобок Пуассона следующей формулой.

$$\{f, g\}_i = \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial \lambda_i} \quad \forall i = 1, \ldots, n,\ \ \forall f, g \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^{p,q})$$

Определение 5. Скобку $\{\cdot,\cdot\}_i$ будем называть *i-й частной скобкой Пуассона.*

Замечание 8. Заметим, что каноническая скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ на $T^*\mathbb{R}^{p,q}$ есть сумма всех частных скобок, т.е.

$$\{\cdot,\cdot\} = \sum_{i=1}^{n} \{\cdot,\cdot\}_i.$$

Как и в случае евклидового пространства, имеет место следующее важное предложение.

Предложение 5. *Функции F_i коммутируют относительно всех частных скобок Пуассона.*

Доказательство предложения 5. Вычислим производные функций F_i, F_j, фигурирующие в их k-ой частной скобке Пуассона. Для краткости мы не будем указывать переменные в элементарных симметрических многочленах, т. е.

будем писать σ вместо $\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k} = 2\sum_{m\neq k} \sigma^i_{m,k} \hat{A}_m p_m^2 + 2\sum_{m=1}^{n} \sigma^i_m \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} p_m^2 =$$

$$= 2\sigma^i_k \frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \lambda_k} p_k^2 + 2\sum_{m\neq k}\left(\sigma^{i-1}_{m,k}\hat{A}_m + \sigma^i_m \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k}\right) p_m^2$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_k} = 4\sigma^i_k \hat{A}_k p_k$$

Следовательно выражение $\dfrac{\partial F_i}{\partial \lambda_k}\dfrac{\partial F_j}{\partial p_k} - \dfrac{\partial F_j}{\partial \lambda_k}\dfrac{\partial F_i}{\partial p_k}$ равно

$$8\hat{A}_k p_k \cdot \sum_{m\neq k}\left(\left(\sigma^j_k \sigma^{i-1}_{m,k} - \sigma^i_k \sigma^{j-1}_{m,k}\right)\hat{A}_m + \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right)\frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k}\right) p_m^2.$$

Покажем, что при всех m выполнено равенство

$$\left(\sigma^j_k \sigma^{i-1}_{m,k} - \sigma^i_k \sigma^{j-1}_{m,k}\right)\hat{A}_m + \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right)\frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} = 0.$$

Для этого заметим два легко проверяемых тождества.

$$\lambda_m \sigma^{i-1}_{m,k} + \sigma^i_{m,k} = \sigma^i_k$$
$$\lambda_k \sigma^{i-1}_{m,k} + \sigma^i_{m,k} = \sigma^i_m$$

Вычтем из первого равенства второе и разделим получившееся тождество на $\lambda_m - \lambda_k$. Получим, что $\sigma^{i-1}_{m,k} = \dfrac{\sigma^i_k - \sigma^i_m}{\lambda_m - \lambda_k}$. Аналогично получаем, что $\sigma^{j-1}_{m,k} = \dfrac{\sigma^j_k - \sigma^j_m}{\lambda_m - \lambda_k}$. Следовательно,

$$\left(\sigma^j_k \sigma^{i-1}_{m,k} - \sigma^i_k \sigma^{j-1}_{m,k}\right)\hat{A}_m + \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right)\frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} =$$

$$= \frac{\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m}{\lambda_k - \lambda_m}\hat{A}_m + \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right)\frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} =$$

$$= \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right)\left(\frac{\hat{A}_m}{\lambda_k - \lambda_m} + \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k}\right).$$

Равенство $\dfrac{\hat{A}_m}{\lambda_k - \lambda_m} + \dfrac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} = 0$ проверяется нетрудным вычислением. Предложение доказано. ■

Как мы увидим далее, это предложение является основополагающим в доказательстве теоремы.

Согласно замечанию, сделанному выше, в качестве следствия мы получаем замечательный факт.

Следствие 1. *Функции F_i коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.*

Оказывается, система функций $F_0, \dots, F_{n-1}$ является еще и функционально независимой. Это нам гарантирует следующее предложение.

Предложение 6. *Функции F_i функционально независимы.*

Доказательство предложения 6. Покажем, что почти всюду якобиан

$$\frac{D(F_0, \dots, F_{n-1})}{D(p_1 \dots, p_n)}$$

отличен от нуля. Имеем:

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} = 4\sigma_j^i \hat{A}_j p_j.$$

Следовательно,

$$\frac{D(F_0, \dots, F_{n-1})}{D(p_1 \dots, p_n)} = 4^n \begin{vmatrix} \sigma_1^0 & \dots & \sigma_n^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^{n-1} & \dots & \sigma_n^{n-1} \end{vmatrix} \prod_{j=1}^{n} \hat{A}_j p_j.$$

Заметим, что выражение за определителем не нуль почти всюду. Покажем, что и сам определитель тоже не обращается в нуль почти всюду. Сопоставим j-му столбцу матрицы внутри определителя многочлен $f_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} z^{n-1-i}(-1)^i \sigma_j^i$. Отметим, что определитель равен нулю в том и только в том случае, когда многочлены $f_1(z), \dots, f_n(z)$ линейно зависимы. Из теоремы Виета следует, что для любого j справедливо равенство:

$$f_j(z) = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_{j-1})(z - \lambda_{j+1}) \dots (z - \lambda_n).$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — попарно различные числа, тогда $f_j(\lambda_i) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $i \neq j$. Отсюда немедленно следует, что при таких $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ многочлены $f_1(z), \dots, f_n(z)$ линейно независимы. Поскольку условия вида $\lambda_i = \lambda_j$ при $i \neq j$ задают множество меры нуль в фазовом прстранстве, функции $F_0, \dots, F_{n-1}$ являются функционально независимыми. Предложение доказано. ■

Следовательно, задача о движении материальной точки по инерции в $\mathbb{R}^{p,q}$ является вполне интегрируемой и ее первые интегралы $F_0, \dots, F_{n-1}$ полностью описывают касание траектории семейства софокусных квадрик.

