УДК 514.774.8

Г. В. Белозеров

Геодезический поток на пересечении нескольких софокусных квадрик в $\mathbb{R}^n$

Согласно теореме Якоби–Шаля для любой геодезической на n-осном эллипсоиде в евклидовом n-мерном пространстве найдутся помимо этого эллипсоида еще $n-2$ софокусные с ним квадрики, которых одновременно касаются все касательные прямые, проведенные к этой геодезической. В настоящей работе показано, что если рассмотреть геодезический поток на пересечении нескольких невырожденных софокусных квадрик, результат останется верным. Как и в случае теоремы Якоби–Шаля, этот факт обеспечивает интегрируемость соответствующего геодезического потока. Для каждого компактного пересечения нескольких невырожденных софокусных квадрик был определен его класс гомеоморфности. Как оказалось, любое такое пересечение гомеоморфно прямому произведению нескольких сфер. Также в работе описано достаточное условие на потенциал, добавление которого сохранит интегрируемость соответствующей динамической системы на пересечении произвольного числа софокусных квадрик.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: геодезический поток, интегрируемая система, софокусные квадрики, эллиптические координаты, теорема Якоби–Шаля.

§ 1. Введение

Поверхность Земли хорошо приближается эллипсоидом, а именно эллипсоидом вращения. В связи с этим задача об устройстве кратчайших линий на эллипсоиде была одной из важнейших в XVIII–XIX веках в период развития геодезии. Поскольку на гладких поверхностях кратчайшими линиями являются геодезические, ученым того времени предстояло исследовать структуру геодезического потока на эллипсоиде.

Геодезические на сфере устроены просто: это плоские сечения, проходящие через ее центр. А. Клеро показал, что геодезический поток на эллипсоиде вращения обладает дополнительным первым интегралом, а Ж. Лагранж, Б. Ориани и Ф. Бессель разработали методы решения треугольников на нем.

К. Якоби в работах [1]–[2] рассмотрел самый общий случай, то есть эллипсоид с различными полуосями. Перейдя к эллиптическим координатам, с помощью метода разделения переменных он доказал интегрируемость геодезического потока на n-осном эллипсоиде в $\mathbb{R}^n$. А французский ученый М. Шаль в [3] показал, что касательные прямые, проведенные ко всем точкам данной

Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-10106.

геодезической на трехосном эллипсоиде в $\mathbb{R}^3$, одновременно касаются помимо этого эллипсоида еще одной софокусной с ним квадрики. Сейчас этот результат известен, как теорема Якоби–Шаля.

Теорема 1 (Якоби–Шаль). *Касательные линии, проведенные во всех точках данной геодезической на эллипсоиде в евклидовом n-мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще $n-2$ софокусных с ним квадрик, общих для всех точек этой геодезческой.*

Замечание 1. Параметры этих квадрик взятые вместе с энергией образуют систему функционально независимых попарно коммутирующих (относительно стандартной скобки Пуассона) первых интегралов.

Современное доказательство теоремы Якоби–Шаля можно найти в работе [4] В. И. Арнольда. На рисунке 1 показана иллюстрация к этой теореме.

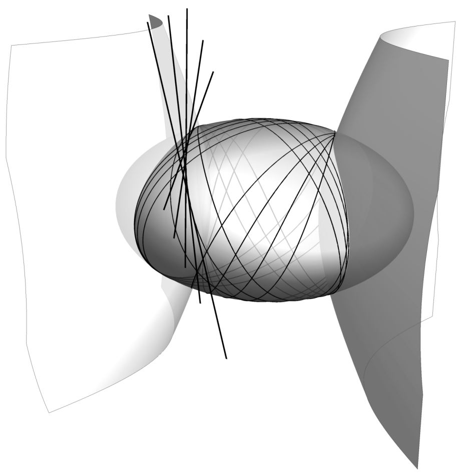

Рис. 1. Иллюстрация теоремы Якоби–Шаля. Касательные линии, проведенные к геодезической на эллипсоиде, одновременно касаются софокусного двуполостного гиперболоида.

Геодезический поток на трехосном эллипсоиде является интегрируемой гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Топология слоения Лиувилля этой системы подробно изучена в совместной работе [5] А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко. В этой работе они показали, что геодезический поток на эллипсоиде непрерывно траекторно эквивалентен системе Эйлера с нулевой константой площадей. Определение траекторной эквивалентности и ее инварианты для систем с двумя степенями свободы изложены в работе [6].

Н. Т. Зунг в работе [7] описал топологию слоения Лиувилля геодезического потока на n-осном эллипсоиде в $\mathbb{R}^n$ с различными полуосями вблизи особых точек. К.М. Дэвисон, Х.Р. Дуллин и А.В. Болсинов в [8] описали особенности геодезического на трехмерном эллипсоиде с совпадающими средними полуосями.

Отметим, что из теоремы 1 следует интегрируемость биллиарда, ограниченного эллипсоидом. Действительно, рассмотрим n-осный эллипсоид и устремим его меньшую полуось к нулю. В пределе получится область, ограниченная эллипсоидом $\mathcal{E}$, размерности $n-1$. При этом геодезический поток перейдет в биллиард, ограниченный эллипсоидом $\mathcal{E}$, а параметры каустик, софокусных с исходным эллипсоидом, перейдут в параметры каустик, софокусных с $\mathcal{E}$. Более того, биллиарды, ограниченные несколькими софокусными квадриками, также будут интегрируемыми. Плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик, изучались В. В. Козловым и Д. В. Трещевым в [9], В. Драговичем и М. Раднович в [10], а также В. В. Ведюшкиной в [11],[12]. В.В. Ведюшкина классифицировала с точностью до Лиувиллевой эквивалентности все локально плоские топологические биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол (см. [13]).

Не так давно В. А. Кибкало исследовал вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Он доказал, что если пересечение двумерно, то соответствующий геодезический поток является интегрируемым. Как оказалось, этот результат является верным для любого пересечения нескольких невырожденных софокусных квадрик. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 2 (Белозеров). *Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^n$ различных типов и $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$. Тогда*

1. *геодезический поток на Q квадратично интегрируем;*
2. *касательные линии, проведенные во всех точках геодезической на Q, касаются помимо $Q_1, \ldots, Q_k$ еще $n-k-1$ софокусных с ними квадрик, общих для всех точек данной геодезической.*

Доказательству этой теоремы посвящен параграф 5. Перед чтением этого параграфа советуем ознакомиться с параграфами 2–4. Они служат основой доказательства теоремы 2.

Отметим, что этот факт не тривиален, то есть не следует из классической теоремы Якоби–Шаля. Действительно, рассмотрим координатные поверхности сферических координат. Они представляют собой сферы, конусы с центром в начале координат и осью Oz, а также полуплоскости, ограниченные осью Oz. Все эти множества являются предельными случаями софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$, когда $a_1 = a_2 = a_3$. В пересчениии сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ и конуса $x_1^2 + x_2^2 - 0{,}2x_3^2 = 0$ будут лежать 2 окружности, которые не являются геодезическими ни на сфере, ни на конусе (см. рис. 1). Следовательно, в общем случае геодезическая на пересечении нескольких невырожденных софокусных квадрик не является геодезической ни на одной из этих квадрик.