То, что задача о движении материальной точки в $\mathbb{R}^{p,q}$ интегрируема, является общеизвестным фактом. Однако нам важно, что построенная система функционально независимых коммутирующих первых интегралов $F_0, \dots, F_{n-1}$ связана с касанием софокусных квадрик.

Теперь определим скольких софокусных квадрик касается прямая в $\mathbb{R}^{p,q}$. Для этого докажем вспомогательное предложение о разделении переменных.

Предложение 7 (Формула разделения переменных). *На совместном уровне $f_0, \ldots, f_{n-1}$ первых интегралов $F_0, \ldots, F_{n-1}$ уравнения движения имеют следующий вид.*

$$\dot{\lambda}_k = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod\limits_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)} \sqrt{-\prod_{i=1}^{n}(\lambda_k - a_i)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{n-1-k}(-1)^k f_k\right)}. \tag{3.5}$$

Доказательство предложения 7. Рассмотрим многочлен касания $W(\mu) = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu^{n-1-k}(-1)^{n-1-k} f_k$ на совместном уровне $(f_0, \ldots, f_{n-1})$. Напомним, что $W(\mu_0) = 0$ в том и только в том случае, когда траектория касается квадрики параметра μ_0. По теореме Виета, используя формулы 3.4, получаем, что

$$W(\mu) = 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} (\lambda_1 - \mu) \ldots (\lambda_{k-1} - \mu)(\lambda_{k+1} - \mu) \ldots (\lambda_n - \mu) \hat{A}_k p_k^2.$$

Отсюда заключаем, что для любого $k = 1, \ldots, n$ выполнено равенство

$$W(\lambda_k) = 4 \prod_{i=1}^{n} (a_i - \lambda_k)\, p_k^2. \tag{3.6}$$

Используя связь между обобщенными импульсами и скоростями, а также соотношения 3.6, получаем:

$$\dot{\lambda}_k = 4\hat{A}_j p_j = \pm \frac{2}{\prod\limits_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)} \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_i - \lambda_k) W(\lambda_k)}.$$

Предложение доказано. ■

Используя доказанное предложение, докажем следующий фундаментальный факт.

Предложение 8. *Пусть $f_0, \ldots, f_{n-1}$ — совместный уровень первых интегралов $F_0, \ldots, F_{n-1}$ и $f_0 \neq 0$, тогда многочлен $W(\mu) = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu^{n-1-k}(-1)^{n-k-1} f_k$ имеет либо $n-1$, либо $n-3$ вещественных корня с учетом кратности.*

Доказательство предложения 8. Будем доказывать предложение в случае общего положения, а именно, будем считать, что все корни многочлена касания $W(\mu)$ различны. Согласно предложению 1 через каждую точку $\mathbb{R}^{p,q}$ проходит хотя бы $n-2$ софокусные квадрики (с учетом кратности). Причем на каждом из отрезков $[a_i, a_{i+1}]$, $[a_{j+1}, a_j]$, где $i = 1, \ldots, p-1$, $j = 1, \ldots, q-1$, расположен хотя бы один из параметров этих квадрик. Иными словами, на каждом из этих отрезков "живет" хотя бы одна обобщенная эллиптическая координата. Поэтому в случае общего положения многочлен $V(\mu) = -\prod_{i=1}^{n}(\mu - a_i)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu^{n-1-k}(-1)^k f_k\right)$ должен принимать положительные значения на подынтервалах выше перечисленных отрезков.

Поскольку $f_0 \neq 0$, степень многочлена касания максимальна и равна $n-1$. Обозначим через N количество корней $W(\mu)$ на промежутке (a_1, a_p). Согласно рассуждению выше, на этом интервале должны найтись хотя бы $p-1$ различных подынтервалов, на которых многочлен касания принимал бы положительные значения. При этом, границы этих подынтервалов различны и являются корнями многочлена $V(\mu)$, лежащими не отрезке $[a_1, a_p]$. Отсюда приходим к неравенству: $2(p-1) \leqslant p+N$. Следовательно, $N \geqslant p-2$. Иными словами, многочлен $W(\mu)$ имеет на промежутке (a_1, a_p) хотя бы $p-2$ корня.

Аналогично, на интервале (a_{p+1}, a_n) существует хотя бы $q-2$ корня $W(\mu)$. Таким образом, многочлен $W(\mu)$ имеет хотя бы $n-4$ вещественных корня. А поскольку его степень равна $n-1$, количество вещественных корней $W(\mu)$ равно либо $n-3$, либо $n-1$. Предложение доказано. ■

Поскольку функции F_i (они же коэффициенты многочлена касания) являются попарно коммутирующими относительно частных скобок Пуассона, такими же свойствами обладают корни многочлена касания.