Как мы увидим в параграфах 4, 5, первые интегралы, неявно фигурирующие в п. 1 теоремы 2, в эллиптических координатах зависят только от самих координат и квадратов их скоростей. Следовательно, геодезические биллиарды на рассматриваемых пересечениях, ограниченные софокусными квадриками этого же семейства, тоже будут интегрируемыми по Лиувиллю системами, но уже в кусочно-гладком смысле. Таким образом, мы получаем новый класс интегрируемых биллиардов.

Согласно теореме В. В. Козлова о топологических препятствиях к интегрируемости геодезического потока на двумерных поверхностях (см. [14]), а также

Рис. 2. Кривые в пересечении конуса и сферы с общим центром не являются геодезическими ни на конусе, ни на сфере.

теореме 2 связная компонента компактного персечения нескольких невырожденных софокусных квадрик гомеоморфна либо двумерной сфере, либо двумерному тору. Отметим, что к этому выводу ранее пришел В. А. Кибкало. Однако, такие рассуждения не применимы в случае, если размерность пересечения окажется больше 2. Тем не менее удается определить класс гомеоморфности компактного пересечения нескольких софокусных квадрик, не прибегая к интегрируемости соотвествующего геодезического потока, а используя лишь эллиптические координаты.

Теорема 3 (Белозеров). *Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики в $\mathbb{R}^n$ различных типов и $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$ компактно. Тогда Q гомеоморфно прямому произведению k сфер. Размерности этих сфер равны количествам незафиксированных эллиптических координат на Q между двумя соседними зафиксированными.*

Замечание 2. Сферы, фигурирующие в теореме 3, могут быть нульмерными. Напомним, что нульмерная сфера есть несвязное объединение двух точек.

Замечание 3. Отметим, совместную работу [15] С. Гитлера и С. Л. Мердано, в которой было получено, что пересечение соосных квадрик, ассоциированных с многообразиями момент-угол, при определенных условиях гомеоморфно прямой сумме нескольких прямых произведений сфер.

Теорема 3 доказана в параграфе 6.

Согласно результату А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко (см. [5]) геодезический поток на эллипсоиде непрерывно траекторно эквивалентен системе Эйлера на алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$. Орбитами общего положения коприсоединенного действия на $\mathfrak{so}^*(3)$ являются двумерные сферы S^2. Хорошо известно, что $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ и орбитами общего положения коприсоединенного действия на $\mathfrak{so}^*(4)$ являются прямые произведения двух двумерных сфер $S^2 \times S^2$. Согласно теоремам 2 и 3 геодезический поток на компактном пересечении нескольких софокусных квадрик интегрируем, а само пересечение гомеоморфно прямому произведению сфер. Возникает весьма разумное предположение о том, что найдется такое пересечение софокусных квадрик, геодезический поток на котором будет непрерывно траекторно эквивалентен или хотя бы Лиувиллево эквивалантен системе Эйлера на $\mathfrak{so}(4)$. Эта гипотеза была выдвинута А. Т. Фоменко, однако ответ на этот вопрос пока остается открытым.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 2 сыграет следующие наблюдение: для заданного семейства софокусных квадрик найдутся гладкие функционально независимые функции $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$, определенные на всем $T^*\mathbb{R}^n$, которые в ограничении на любое пересечение нескольких невырожденных софокусных квадрик будут коммутирующими (относительно стандартной скобки Пуассона) первыми интегралами геодезического потока на нем. Используя метод, описанный В. В. Козловым в работе [16], в параграфе 7 мы найдем достаточное условие на потенциал V в $\mathbb{R}^n$, которое обеспечит выполнения требования выше.

Теорема 4 (Белозеров). *Пусть задано семейство софокусных квадрик и гладкая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая в эллиптических координатах системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} (\lambda_j - \lambda_k) = \frac{\partial V}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial V}{\partial \lambda_j}, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Тогда задача о движении материальной точки на пересечении нескольких невырожденных софокусных квадрик этого семейства под действием потенциала V является квадратично интегрируемой.

Как и в случае геодезического потока, геодезические биллиарды с потенциалом V из теоремы 4, “живущие” на пересечениях нескольких софокусных кварик и ограниченные гладкими гранями квадрик этого семейства, будут интегрируемы по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле.

Благодарности. Автор благодарит В. А. Кибкало за постановку вопроса, А. Т. Фоменко за внимание к работе и Н. А. Хотина за помощь в исследовании.

§ 2. Софокусные квадрики и эллиптические координаты

В этом параграфе мы обсудим семейство софокусных квадрик и его свойства, выведем формулу связи эллиптических координат с декартовыми, а также введем обозначения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 1. *Семейством софокусных квадрик* в евклидовом n-мерном пространстве, назовем множество квадрик, заданных уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1, \tag{2.1}$$

где $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр.

Замечание 4. Отметим, что если $\lambda = a_i$ для некоторого i, то квадрика, соответствующая этому параметру, не определена. Для того чтобы ее определить, необходимо сначала умножить уравнение 2.1 на произведение $\prod_j (a-\lambda_j)$, а уже затем в полученное выражение подставить значение $\lambda = a_i$. Нетрудно убедиться, что квадрикой, соответствующей параметру a_i, является гиперплоскость $x_i = 0$.

К. Якоби в работе [2] показал, что через каждую точку $\mathbb{R}^n$, не лежащую ни в одной из гиперплоскостей вида $x_i = 0$, проходит в точности n софокусных квадрик. Более того, если обозначить через $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ параметры этих квадрик, то $\lambda_1 \in (-\infty, a_n), \lambda_2 \in (a_n, a_{n-1}), \dots, \lambda_n \in (a_2, a_1)$. Оказывается, что функции $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ однозначно продолжаются до непрерывных во всем $\mathbb{R}^n$ и гладких почти всюду (за исключением гиперплоскостей $x_i = 0$, где $i = 1, \dots, n-1$). Набор функций $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ называется *эллиптическими координатами*, связанными с данным семейством софокусных квадрик.

Следующее утверждение, доказанное Якоби, устанавливает связь между эллиптическими и декартовыми координатами точки.

Предложение 1 (Якоби). *При $k = 1, \dots, n$ справедливы следующие равенства.*

$$x_k^2 = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (a_k - \lambda_i)}{\prod\limits_{j \neq k} (a_k - a_j)} \tag{2.2}$$

Доказательство. Докажем утверждение для $k = 1$. Остальные случаи разбираются аналогично. Напишем уравнения связи между эллиптическими и декартовыми координатами.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1 - \lambda_1} + \dfrac{x_2^2}{a_2 - \lambda_1} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n - \lambda_1} = 1 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1 - \lambda_2} + \dfrac{x_2^2}{a_2 - \lambda_2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n - \lambda_2} = 1 \\ \dotfill \\ \dfrac{x_1^2}{a_1 - \lambda_n} + \dfrac{x_2^2}{a_2 - \lambda_n} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n - \lambda_n} = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Для каждого i умножим i-е уравнение системы 2.3 на $a_n - \lambda_i$. Затем из первых $n-1$ уравнений вычтем последнее. После чего для всех $i < n$ разделим i-е уравнение на $\lambda_i - \lambda_n$. Отбрасывая последнее равенство, получим следующую систему из $n-1$ уравнений на $n-1$ декартову координату.

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 - a_n}{(a_1 - \lambda_1)(a_1 - \lambda_n)} x_1^2 + \ldots + \dfrac{a_{n-1} - a_n}{(a_{n-1} - \lambda_1)(a_{n-1} - \lambda_n)} x_{n-1}^2 = 1 \\ \dfrac{a_1 - a_n}{(a_1 - \lambda_2)(a_1 - \lambda_n)} x_1^2 + \ldots + \dfrac{a_{n-1} - a_n}{(a_{n-1} - \lambda_2)(a_{n-1} - \lambda_n)} x_{n-1}^2 = 1 \\ \dotfill \\ \dfrac{a_1 - a_n}{(a_1 - \lambda_{n-1})(a_1 - \lambda_n)} x_1^2 + \ldots + \dfrac{a_{n-1} - a_n}{(a_{n-1} - \lambda_{n-1})(a_{n-1} - \lambda_n)} x_{n-1}^2 = 1 \end{cases}$$

Теперь будем последовательно избавляться от переменных $x_{n-1}, \dots, x_2$ тем же способом, что и выше. В итоге получим, что

$$\frac{\prod\limits_{j\neq k} (a_k - a_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (a_k - \lambda_i)} x_k^2 = 1,$$

откуда вытекает требуемая формула. Что и требовалось доказать.

Для сокращения записи введем следующие обозначения.

- $\Delta_k = \prod\limits_{i=1}^{n} (a_k - \lambda_i)$
- $\Delta_k^j = \prod\limits_{i\neq j} (a_k - \lambda_i)$
- $\rho_k = \prod\limits_{j\neq k} (a_k - a_j)$
- $\sigma^m_{i_1,\dots,i_k}(b_1, \dots, b_n)$ — при $m > 0$ элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $\{b_1, \dots, b_n\} \backslash \{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\}$, при $m = 0$ тождественная единица, при $m = -1$ тождественный 0

Используя эти обозначения, равенство 2.2 можно переписать так:

$$x_k^2 = \frac{\Delta_k}{\rho_k}. \tag{2.4}$$

Докажем еще одно утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Предложение 2. *При $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ справедлива формула:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{\rho_k (a_k - \lambda_i) (a_k - \lambda_j)} = 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Напишем уравнения i-й и j-й эллиптических координат.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1 - \lambda_i} + \dfrac{x_2^2}{a_2 - \lambda_i} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n - \lambda_i} = 1 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1 - \lambda_j} + \dfrac{x_2^2}{a_2 - \lambda_j} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{a_n - \lambda_j} = 1 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$\frac{(\lambda_j - \lambda_i)\, x_1^2}{(a_1 - \lambda_i)(a_1 - \lambda_j)} + \ldots + \frac{(\lambda_j - \lambda_i)\, x_n^2}{(a_n - \lambda_i)(a_n - \lambda_j)} = 0.$$

Поскольку $i \neq j$, то, вообще говоря, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Разделим полученное уравнение на $\lambda_j - \lambda_i$ и применим формулу 2.4. Что и требовалось.

Геометрическая интерпретация этого утверждения следующая: *софокусные квадрики в точках пересечения ортогональны.* Этот факт был тоже отмечен Якоби в работе [2].

§ 3. Формулы суммирования

В этом параграфе мы докажем несколько утверждений о суммах некоторых специальных рациональных выражений. Мы применим их в следующем параграфе для осуществления перехода от декартовых координат к эллиптическим.

Предложение 3. *Пусть s, m — целые неотрицательные числа, не превосходящие $n-1$, тогда*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^s \cdot \sigma_k^m(a_1, \ldots, a_n)}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)} = \\ &= \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } m+s = n-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Доказательство. Зафиксируем s и рассмотрим многочлен $P(z)$, определенный формулой

$$P(z) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m z^{n-1-m} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^s \cdot \sigma_k^m(a_1, \ldots, a_n)}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)}.$$

.

Переставим знаки суммирования и воспользуемся теоремой Виета.

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^s\,(z - a_1)\ldots(z - a_{k-1})\,(z - a_{k+1})\ldots(z - a_n)}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)}$$

Осталось заметить, что при всех k выполнено равенство $P(a_k) = a_k^s$. А поскольку $\deg P \leqslant n-1$, имеем $P(z) \equiv z^s$. Сравнивания коэффициенты при степенях $P(z)$, получаем требуемое равенство. Что и требовалось доказать.

Предложение 4. *Справедлива следующая формула суммирования.*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k - b} \cdot \frac{1}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(a_1 - b)\ldots(a_n - b)}\end{aligned} \tag{3.2}$$

Доказательство. Вынесем в выражении слева дробь $(-1)^{n+1}/\prod_i(a_i - b)$ за скобки, получим:

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n+1}}{(a_1 - b)\ldots(a_n - b)} \sum_{k=1}^{n} \frac{(b - a_1)\ldots(b - a_{k-1})\,(b - a_{k+1})\ldots(b - a_n)}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(a_1 - b)\ldots(a_n - b)} Q(b),\end{aligned}$$

где, $Q(b)$ является многочленом по b степени $\leqslant n-1$. Однако, нетрудно видеть, что $Q(a_k) = 1$ при $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $Q(b) \equiv 1$. Что и требовалось доказать.

Предложение 5. *При всех $l = 1, \dots, n$ справедлива следующая формула.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_1)\dots(a_k - b_{l-1})\,(a_k - b_{l+1})\dots(a_k - b_n)}{(a_k - a_1)\dots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\dots(a_k - a_n)}\sigma_k^m(a_1, \dots, a_n) = \\ = \sigma_l^m(b_1, \dots, b_n) \tag{3.3}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен $R(z)$, заданный формулой

$$R(z) = \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m z^{n-1-m} \cdot \\ \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_1)\dots(a_k - b_{l-1})\,(a_k - b_{l+1})\dots(a_k - b_n)}{(a_k - a_1)\dots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\dots(a_k - a_n)}\sigma_k^m(a_1, \dots, a_n)\right).$$

Изменим порядок суммирования и воспользуемся теоремой Виета. Получим, что

$$R(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k - b_1)\dots(a_k - b_{l-1})\,(a_k - b_{l+1})\dots(a_k - b_n)}{(a_k - a_1)\dots(a_k - a_{k-1})\,(a_k - a_{k+1})\cdot\dots(a_k - a_n)} \\ \cdot ((z - a_1)\dots(z - a_{k-1})\,(z - a_{k+1})\dots(z - a_n)).$$

Заметим, что $R(a_k) = (a_k - b_1)\dots(a_k - b_{l-1})\,(a_k - b_{l+1})\dots(a_k - b_n)$ при всех $k = 1, \dots, n$. Поскольку $R(z)$ — многочлен степени $\leqslant n-1$, значит,

$$R(z) = (z - b_1)\dots(z - b_{l-1})\,(z - b_{l+1})\dots(z - b_n)\,.$$

Следовательно, коэффициент при z^{n-1-m} у $R(z)$ равен $(-1)^m\sigma_l^m(b_1, \dots, b_n)$, откуда вытекает требуемое равенство. Что и требовалось доказать.

§ 4. Движение точки по инерции в $\mathbb{R}^n$

Перед тем как перейти доказательству теоремы 2, рассмотрим вспомогательную задачу.

Пусть материальная точка движется по инерции в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(x_1, \dots, x_n)$. Найдем параметры софокусных квадрик семейства 1.1, которых касается траектория материальной точки.