Отметим, что полученный результат по сути является аналогом известной теоремы Шаля (см. [3]), ранее быд доказан Б. Хесиным и С. Табачниковым в работе [7].

Теперь, используя полученные на этом шаге свойства многочлена касания и его коэффициентов, докажем утверждения теоремы 2.

Шаг 3. Пусть $Q_1, \dots Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^{p,q}$. Тогда на их пересечении $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$ (мы предполагаем, что $Q \neq \varnothing$) зафиксировано в точности k обобщенных эллиптических координат $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$, при этом на оставшиеся координаты никаких ограничений не накладывается.

Рассмотрим на Q индуцированную псевдориманову метрику из объемлющего пространства $\mathbb{R}^{p,q}$. Эта псевдометрика определяет на кокастельном расслоении к Q геодезический поток. Поскольку метрика индуцирована из объемлющего пространства, энергия получившейся системы будет такой же, как у материальной точки, свободно движущейся в $\mathbb{R}^{p,q}$.

Заметим, что в силу предложения 5 функции F_i являются первыми интегралами геодезического потока на Q. Действительно, Q задается соотношениями $\lambda_{i_1} = c_1, \dots, \lambda_{i_k} = c_k$, где c_i — фиксированные числа, импульсы соответствующие этим координатам обязаны равняться нулю. При этом, каконическая скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_Q$ на Q является суммой частных скобок Пуассона по незафиксированным эллиптическим координатам, т.е. $\{\cdot,\cdot\}_Q = \sum\limits_{j \neq i_1, \dots, i_k} \{\cdot,\cdot\}_j$. Поскольку F_i коммутируют относительно всех частных скобок, они коммутируют относительно скобки $\{\cdot,\cdot\}_Q$

Следовательно, функции F_i будут квадратичными первыми интегралами геодезического потока на Q. При этом, используя рассуждения из доказательства предложения 6, нетрудно убедиться, что $F_0, \dots, F_{n-k-1}$ являются функционально независимыми на T^*Q. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второй части остается применить предложение 8. Таким образом теорема 2 полностью доказана.

Возникает весьма любопытный вопрос. В каком случае количество квадрик касания равно $n-1-k$? Ответ на него мы дадим для той части Q, которая попадает в область $D(A,B)$. Более того, мы будем считать, что в пересечении Q присутствует хотя бы одна уникальная квадрика.

Определение 6. Пересечение невырожденных софокусных квадрик $Q_1,\dots,$ Q_k будем называть *уникальным*, если хотя бы одна из Q_i уникальна.

Напомним, что квадрика называется уникальной, если ее параметр лежит в объединении интервалов $I=(-\infty,-a_n)$, $II=(-a_{p+1},a_1)$, $III=(a_p,+\infty)$. Отметим, что согласно предложению 1 пересечение двух уникальных квадрик непусто в том и только том случае, когда их параметры лежат на одинаковых интервалах I, II или III. Это наблюдение позволяет разделить уникальные пересечения квадрик на три класса.

Определение 7. Пересечение софокусных квадрик $Q_1,\dots,Q_k$ будем называть *уникальным пересечением типа* I (II или III соответственно), если среди Q_i есть квадрика, параметр которой лежит на интервале I (II или III соответственно).

Уникальные квадрики определяют три множества в $\mathbb{R}^{p,q}$:

- $D_I=\{x\in\mathbb{R}^{p,q}|x$ лежит на уникальной квадрике параметра $\lambda\in I\}$;
- $D_{II}=\{x\in\mathbb{R}^{p,q}|x$ лежит на уникальной квадрике параметра $\lambda\in II\}$;
- $D_{III}=\{x\in\mathbb{R}^{p,q}|x$ лежит на уникальной квадрике параметра $\lambda\in III\}$.

Предложение 9. *Пусть $Q_1,\dots,Q_k$ — различные невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^{p,q}$ и $Q=\bigcap\limits_{i=1}^{k}Q_i\neq\varnothing$.*

1. *Пусть Q — уникальное пересечение типа I или II. Тогда касательные линии, проведенные во всех точках времениподобной геодезической на Q, касаются помимо $Q_1,\dots,Q_k$ еще $n-k-1$ софокусных с ними квадрик, общих для всех точек данной геодезической.*
2. *Пусть Q — уникальное пересечение типа II или III. Тогда касательные линии, проведенные во всех точках пространственноподобной геодезической на Q, касаются помимо $Q_1,\dots,Q_k$ еще $n-k-1$ софокусных с ними квадрик, общих для всех точек данной геодезической.*

Доказательство. Будем действовать тем же методом, что и при доказательстве предложения 8. Рассмотрим движение материальной точки по инерции в множестве D_{II}. Согласно определению через каждую точку D_{II} проходит хотя бы одна квадрика семейства 2.1, параметр которой лежит на интервале (a_{p+1},a_1). Согласно предложению 7 на этом интервале должен найтись подынтервал, на котором многочлен

$$V(\mu)=-\prod_{i=1}^{n}(\mu-a_i)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mu^{n-1-k}(-1)^kf_k\right)$$

принимает положительные значения.