Пусть частица в некоторый момент времени t находилась в точке с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ и имела вектор скорости в этой точке, равный $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$. В таком случае траектория частицы есть прямая, заданная параметрически:

$$(x_1 + \tau\dot{x}_1, \dots, x_n + \tau\dot{x}_n)\,, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Чтобы найти точки пересечения этой прямой с квадрикой параметра μ, нужно решить следующее квадратное относительно параметра τ уравнение:

$$\frac{(x_1 + \tau\dot{x}_1)^2}{a_1 - \mu} + \dots + \frac{(x_n + \tau\dot{x}_n)^2}{a_n - \mu} = 1.$$

Заметим, что прямая касается квадрики в том и только в том случае, когда дискриминант этого квадратного относительно τ уравнения равен нулю. Это условие можно переписать следующим образом.

$$\begin{gathered}\left(\frac{x_1\dot{x}_1}{a_1-\mu}+\ldots+\frac{x_n\dot{x}_n}{a_n-\mu}\right)^2=\\=\left(\frac{\dot{x}_1^2}{a_1-\mu}+\ldots+\frac{\dot{x}_n^2}{a_n-\mu}\right)\left(\frac{x_1^2}{a_1-\mu}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n-\mu}-1\right)\end{gathered}\tag{4.1}$$

Следовательно, чтобы найти квадрики, которых касается траектория материальной точки, нужно решить уравнение 4.1 относительно μ.

Сперва преобразуем это уравнение: раскроем скобки в обеих частях этого равенства, перенесем все слагаемые в левую часть и упростим ее, выделив полные квадраты.

$$\frac{\dot{x}_1^2}{a_1-\mu}+\ldots+\frac{\dot{x}_n^2}{a_n-\mu}-\sum_{i<j}\frac{K_{i,j}^2}{(a_i-\mu)(a_j-\mu)}=0$$

Здесь $K_{i,j}=x_i\dot{x}_j-x_j\dot{x}_i$. Домножим обе части этого уравнения на $\prod_i(a_i-\mu)$.

$$\sum_{k=1}^n\prod_{m\neq k}(a_m-\mu)\,\dot{x}_k^2-\sum_{i<j}\prod_{m\neq i,j}(a_m-\mu)\,K_{i,j}^2=0\tag{4.2}$$

Полученное уравнение будем называть *уравнением касания*. Его степень равна $n-1$. Обозначим через F_m коэффициент при $2\cdot(-1)^{n-1-m}\mu^{n-m-1}$. Получим следующие равенства.

$$F_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sigma_k^m(a_1,\ldots,a_n)\,\dot{x}_k^2-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\sigma_{i,j}^{m-1}(a_1,\ldots,a_n)\,K_{i,j}^2\tag{4.3}$$

Замечание 5. Заметим, что все функции F_m являются гладкими на фазовом пространстве нашей динамической системы. При этом функция F_0 равна полной механической энергии материальной точки.

Изучим теперь свойства этих функций. В декартовых координатах сделать это будет довольно трудно, поскольку условия касания софокусных квадрик тесно связаны с эллиптическими координатами, порождаемыми этим семейством. Поэтому перейдем в эллиптические координаты.

Согласно предложению 1 $x_k^2=\dfrac{\Delta_k}{\rho_k}$. Продифференцируем это равенство и разделим на 2:

$$x_k\dot{x}_k=-\frac{1}{2\rho_k}\sum_{i=1}^n\Delta_k^i\dot{\lambda}_i.\tag{4.4}$$

Для сокращения записи знак суммы в дальнейшем будем избегать. Используя формулы 1.1, 4.4, получим:

$$\dot{x}_k^2=\frac{(x_k\dot{x}_k)^2}{x_k^2}=\frac{1}{4\rho_k\Delta_k}\Delta_k^p\Delta_k^q\dot{\lambda}_p\dot{\lambda}_q.\tag{4.5}$$

Подставим формулы 1.1, 4.4, 4.5 в 4.1, раскроем скобки и умножим полученное уравнение на 4.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta\dot\lambda_p\dot\lambda_q = \\
&=\frac{\Delta_\beta}{\rho_\alpha\rho_\beta\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\alpha\dot\lambda_p\dot\lambda_q-\frac{1}{\rho_\alpha\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\alpha\dot\lambda_p\dot\lambda_q
\end{aligned}\tag{4.6}$$

Перенесем все слагаемые влево. Упростим левую часть полученного уравнения, собрав его коэффициенты при $\dot\lambda_p\dot\lambda_q$. Рассмотрим два случая.

1) $p\neq q$. Коэффициент при $\dot\lambda_p\dot\lambda_q$ имеет следующий вид.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta-\frac{\Delta_\beta}{\rho_\alpha\rho_\beta\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\alpha+\\
&+\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^q_\alpha\Delta^p_\beta-\frac{\Delta_\beta}{\rho_\alpha\rho_\beta\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^q_\alpha\Delta^p_\alpha+\\
&+\frac{2}{\rho_\alpha\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\alpha
\end{aligned}$$

Упростим сумму первых двух слагаемых. Для этого сначала вынесем $\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta$ вместе со знаменателем за скобки. Затем упростим выражение в скобках. После чего представим рациональное выражение относительно μ в виде разности двух дробей.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta-\frac{\Delta_\beta}{\rho_\alpha\rho_\beta\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\alpha=\\
&=\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta\left(1-\frac{\Delta_\beta\Delta^q_\alpha}{\Delta_\alpha\Delta^q_\beta}\right)=\\
&=\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta\left(1-\frac{a_\beta-\lambda_q}{a_\alpha-\lambda_q}\right)=\\
&=\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta\frac{a_\alpha-a_\beta}{a_\alpha-\lambda_q}=\\
&\qquad=\frac{\Delta^p_\alpha\Delta^q_\beta}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\lambda_q)}\left(\frac{1}{a_\beta-\mu}-\frac{1}{a_\alpha-\mu}\right)
\end{aligned}$$

Теперь раскроем скобки в полученном выражении и во втором слагаемом поменяем местами α и β. Получим

$$\frac{\Delta_\beta\Delta_\alpha}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\left(\frac{1}{(a_\alpha-\lambda_q)(a_\alpha-\lambda_p)(a_\beta-\lambda_q)}-\frac{1}{(a_\beta-\lambda_q)(a_\beta-\lambda_p)(a_\alpha-\lambda_q)}\right).$$

Аналогично поступим со вторыми двумя слагаемыми:

$$\frac{\Delta_\beta\Delta_\alpha}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\left(\frac{1}{(a_\alpha-\lambda_p)(a_\alpha-\lambda_q)(a_\beta-\lambda_p)}-\frac{1}{(a_\beta-\lambda_p)(a_\beta-\lambda_q)(a_\alpha-\lambda_p)}\right).$$

Сумма этих двух выражений равна

$$2\frac{\Delta_\beta\Delta_\alpha}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\frac{a_\beta-a_\alpha}{(a_\alpha-\lambda_p)(a_\alpha-\lambda_q)(a_\beta-\lambda_p)(a_\beta-\lambda_q)}.$$

Представим $a_\beta - a_\alpha$ как $a_\beta - \lambda_p - a_\alpha + \lambda_p$ и просуммируем выражение выше сначала по α, а затем по β.

$$
\begin{aligned}
&2\frac{\Delta_\beta\Delta_\alpha}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\frac{a_\beta-\lambda_p-a_\alpha+\lambda_p}{(a_\alpha-\lambda_p)(a_\alpha-\lambda_q)(a_\beta-\lambda_p)(a_\beta-\lambda_q)} = \\
&= 2\frac{\Delta_\beta}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)(a_\beta-\lambda_p)(a_\beta-\lambda_q)}\left((a_\beta-\lambda_p)\frac{\Delta_\alpha}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)(a_\alpha-\lambda_q)} - \frac{\Delta_\alpha}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_q)}\right)
\end{aligned}
$$

Используя результат утверждений 1, 2, упростим предыдущее выражение.

$$
-2\frac{\Delta_\beta}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)(a_\beta-\lambda_p)(a_\beta-\lambda_q)} = -2\frac{\Delta_\beta^p\Delta_\beta^q}{\rho_\beta\Delta_\beta(a_\beta-\mu)}
$$

Мы получили, что сумма первых четырех слагаемых равна пятому слагаемому, взятому с противоположным знаком. Следовательно, коэффициент при $\dot\lambda_p\dot\lambda_q$ равен нулю при $p \neq q$. Рассмотрим второй случай.