Аналогичным свойством в случае общего положения обладают интервалы (a_i,a_{i+1}), (a_{j+1},a_j) при $i=1,\dots,p-1$, $j=p+1,\dots,n-1$. Следуя рассуждениям в доказательстве предложения 8, заключаем, что на интервале (a_n,a_1) многочлен касания должен иметь не менее $n-2$ вещественных корней с учетом кратности. Остается заметить, что при $f_0 \neq 0$ степень многочлена касания равна $n-1$, а следовательно, произвольная времениподобная или пространственноподобная прямая, проходящая через множество D_{II}, касается в точности $n-1$ квадрик семейства 2.1. Следовательно, любая неизотропная геодезическая на уникальном пересечении типа II софокусных квадрик $Q_1, \dots, Q_k$ касается помимо этих квадрик еще $n-k-1$ софокусной квадрики. Таким образом, для уникальных пересечений типа II все доказано.

В случае, когда движение происходит в области D_I и $f_0 < 0$ (т.е. траектория является времениподобной), многочлен $V(\mu)$ при стремлении μ к $-\infty$ принимает отрицательные значения. Однако одна из эллиптических координат в этой области "живет" на интервале $(-\infty, a_{p+1})$. А следовательно, на этом промежутке многочлен $V(\mu)$ должен иметь хотя бы один корень. Используя оценки на число корней из предложения 8, заключаем, что все корни многочлена касания обязаны быть вещественными. Однако такие рассуждения неверны для пространственноподобных геодезических (т.е. при $f_0 > 0$). В случае области D_{III} все происходит в точности наоборот: пространственноподобные траектории касаются полного набора квадрик, в то время как времениподобные таким свойством, вообще говоря, могут не обладать. Предложение доказано.

§ 4. Обобщенная теорема Якоби-Шаля в пространствах постоянной кривизны

Итак, обобщенная теорема Якоби-Шаля верна как для евклидовых, так и для псевдоевклидовых пространств. Основываясь на этом результате А. Т. Фоменко предположил, что непременно должен найтись аналог этой теоремы для пространств постоянной секционной кривизны, а именно для сферы, проективных пространств и пространств Лобачевского со стандартными метриками. Как оказалось, эта гипотеза, действительно, верна. Более того, этот факт является следствием обобщенной теоремы Якоби-Шаля в евклидовом пространстве (см. теорему 1) и теоремы 2.

Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}(x_0, \dots, x_n)$ семейство софокусных квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x_0^2}{a_0-\lambda} + \frac{x_1^2}{a_1-\lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n-\lambda} = 1. \tag{4.1}$$

Мы будем считать, что все a_i положительны и упорядочены по возрастанию, т.е. $0 < a_1 < \dots < a_n$. Для произвольного $t \in [0,1]$ определим новое семейство софокусных квадрик

$$\frac{x_0^2}{ta_0-\lambda} + \frac{x_1^2}{ta_1-\lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{ta_n-\lambda} = 1. \tag{4.2}$$

Заметим, что при $t=1$ это семейство совпадает с исходным, а при $t=0$ формула 4.2 преобразуется к уравнению концентрических сфер с центром в нуле. Абсолютно ясно, что эти сферы являются пределами софокусных эллипсоидов, однако что происходит с другими софокусными квадриками при таком вырождении?

Зафиксируем точку $P = (x_0, \dots, x_n)$. Пусть $\lambda_0(t) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(t)$ — эллиптические координаты этой точки в семействе 4.2. Поскольку эллипсоиды семейства 4.1 стягиваются в сферы, верно асимптотическое разложение $\lambda_0(t) = -R^2 + o(1)$ при $t \to 0$, для некоторого R. Поскольку для любого $i = 1, \dots, n$ выполнены неравенства $ta_{i-1} \leqslant \lambda_i(t) \leqslant ta_i$, а отрезки $[ta_{i-1}, ta_i]$ стягиваются в ноль, верна следующая асимптотика: $\lambda_i(t) = \mu_i t + o(t)$ при $t \to 0$, $i = 1, \dots, n$ для некоторых μ_i.

Вычислим соотношения на коэффициенты μ_i. Для этого напишем формулы связи эллиптических координат с декартовыми.

$$x_i^2 = \frac{\prod\limits_{j=0}^{n}(ta_i - \lambda_j(t))}{\prod\limits_{j\neq i}(ta_i - ta_j)} = \frac{(ta_i + R^2 + o(t))\prod\limits_{j=1}^{n}(ta_i - \mu_j t + o(t))}{\prod\limits_{j\neq i}(ta_i - ta_j)} = R^2\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_i - \mu_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i - a_j)} \tag{4.3}$$

Предложение 10. *Величины μ_i являются параметрами конусов однопараметрического семейства*

$$\frac{x_0^2}{a_0 - \mu} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \mu} = 0, \tag{4.4}$$

проходящих через данную точку.

Доказательство. Действительно, для любого $j = 1, \dots, n$ вычислим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \mu_j}$. Для этого подставим в нее формулы 4.3:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \mu_j} = R^2 \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{k\neq j}(a_i - \mu_k)}{\prod\limits_{k\neq i}(a_i - a_k)} = R^2 \sum_{i=0}^{n} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_i^k (-1)^{n-1-k} \sigma_j^{n-1-k}(\mu_1, \dots, \mu_n)}{\prod\limits_{k\neq i}(a_i - a_k)}.$$

Поменяем порядок сумм в полученном выражении, после чего воспользуемся формулами суммирования (см, например, [3], [6]), согласно которым это выражение тождественно равно нулю. Предложение доказано.