2) $p = q$. Коэффициент при $\dot\lambda_p^2$ имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta_\alpha^p\Delta_\beta^p - \frac{\Delta_\beta}{\rho_\alpha\rho_\beta\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta_\alpha^p\Delta_\alpha^p + \\
&+ \frac{1}{\rho_\alpha\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)}\Delta_\alpha^p\Delta_\alpha^p.
\end{aligned}
$$

Как и в первом случае упростим сумму первых двух слагаемых.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta_\alpha^p\Delta_\beta^p - \frac{\Delta_\beta}{\rho_\alpha\rho_\beta\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)(a_\beta-\mu)}\Delta_\alpha^p\Delta_\alpha^p = \\
&= \frac{\Delta_\alpha^p\Delta_\beta^p}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\lambda_p)}\left(\frac{1}{a_\beta-\mu} - \frac{1}{a_\alpha-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

Раскроем скобки в полученном выражении и просуммируем второе слагаемое по β, используя формулы 2.2:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Delta_\alpha^p\Delta_\beta^p}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\lambda_p)}\frac{1}{a_\beta-\mu} - \frac{\Delta_\beta^p\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha\rho_\beta(a_\alpha-\lambda_p)}\frac{1}{a_\alpha-\mu} = \\
&= \frac{\Delta_\beta^p}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\left(\frac{\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)}\right) - \frac{\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)(a_\alpha-\mu)}\left(\frac{\Delta_\beta^p}{\rho_\beta}\right) = \\
&= \frac{\Delta_\beta^p}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\left(\frac{\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)}\right) - \frac{\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)(a_\alpha-\mu)} = \\
&= \frac{\Delta_\beta^p}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\left(\frac{\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)}\right) - \frac{\Delta_\alpha^p\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha\Delta_\alpha(a_\alpha-\mu)}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, коэффициент перед $\dot\lambda_p^2$ имеет следующий вид:

$$
\frac{\Delta_\beta^p}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\left(\frac{\Delta_\alpha^p}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)}\right).
$$

Вычислим значение суммы $\dfrac{\Delta^p_\alpha}{\rho_\alpha(a_\alpha-\lambda_p)}$. Для этого напишем явную формулу ее слагаемых.

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{a_\alpha-\lambda_p}\cdot\frac{(a_\alpha-\lambda_1)\dots(a_\alpha-\lambda_{p-1})(a_\alpha-\lambda_{p+1})\dots(a_\alpha-\lambda_n)}{(a_\alpha-a_1)\dots(a_\alpha-a_{\alpha-1})(a_\alpha-a_{\alpha+1})\dots(a_\alpha-a_n)}$$

Представим каждое $a_\alpha-\lambda_i$ в виде $a_\alpha-\lambda_p+\lambda_p-\lambda_i$. Таким образом, числитель каждой дроби есть многочлен степени $\leqslant n-1$ от $a_\alpha-\lambda_p$. Поскольку в знаменателе дробей всегда присутствует множитель $a_\alpha-\lambda_p$, по формуле суммирования 3.1 эту сумму можно упростить и переписать в следующем виде.

$$\sum_{a=1}^n \frac{1}{a_\alpha-\lambda_p}\cdot\frac{(\lambda_p-\lambda_1)\dots(\lambda_p-\lambda_{p-1})(\lambda_p-\lambda_{p+1})\dots(\lambda_p-\lambda_n)}{(a_\alpha-a_1)\dots(a_\alpha-a_{\alpha-1})(a_\alpha-a_{\alpha+1})\dots(a_\alpha-a_n)}$$

Поскольку числитель у всех дробей общий, то по формуле 3.2 преобразуем это выражение к виду

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_p)\dots(\lambda_{p-1}-\lambda_p)(\lambda_{p+1}-\lambda_p)\dots(\lambda_n-\lambda_p)}{(a_1-\lambda_p)\,(a_2-\lambda_p)\dots(a_{n-1}-\lambda_p)(a_n-\lambda_p)}.$$

Обозначим его через A_p, тогда коэффициент при λ_p выглядит так:

$$A_p\sum_{\beta=1}^n\frac{\Delta^p_\beta}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)}.$$

В итоге, уравнение 4.1 мы привели к следующему виду:

$$\sum_{p=1}^n\left(\sum_{\beta=1}^n\frac{\Delta^p_\beta}{\rho_\beta(a_\beta-\mu)}\right)A_p\dot\lambda_p^2=0.$$

Домножим это уравнение на $\prod_i(a_i-\mu)$.

$$\sum_{p=1}^n\left(\sum_{\beta=1}^n\frac{\Delta^p_\beta}{\rho_\beta}\prod_{i\neq\beta}(a_i-\mu)\right)A_p\dot\lambda_p^2=0$$

Поскольку в самом начале мы разделили уравнение на 4, из последнего соотношения следует, что

$$F_m=\frac{1}{8}\sum_{p=1}^n\left(\sum_{\beta=1}^n\frac{\Delta^p_\beta}{\rho_\beta}\sigma^m_\beta(a_1,\dots,a_n)\right)A_p\dot\lambda_p^2.$$

Осталось упростить внутреннюю сумму. Для этого воспользуемся формулой суммирования 3.3.

$$\sum_{\beta=1}^n\frac{\Delta^p_\beta}{\rho_\beta}\sigma^m_\beta(a_1,\dots,a_n)=$$
$$=\sum_{\beta=1}^n\frac{(a_k-\lambda_1)\dots(a_k-\lambda_{p-1})\,(a_k-\lambda_{p+1})\dots(a_\beta-\lambda_n)}{(a_\beta-a_1)\dots(a_\beta-a_{\beta-1})\,(a_\beta-a_{\beta+1})\dots(a_\beta-a_n)}\sigma^m_\beta(a_1,\dots,a_n)=$$
$$=\sigma^m_p(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\,.$$

Итак, получаем следующие формулы:

$$F_m = \frac{1}{8}\sum_{p=1}^{n} \sigma_p^m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) A_p \dot{\lambda}_p^2.$$

Отметим, что в эллиптических координатах функции F_m записываются в более простом виде. Однако исследование свойств этих функций мы будем проводить с точки зрения Гамильтоновой механики. Поэтому перейдем к координатно-импульсному представлению.

Мы уже заметили, что функция F_0 равна полной механической энергии материальной точки (см. 5). Положим $\hat{A}_p = A_p^{-1}$. Согласно определению обобщенных импульсов

$$p_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_i} = \frac{1}{4} A_i \dot{\lambda}_i,$$

откуда $\dot{\lambda}_i = 4\hat{A}_i p_i$. Следовательно,

$$F_m = 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \hat{A}_i p_i^2. \tag{4.7}$$

Докажем несколько утверждений о свойствах функций F_i. Первым и наиболее важным из всех свойств является следующее.