Итак, предел семейства 4.2 при $t \to 0$ представляет собой концентрическое семейство сфер и однопараметрическое семейство конусов 4.4. Причем через каждую точку $\mathbb{R}^{n+1}$ проходит в точности n конусов вида 4.4 (с учетом кратности). Таким образом, разумно дать следущее определение семейства софокусных квадрик на сфере.

Определение 8. *Семейством софокусных квадрик на сфере S_R^n*, заданной уравнением $x_0^2 + \dots + x_n^2 = R^2$, будем называть пересечения этой сферы с однопараметрическим семейством конусов 4.4.

Семейство софокусных квадрик на сфере и его стереографическая проекция проиллюстрированы на рисунке 3. Отметим, что семейство софокусных квадрик на сфере (однараметрическое семейство конусов) появлялось в работе [14].

Замечание 9. Отметим, что при стереографической проекции квадрики на сфере переходят в плоские кривые порядка 4. Действительно, стереографическая проекция сферы S^2_R на плоскость с декартовыми координатами (u, v) осуществляется по формулам

$$x = \frac{2R^2u}{u^2+v^2+R^2}, \quad y = \frac{2R^2v}{u^2+v^2+R^2}, \quad z = R\frac{u^2+v^2-R^2}{u^2+v^2+R^2}.$$

Подставляя эти формулы в уравнение конуса однопараметрического семейства 2.5, получим кривую порядка 4.

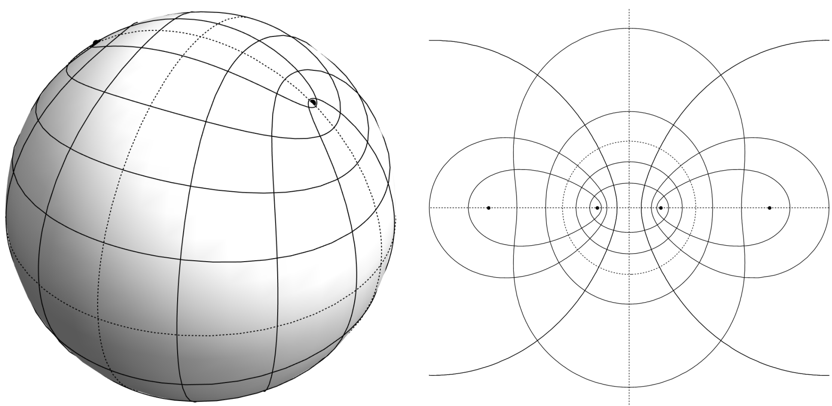

Рис. 3. a) Семейство софокусных квадрик на сфере. Пунктиром выделены вырожденные квадрики, черные точки — фокусы семейства. b) Стереографическая проекция софокусных квадрик на плоскость.

Итак, мы определили софокусные квадрики на сферах. Теперь зададим софокусные квадрики в пространстве Лобачевского. Напомним, что *пространством Лобачевского* L^n_R называется связная компонента псевдосферы $x_0^2+\dots+x_{n-1}^2 - x_n^2 = -R^2$, лежащая в полупространстве $x_n > 0$.

Будем действовать аналогично. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n,1}(x_0, \dots, x_n)$ семейство софокусных квадрик

$$\frac{x_0^2}{a_0-\lambda} + \frac{x_1^2}{a_1-\lambda} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}-\lambda} + \frac{x_{n-1}^2}{b+\lambda} = 1.$$

Как и ранее, считаем, что $0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$, и $b > 0$. Для произвольного $t \in [0, 1]$ снова определим семейство софокусных квадрик

$$\frac{x_0^2}{ta_0-\lambda} + \frac{tx_1^2}{a_1-\lambda} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{ta_{n-1}-\lambda} + \frac{x_{n-1}^2}{tb+\lambda} = 1 \tag{4.5}$$

и рассмотрим его предел при $t \to 0$. Получим концентрические сферы и псевдосферы (в смысле $\mathbb{R}^{n,1}$) с центром в нуле, а также однопараметрическое семейство конусов

$$\frac{x_0^2}{a_0-\mu} + \frac{x_1^2}{a_1-\mu} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}-\mu} + \frac{x_{n-1}^2}{b+\mu} = 0. \tag{4.6}$$

Определение 9. *Семейством софокусных квадрик в пространстве Лобачевского* L_R^n будем называть пересечения L_R^n с однопараметрическим семейством конусов 4.6.

Как и в случае сферы, через каждую точку псевдосферы проходит в точности n софокусных квадрик.

Семейство софокусных квадрик на плоскости Лобачевского L_R^2 и его стандартная стереографическая проекция на модель Пуанкаре (плоский диск) показаны на рисунке 4. Как и в случае сферы, софокусные квадрики при стереографической проекции переходят в плоские кривые порядка 4.