Предложение 6. *Для любых $i, j = 0, \ldots, n-1$ и любого $k = 1, \ldots, n$ выполнено равенство*

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k}\frac{\partial F_j}{\partial p_k} - \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_k}\frac{\partial F_i}{\partial p_k} = 0.$$

Доказательство. Вычислим сначала частные производные, фигурирующие в формуле. Для краткости будем считать, что $\sigma(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sigma$.

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k} = 2\sum_{m \neq k} \sigma_{m,k}^i \hat{A}_m p_m^2 + 2\sum_{m=1}^{n} \sigma_m^i \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} p_m^2 =$$
$$= 2\sigma_k^i \frac{\partial \hat{A}_k}{\partial \lambda_k} p_k^2 + 2\sum_{m \neq k}\left(\sigma_{m,k}^{i-1}\hat{A}_m + \sigma_m^i \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k}\right) p_m^2$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_k} = 4\sigma_k^i \hat{A}_k p_k$$

Следовательно выражение $\dfrac{\partial F_i}{\partial \lambda_k}\dfrac{\partial F_j}{\partial p_k} - \dfrac{\partial F_j}{\partial \lambda_k}\dfrac{\partial F_i}{\partial p_k}$ равно

$$8\hat{A}_k p_k \cdot \sum_{m \neq k}\left(\left(\sigma_k^j \sigma_{m,k}^{i-1} - \sigma_k^i \sigma_{m,k}^{j-1}\right)\hat{A}_m + \left(\sigma_k^j \sigma_m^i - \sigma_k^i \sigma_m^j\right)\frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k}\right) p_m^2.$$

Покажем, что при всех m выполнено равенство

$$\left(\sigma_k^j \sigma_{m,k}^{i-1} - \sigma_k^i \sigma_{m,k}^{j-1}\right)\hat{A}_m + \left(\sigma_k^j \sigma_m^i - \sigma_k^i \sigma_m^j\right)\frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} = 0.$$

Для этого заметим два легко проверяемых тождества.

$$\lambda_m \sigma^{i-1}_{m,k} + \sigma^i_{m,k} = \sigma^i_k$$
$$\lambda_k \sigma^{i-1}_{m,k} + \sigma^i_{m,k} = \sigma^i_m$$

Вычтем из первого равенства второе и разделим получившееся тождество на $\lambda_m - \lambda_k$. Получим, что $\sigma^{i-1}_{m,k} = \dfrac{\sigma^i_k - \sigma^i_m}{\lambda_m - \lambda_k}$. Аналогично получаем, что $\sigma^{j-1}_{m,k} = \dfrac{\sigma^j_k - \sigma^j_m}{\lambda_m - \lambda_k}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma^j_k \sigma^{i-1}_{m,k} - \sigma^i_k \sigma^{j-1}_{m,k}\right) \hat{A}_m + \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right) \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} = \\
&= \frac{\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m}{\lambda_k - \lambda_m} \hat{A}_m + \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right) \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} = \\
&= \left(\sigma^j_k \sigma^i_m - \sigma^i_k \sigma^j_m\right) \left(\frac{\hat{A}_m}{\lambda_k - \lambda_m} + \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} \right).
\end{aligned}$$

Равенство $\dfrac{\hat{A}_m}{\lambda_k - \lambda_m} + \dfrac{\partial \hat{A}_m}{\partial \lambda_k} = 0$ проверяется нетрудным вычислением. Что и требовалось доказать.

Давайте переформулируем это утверждение на языке скобок Пуассона. Рассмотрим в пространстве гладких функций, определенных в $T^*\mathbb{R}^n$, n скобок Пуассона: $\{\cdot,\cdot\}_1, \ldots, \{\cdot,\cdot\}_n$, задаваемых равенствами:

$$\{F, G\}_i = \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad \text{для любого } i = 1, \ldots, n.$$

То, что каждая из этих антисимметричных форм удовлетворяет тождеству Лейбница, проверяется нетрудными вычислениями.

Согласно утверждению 6 все функции F_i являются коммутирующими относительно каждой из этих скобок Пуассона. Это условие является достаточно сильным и весьма необычным. Однако по всей видимости оно не было замечено классиками. Именно это наблюдение сыграет ключевую роль в доказательстве теоремы 2.

Напомним, что стандартная скобка Пуассона на кокасательном расслоении к $\mathbb{R}^n$ имеет следующий вид: $\{\cdot,\cdot\} = \sum_{i=1}^n \{\cdot,\cdot\}_i$. Отсюда получаем важное следствие.

Следствие 1. Функции F_m коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

Отметим, что обратное, вообще говоря, неверно, то есть из того, что $\{F, G\} = 0$ не следует, что $\{F, G\}_i = 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Поскольку гамильтонианом рассматриваемой динамической системы является функция F_0, функции $F_1, \ldots, F_{n-1}$ являются первыми интегралами материальной точки, движущейся по инерции в $\mathbb{R}^n$. А следовательно, многочлен касания остается неизменным вдоль любой геодезической в $\mathbb{R}^n$ (то есть прямой), что весьма очевидно.

Оказывается, система функций $F_0, \ldots, F_{n-1}$ является функционально независимой. Это нам гарантирует следующее утверждение.

Предложение 7. *Функции F_m функционально независимы.*

Доказательство. Покажем, что почти всюду $\dfrac{D(F_0, \ldots, F_{n-1})}{D(p_1 \ldots, p_n)} \neq 0$. Имеем:

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} = 4\sigma_j^i \hat{A}_j p_j.$$

Следовательно,

$$\frac{D(F_0, \ldots, F_{n-1})}{D(p_1 \ldots, p_n)} = 4^n \begin{vmatrix} \sigma_1^0 & \ldots & \sigma_n^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^{n-1} & \ldots & \sigma_n^{n-1} \end{vmatrix} \prod_{j=1}^{n} \hat{A}_j p_j.$$

Заметим, что выражение за определителем не нуль почти всюду. Покажем, что и определитель почти всюду не нуль. Сопоставим j-му столбцу матрицы внутри определителя многочлен $f_j(z) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} z^{n-1-i}(-1)^i \sigma_j^i$. Отметим, что определитель равен нулю в том и только в том случае, когда многочлены $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ линейно зависимы. Из теоремы Виета следует, что для любого j справедливо равенство:

$$f_j(z) = (z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_{j-1})(z - \lambda_{j+1}) \ldots (z - \lambda_n).$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ попарно различны, тогда $f_j(\lambda_i) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $i \neq j$. Отсюда немеденно следует, что при таких $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ многочлены $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ линейно независимы. Поскольку условия вида $\lambda_i = \lambda_j$ при $i \neq j$ задают множество меры нуль в фазовом прстранстве, функции $F_0, \ldots, F_{n-1}$ являются функционально независимыми. Что и требовалось доказать.

Следовательно, задача о движении материальной точки является вполне интегрируемой и ее первые интегралы $F_0, \ldots, F_{n-1}$ полностью описывают касание траектории семейства софокусных квадрик.

То, что задача о движении материальной точки по инерции в $\mathbb{R}^n$ интегрируема, является общеизвестным фактом. Действительно, в качестве первых интегралов можно рассмотреть импульсы, соответствующие декартовым координатам. Однако нам важно, что построенная система функционально независимых коммутирующих первых интегралов $F_0, \ldots, F_{n-1}$ связана с касанием софокусных квадрик.

Теперь определим скольких софокусных квадрик касается траектория материальной точки в $\mathbb{R}^n$. Для этого докажем вспомогательное утверждение о разделении переменных.

Предложение 8 (Формула разделения переменных). *На совместном уровне $f_0, \ldots, f_{n-1}$ первых интегралов $F_0, \ldots, F_{n-1}$ уравнения движения имеют следующий вид.*

$$\dot{\lambda}_k = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod\limits_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{\prod_{i=1}^{n} (a_i - \lambda_k) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{n-1-k} (-1)^k f_k \right)}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен касания $P(\mu) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu^{n-1-k} (-1)^k f_k$ на совместном уровне $(f_0, \ldots, f_{n-1})$. Напомним, что $P(\mu_0) = 0$ в том и только в том случае, когда траектория касается квадрики параметра μ_0. По теореме Виета, используя формулы 4.7, получаем, что

$$P(\mu) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (\lambda_1 - \mu) \ldots (\lambda_{k-1} - \mu)(\lambda_{k+1} - \mu) \ldots (\lambda_n - \mu) \hat{A}_k p_k^2.$$

Отсюда заключаем, что для любого $k = 1, \ldots, n$ выполнено равенство

$$P(\lambda_k) = 2 \prod_{i=1}^{n} (a_i - \lambda_k)\, p_k^2. \tag{4.9}$$

Используя связь между обобщенными импульсами и скоростями, а также соотношения 4.9, получаем:

$$\dot{\lambda}_k = 4\hat{A}_j p_j = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod\limits_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{\prod_{i=1}^{n} (a_i - \lambda_k) P(\lambda_k)}.$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что в формуле разделения переменных под корнем стоит многочлен относительно λ_i, который равен произведению многочлена $\prod_j (a_j - \lambda_i)$ и многочлена касания. Используя это наблюдение, докажем следующее утверждение.

Предложение 9. *Пусть $f_0, \ldots, f_{n-1}$ — совместный уровень первых интегралов $F_0, \ldots, F_{n-1}$, тогда многочлен $P(\mu) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mu^{n-1-k} (-1)^k f_k$ имеет $n-1$ вещественный корень с учетом кратности.*

Доказательство. Докажем для нечетных n. Для четных доказательство аналогичное. Рассмотрим уравнения движения на совместном уровне $F_0 = f_0, \ldots, F_{n-1} = f_{n-1}$ (см. 4.8). Из них следует, что для почти всех наборов $f_0, \ldots, f_{n-1}$ на промежутках $(-\infty, a_n)$, $(a_n, a_{n-1}), \ldots, (a_2, a_1)$ должны найтись подынтервалы, на которых многочлен

$$V(z) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} (-1)^k f_k \right)$$

принимал бы положительные значения.

Заметим, что $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}(-1)^k f_k$ стремится к $-\infty$ при $x \to -\infty$, а $Q(z) = \prod\limits_{i=1}^{n}(a_i - z)$ к $+\infty$. Следовательно, $V(z) \to -\infty$ при $x \to -\infty$. Поскольку на интервале $(-\infty, a_n)$ должен быть подынтервал, на котором $V(z) > 0$, на промежутке $(-\infty, a_n)$ многочлен $V(z)$ должен иметь хотя бы один корень.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $V(z) < 0$ при $z \in (a_n, a_n + \varepsilon)$, тогда на промежутке (a_n, a_{n-1}) должен найтись корень $P(z)$. Если же $V(z) > 0$ при $z \in (a_n, a_n + \varepsilon)$, то $P(z)$ должен иметь по крайней мере два корня на промежутке $(-\infty, a_n)$. Таким образом, на промежутке $(-\infty, a_{n-1})$ многочлен $P(z)$ имеет по крайней мере 2 корня. Рассуждая аналогично по индукции, докажем требуемое утверждение.

Таким образом, любая прямая в $\mathbb{R}^n$ касается в точности $n-1$ софокусной квадрики. Отметим, что М. Шаль в работе [3] доказал, что любая прямая в $\mathbb{R}^3$ касается ровно двух софокусных квадрик.

Подытожим этот параграф следующим следствием.

Следствие 2. Траектория материальной точки, движущейся по инерции в $\mathbb{R}^n$ касается $n-1$ софокусной квадрики. Параметры этих квадрик, взятые вместе с энергией частицы образуют систему из n функционально независимых попарно коммутирующих первых интегралов.

§ 5. Доказательство основной теоремы

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики разных типов в $\mathbb{R}^n$ и $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$. Фиксируя квадрику Q_i, мы фиксируем эллиптическую координату с номером c_i и наоборот (фиксируя некоторую эллиптическую координату, мы фиксируем некоторую квадрику из семейства софокусных). Поскольку все квадрики Q_i невырождены и имеют различный тип, Q задается как поверхность, на которой зафиксированы k эллиптических координат $\lambda_{c_1}, \ldots, \lambda_{c_k}$. Импульсы, соответствующие этим координатам, равны нулю на Q, а оставшиеся эллиптические координаты являются координатами на этом пересечении.

Функция $H = F_0$ является гамильтонианом геодезического потока на Q, поэтому по предложению 6 функции $F_0, \ldots, F_{n-1}$ являются первыми интегралами этой системы. Действительно, чтобы ограничить функцию F_j на квадрику Q_i нужно зафиксировать соответствующую эллиптическую координату, а импульс этой координаты положить равным 0. Это никак не отразится на предложении 6. Следовательно, уравнение касания 4.2 сохраняется вдоль любой геодезической на Q. Согласно предложению 9 это уравнение всегда имеет $n-1$ корень. Часть корней известны: это параметры квадрик $Q_1, \ldots, Q_k$. Оставшиеся $n-k-1$ корней суть параметры квадрик, которых нетривиально касаются все касательные линии проведенные к данной геодезической. Тем самым, пункт 2 доказан.

Для завершения доказательства заметим, что функции $F_0, \ldots, F_{n-k-1}$ функционально независимы на Q. Проверка этого факта проводится как в предложении 7. Теорема доказана.

§ 6. Топология компактных пересечений софокусных квадрик

В этом параграфе мы докажем теорему 3 о классах гомеоморфности компактных пересечений нескольких невырожденных софокусных квадрик.

Для начала отметим, что согласно теореме В. В. Козлова о топологических препятствиях к интегрируемости (см. [14]) геодезический поток на двумерной компактной замкнутой ориентируемой аналитической поверхности обладает дополнительным аналитическим первым интегралом в том и только в том случае, когда эта поверхность является либо двумерной сферой S^2, либо двумерным тором T^2. Заметим, что если пересечение $n-2$ софокусных квадрик в $\mathbb{R}^n$ компактно, то по теореме В. В. Козлова и теореме 2 связная компонента такого пересечения гомеоморфна либо двумерной сфере S^2 или двумерному тору T^2. Этот факт был отмечен ранее В. А. Кибкало.

Однако, таким подход неприменим в случае большего числа степеней свободы. Поэтому сперва подробно рассмотрим более простую задачу. Определим классы гомеоморфности компактных пересечений двух софокусных квадрик в $\mathbb{R}^4$. Компактность пересечения равносильна тому, что одна из квадрик является эллипсоидом. В свою очередь, это равносильно тому, что зафиксирована эллиптическая координата λ_1.