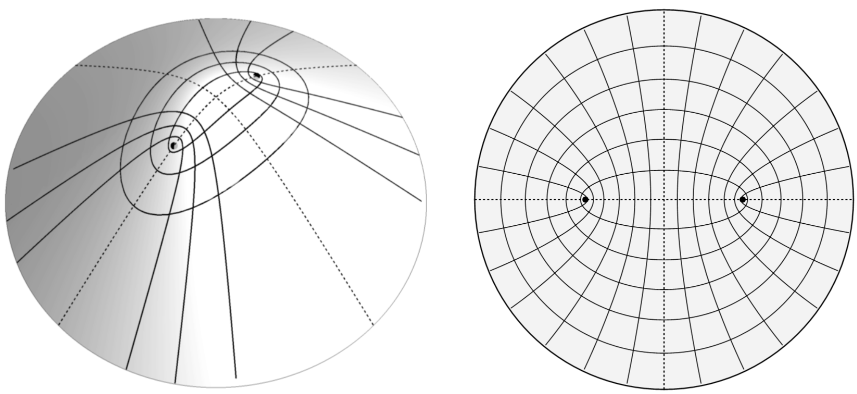

Рис. 4. a) Семейство софокусных квадрик на плоскости Лобачевского b) Стереографическая проекция софокусных квадрик на плоскость (модель Пуанкаре). Пунктиром выделены вырожденные квадрики. Черные точки — фокусы семейства.

Рассмотрим на сферах S_R^n и на пространствах Лобачевского L_R^n стандартные метрики постоянной секционной кривизны, индуцированные на них при стандартном вложении соответственно в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ и псевдоевклидово $(n+1)$-мерное пространство $\mathbb{R}^{n,1}$ индекса 1. Будем обозначать эти многообразия одним символом M_R^n, и пусть размерность n не меньше чем 3.

Теорема 3 (Белозеров, Фоменко). *Пусть* $Q_1, \ldots, Q_k$ *— невырожденные софокусные квадрики различных типов в пространстве* M_R^n *и* $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$. *Тогда*

1. *геодезический поток на* Q *квадратично интегрируем.*
2. *касательные геодезические в* M_R^n*, проведенные ко всем точкам геодезической на* Q*, касаются помимо* $Q_1, \ldots, Q_k$ *еще* $n-k-1$ *квадрик софокусных с* $Q_1, \ldots, Q_k$ *и общих для всех точек этой геодезической.*

Доказательство. Многообразия M_R^n и софокусные квадрики на них получаются в результате предельного перехода семейств софокусных квадрик в евклидовом $\mathbb{R}^n$ и псевдоевклидовом $\mathbb{R}^{n,1}$, для которых справедлива обобщенная теорема Якоби-Шаля (см. теоремы 1 и 2). Поэтому аналогичная теорема должна остаться верной и в M^n_R. Однако, во-первых, в формулировке теоремы 2 количество квадрик касания равно либо $n-3-k$, либо $n-1-k$. А во-вторых, в обеих теоремах касательные линии "живут" в объемлющем пространстве. Остается доказать эти недостающие факты.

Покажем сначала, что на плоскости Лобачевского количество квадрик, которых касается произвольная геодезическая, равно $n-1$.

Пусть $P \in L^n_R$. В результате предельного перехода по t в формуле 4.6 уравнение семейства софокусных квадрик преобразуется к виду

$$x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -\mu.$$

Следовательно, одна из эллиптических координат точки P станет равной $R^2 > 0$. Значит, при достаточно малых t эта точка должна иметь эллиптическую координату, большую a_n, так как именно она должна прийти в R^2 при $t \to 0$. Поэтому при всех малых t точка P лежит в области D_{III}, определяемой соответствующим семейством софокусных квадрик.

Теперь заметим, что любая геодезическая на L^n_R является пространственноподобной. Действительно, метрика на L^n_R положительно определена, а следовательно, любой касательный вектор к пространству Лобачевского пространственноподобный. Согласно предложению 9 любая пространственноподобная геодезическая на уникальном пересечении типа III невырожденных софокусных квадрик $Q_1, \dots, Q_k$ касается еще $n-k-1$ софокусной квадрики. Поэтому первый недостающий факт мы доказали. Разберемся со вторым.

Заметим, что если некоторая касательная прямая к сфере S^n_R касается конуса Q, центр которого совпадает с центром сферы, то геодезическая на сфере, проведенная в направлении этой прямой, касается кривой $Q \cap S^n_R$ (см. рис. 5). Доказательство этого факта основывается на том, что если прямая касается конуса, то плоскость, проходящая через эту прямую и центр конуса, будет касательной к конусу. Аналогичное верно и для пространств Лобачевского. Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание 10. В теореме 3 на пересечении нескольких софокусных квадрик рассматривалась метрика, индуцированная из объемлющего пространства M^n_R. Геодезический поток на таких пересечениях рассматривался именно в этой метрике.

Отметим, что у диаметрально противоположных точек на сфере S^n_R совпадают эллиптические координаты. Это наблюдение позволяет перенести теорему 3 на проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ со стандартной метрикой постоянной секционной кривизны. Таким образом, мы получим следующее следствие.

Следствие 2. *Утверждение теоремы 3 не изменятся если в качестве M^n_R рассмотреть проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ со стандартной метрикой постоянной секционной кривизны.*

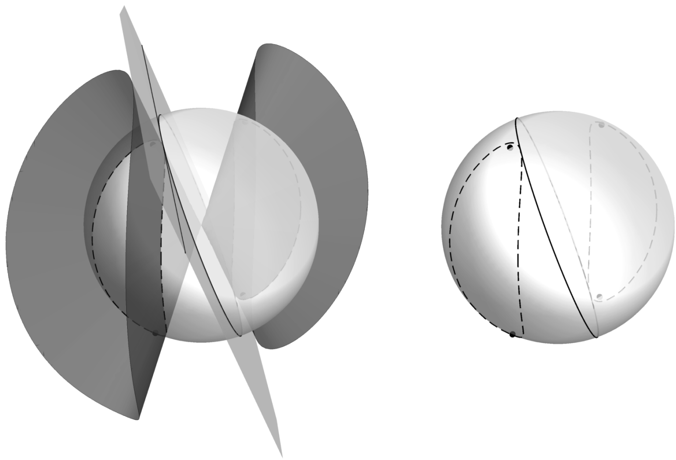

Рис. 5. Иллюстрация того, что центральное сечение стандартной двумерной сферы касается конуса с центром в нуле тогда и только тогда, когда соответствующая большая сферическая окржность на сфере касается высекаемой конусом кривой.

§ 5. Квадратично интегрируемые биллиарды на двумерных римановых многообразиях

В настоящем параграфе мы покажем, что в случае размерности 2 теорема Якоби-Шаля верна лишь для пространств постоянной гауссовой кривизны. Однако предварительно сделаем несколько замечаний.

В теореме 2 первые интегралы F_i представляли собой сумму квадратов импульсов с коэффициентами, зависящими от обобщенных эллиптических координат. Следовательно, биллиард, запущенный в области пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ (S^n_R или L^n_R) и ограниченный конечным числом софокусных квадрик, является интегрируемым, а функции F_i являются его первыми интегралами (а, следовательно, не зависят от параметров квадрик его границы). Более того, верна следующая теорема.

Теорема 4 (Белозеров, Фоменко). *Пусть M одно из следующих пространств: S^n_R, $\mathbb{R}P^n$, L^n_R, евклидово $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{p,q}$. Пусть также $Q_1, \ldots, Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики различных типов в M, $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$ и D — область Q, ограниченная конечным числом квадрик софокусных с Q_i и имеющая многогранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Тогда*

1. *геодезический биллиард на D квадратично интегрируем в кусочно-гладком смысле и его первые интегралы не зависят от параметров граничных квадрик.*
2. *касательные геодезические в M, проведенные ко всем точкам траектории биллиарда на D, касаются помимо $Q_1, \ldots, Q_k$ еще $n-k-1$ квадрик софокусных с $Q_1, \ldots, Q_k$ и общих для всех точек этой геодезической.*

А какие еще пространства M, помимо выше перечисленных, тоже будут удовлетворять условию теоремы 4? Мы ответим на этот вопрос в случае $n = 2$. Заметим, что, устремляя параметры a_i друг к другу, мы вырождаем эллиптическую систему координат. Одним из предельных случаев такого вырождения является полугеодезическая система координат, которая, в свою очередь, может быть определена на любом многообразии. Положим это наблюдение в основу нашего исследования.

Рассмотрим двумерное риманово многообразие (M^2, g). Метрика g определяет геодезическое расстояние ρ_g между точками M^2.

Определение 10. *Геодезической окружностью* (соответственно *кругом*) на поверхности M^2 с центром в точке P радиуса ε назовем множество

$$S_\varepsilon(P) = \{Q \in M^2 | \rho_g(P, Q) = \varepsilon\} \text{ (соответственно } K_\varepsilon(P) = \{Q \in M^2 | \rho_g(P, Q) \leqslant \varepsilon\}).$$

Пусть ε настолько мало, что экспоненциальное отображение в точке P инъективно и гладко в малой окрестности геодезического круга $K_\varepsilon(P)$. В этом случае $\partial K_\varepsilon P = S_\varepsilon(P)$. Рассмотрим внутри геодезического круга $K_\varepsilon(P)$ классический биллиард, то есть следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри круга $K_\varepsilon(P)$ по геодезическим с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от его границы $S_\varepsilon(P)$ абсолютно упруго.

Определение 11. Риманово многообразие (M^2, g) будем называть *квадратично интегрируемым по Якоби-Шалю*, если для любой точки $P \in M^2$ в ее малой окрестности существует квадратичный по импульсам дополнительный первый интеграл F_P геодезического потока метрики g, который является первым интегралом классического биллиарда в любом достаточно малом геодезическом круге с центром в точке P.

Согласно теореме 4 сфера S^2_R, пространство Лобачевского L^2_R и евклидова плоскость со стандартными метриками являются квадратично интегрируемыми по Якоби-Шалю. Оказывается, этими примерами (в некотором смысле) исчерпывается список всех квадратично интегрируемых по Якоби-Шалю поверхностей. Более точно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5 (Белозеров, Фоменко). *Двумерное риманово многообразие (M^2, g) является квадратично интегрируемым по Якоби-Шалю в том и только том случае, когда оно локально изометрично пространству постоянной кривизны.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Докажем в другую. Пусть $P \in M^2$. Рассмотрим в окрестности этой точки полугеодезические координаты (r, φ). Согласно лемме Гаусса в этих координатах метрический тензор записывается следующим образом:

$$g = dr^2 + B(r, \varphi) d\varphi^2,$$

где B — положительная в проколотой окрестности точки P функция. Следовательно, в координатно-импульсном представлении энергия материальной точки имеет следующий вид.

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \widetilde{B}p_\varphi^2\right)$$

Здесь $\widetilde{B} = 1/B$.

Пусть $F_P = F$ — квадратичный дополнительный к H первый интеграл биллиарда в малой окрестности точки P. Поскольку этот интеграл должен сохраняться при отражении, коэффициент при $p_r \cdot p_\varphi$ должен равняться нулю, иными словами

$$F = \frac{1}{2}\big(A_1(r,\varphi)p_r^2 + A_2(r,\varphi)p_\varphi^2\big).$$

Поскольку F — первый интеграл биллиарда, он также является первым интегралом геодезического потока. Следовательно, скобка Пуассона H и F обязана равняться нулю, то есть

$$0 = \{H,F\} = \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial p_\varphi}\frac{\partial H}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{p_r}{2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial r}p_r^2 + \frac{\partial A_2}{\partial r}p_\varphi^2\right) + \frac{\widetilde{B}p_\varphi}{2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}p_r^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \varphi}p_\varphi^2\right) - \frac{A_1 p_r}{2}\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial r}p_\varphi^2 - \frac{A_2 p_\varphi}{2}\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial \varphi}p_\varphi^2.$$

Полученное равенство эквивалентно следующей системе уравнений в частных производных.

$$\frac{\partial A_1}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial A_2}{\partial r} = A_1\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial r} \qquad \widetilde{B}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} = 0 \qquad \widetilde{B}\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} = A_2\frac{\partial \widetilde{B}}{\partial \varphi}$$

Из первого и третьего уравнений заключаем, что A_1 — константа. Вычитая из F функцию $A_1 H$, получим независимый с H квадратичный первый интеграл, у которого коэффициент при p_r^2 равен нулю. Таким образом, можем считать, что $A_1 = 0$. С учетом этого, из второго уравнения получаем, что A_2 не зависит от r. Остается воспользоваться четвертым уравнением. Поскольку A_2 не зависит от r, логарифмическая производная функции B по φ тоже не зависит от r. Значит, $\ln\widetilde{B} = u(\varphi) + v(r)$ для некоторых глаких функций u и v. Таким образом, $B = 1/\widetilde{B} = f^2(r)h^2(\varphi)$ для некоторых гладких функций f и g, откуда

$$g = dr^2 + f^2(r)h^2(\varphi)d\varphi^2.$$

Внесем h под дифференциал. Таким способом мы перейдем от переменной φ к переменной $\varphi' = \int h(\varphi)d\varphi$. В координатах (r,φ') метрический тензор будет иметь вид

$$g = dr^2 + f^2(r)d\varphi'^2. \tag{5.1}$$

Следовательно, гауссова кривизна поверхности M^2 постоянна на достаточно малых геодезических кругах с центром в точке P. Поскольку наши рассуждения справедливы для произвольной точки $P \in M^2$, заключаем, что гауссова кривизна M^2 постоянна.

Хорошо известно (см, например, [15]), что гауссова кривизна поверхности, метрический тензор которой имеет вид 5.1, вычисляется по формуле

$$K = -\frac{f''(r)}{f(r)}.$$

Поскольку гауссова кривизна поверхности M^2 постоянна, мы получаем дифференциальное уравнение на f. Причем у этого уравнения есть одно начальное условие: $f(0) = 0$. Возможны 3 варианта: $K = 0$, $K = R^2$, $K = -R^2$. В первом случае $f(r) = \alpha r$, а это значит, что M^2 локально изометрична плоскости. Во втором случае $f(r) = \beta \cos(R \cdot r)$, то есть M^2 локально изометрична сфере радиуса R. Во третьем случае $f(r) = \gamma \operatorname{ch}(R \cdot r)$ и M^2 локально изометрична плоскости Лобачевского радиуса R. Таким образом, теорема полностью доказана.

Список литературы

[1] C. G. G. Jacobi, "Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1839, № 19, 309–313.

[2] К. Якоби, *Лекции по динамике*, Гостехиздат, М., 1936.

[3] M. Chasles, "Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **11** (1846), 5–20.

[4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.

[5] Г. В. Белозеров, "Интегрируемость геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик", *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **509** (2023), 5–7.

[6] Г. В. Белозеров, "Геодезический поток на пересечении нескольких софокусных квадрик в $\mathbb{R}^n$", *Матем. сб.*, **214**:7 (2023), 3–26.

[7] B. Khesin, S. Tabachnikov, "Pseudo-Riemannian geodesics and billiards", *Adv.Math.*, **221**:4 (2009), 1364–1396.

[8] В. Драгович, М. Раднович, "Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского", *Фундамент. и прикл. матем.*, **20**:2 (2015), 51–64.

[9] Е. Е. Каргинова, "Слоение Лиувилля топологических биллиардов на плоскости Минковского", *Фундамент. и прикл. матем.*, **22**:6 (2019), 123–150.

[10] Е. Е. Каргинова, "Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского", *Матем. сб.*, **211**:1 (2020), 3–31.

[11] V. Dragovi'c, M. Radnovi'c, "Bicentennial of the great poncelet theorem (1813–2013): current advances", *Bulletin (New Series) of the american mathematical society*, **51**:3 (2014), 373–445.

[12] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, издательство "МГУ", М., 1991.

[13] С. В. Болотин, "Интегрируемые бильярды на поверхностях постоянной кривизны", *Матем. заметки*, **51**:2 (1992), 20–28.

[14] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical physics*, McGraw-Hill Book Company, New York; Toronto; London, 1953.

[15] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1981.

Г. В. Белозеров (G. V. Belozerov)
Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

Поступила в редакцию
27.03.2024

А. Т. Фоменко (A. T. Fomenko)
Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
E-mail: atfomenko@mail.ru