Трехмерный эллипсоид в $\mathbb{R}^4$ есть склейка двух одинаковых областей, ограниченных эллипсоидом, по их границе. Более того, эллиптические координаты $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ на трехмерном эллипсоиде в $\mathbb{R}^4$ соответствуют эллиптическим координатам $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ в области внутри двумерного эллипсоида в $\mathbb{R}^3$.

Поскольку мы исследуем компактные пересечения, то возможны три варианта фиксации координат: λ_1 и λ_2, λ_1 и λ_3, λ_1 и λ_4. Рассмотрим первый случай. Фиксируя эллиптическую координату λ_1' в области внутри двумерного эллипсоида, мы получим поверхность, гомеоморфную двумерной сфере S^2 (см. рис 6a). Следовательно, склеив две такие области по границе, получим, что пересечение двух невырожденных софокусных квадрик в $\mathbb{R}^4$, соответствующих координатам λ_1 и λ_2, гомеоморфно несвязному объединению двух сфер, то есть прямому призведению нульмерной и двумерной сфер $S^0 \times S^2$.

Во втором случае мы должны зафиксировать в области внутри двумерного эллипсоида эллиптическую координату λ_2'. Получим поверхность, гомеоморфную цилиндру (см. рис. 6b). При склейке двух таких областей эти цилиндры скляются в двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$.

В третьем случае, фиксируя λ_3' в области, ограниченной двумерным эллипсоидом, получим несвязное объединение двух дисков (см. рис 6c). При склейке двух таких одинаковых областей 4 диска преобразуются в две двумерные сферы, то есть в прямое произведение сфер $S^2 \times S^0$.

Таким образом, компактное пересечение двух невырожденных софокусных квадрик в $\mathbb{R}^4$ всегда гомеоморфно прямому произведению двух сфер. Заметим,

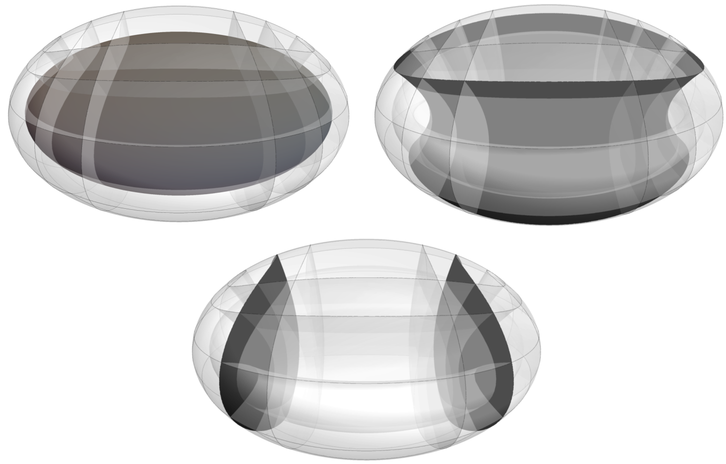

Рис. 3. Область внутри двумерного эллипсоида с зафиксированной эллиптической координатой a) λ_1', b) λ_2', c) λ_3'.

что размерности этих сфер равны количеству незафиксированных эллиптических координат между двумя зафиксированными и количеству незафиксированных координат, больших максимальной зафиксированной.

Теперь перейдем к общему случаю. Для того чтобы избежать путаницы в обозначениях, будем считать, что $a_1 < \ldots < a_n$ и $\lambda_1 \in (-\infty, a_1), \lambda_2 \in (a_1, a_2), \ldots, \lambda_n \in (a_{n-1}, a_n)$.

Пусть квадрики $Q_1, \ldots, Q_k$ упорядочены по возрастанию их параметров. Обозначим через c_i номер эллиптической координаты, соответствующей квадрике Q_i. Согласно предположению $c_1 < \cdots < c_k$. Положим $c_{k+1} = n + 1$.

Предположим, что $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{k} Q_i$ компактно. Компактность такого пересечения равносильна тому, что одна из квадрик Q_i является эллипсоидом. В свою очередь, это эквивалентно тому, что координата λ_1 зафиксирована на Q, то есть $c_1 = 1$.

Разобьем номера эллиптических координат на следующие k групп: $I_1 = \{c_1, \ldots, c_2 - 1\}, I_2 = \{c_2, \ldots, c_3 - 1\}, \ldots, I_k = \{c_k, \ldots, c_{k+1} - 1\}$. Заметим, что все эти множества не пересекаются и покрывают все числа от 1 до n. Более того, на Q зафиксировано ровно по одной координате их каждого множества.

Обозначим через $m_j = c_{j+1} - c_j - 1$ мощность множества I_j, уменьшенную на 1. Теорема 3 утверждает, что поверхность Q гомеоморфна прямому произведению сфер $S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_k}$. Покажем это.

Доказательство. Спрева напомним, что эллиптические координаты, как функции точки в $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, являются непрерывными. Согласно предложению 1 имеют место равенства 2.2. Для любого

$\alpha = 1, \dots, k$ и $i \in I_\alpha$ распишем соответствующее равенство для координаты x_i:

$$x_i^2 = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} (a_i - \lambda_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (a_i - a_j)} = \frac{\prod\limits_{j \in I_\alpha} (a_i - \lambda_j)}{\prod\limits_{j \in I_\alpha, j \neq i} (a_i - a_j)} \cdot \frac{\prod\limits_{j \notin I_\alpha} (a_i - \lambda_j)}{\prod\limits_{j \notin I_\alpha} (a_i - a_j)}. \tag{6.1}$$

Обозначим второй множитель в этом произведении через $B_i(\lambda)$. Заметим, что первый множитель представляет собой не что иное, как формулу связи типа 2.2 для эллиптических координат, соответствующих семейству софокусных квадрик

$$\frac{z_1^2}{a_{c_\alpha} - \lambda} + \frac{z_2^2}{a_{c_\alpha + 1} - \lambda} + \dots + \frac{z_{m_i+1}^2}{a_{c_{\alpha+1}-1} - \lambda} = 1.$$

Поэтому первый множитель в произведении 6.1 неотрицательный. Следовательно, $B_i(\lambda) \geqslant 0$ для любого i.

Покажем, что на Q все $B_i(\lambda) > 0$. Для этого достаточно показать, что $B_i(\lambda) \neq 0$ на этом пересечении. Пусть $B_i(\lambda) = 0$ для некоторого i, тогда найдется $j \notin I_\alpha$, такое, что $\lambda_j = a_i$. Поскольку значение a_i могут принимать только две эллиптические координаты: λ_i и λ_{i+1}, имеем $j = i + 1$. Так как $j \notin I_\alpha$, то $j \in I_{\alpha+1}$ и является наименьшим элементом в этом множестве. Наименьшие координаты в множествах I_k фиксированы на Q, следовательно, координата λ_j зафиксирована. А поскольку квадрики $Q_1, \dots, Q_k$ невырождены, то на Q имеем $\lambda_{i+1} \in (a_i, a_{i+1})$. Значит, $\lambda_j \neq a_i$. Поэтому все $B_i(\lambda) > 0$ на рассматриваемом пересечении.

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(y_1, \dots, y_n)$ и зададим отображение f на множестве Q по следующей формуле:

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt{B_i(\lambda)}} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Поскольку $B_i(\lambda) > 0$ на Q, отображение f корректно определено. Более того, так как эллиптические координаты суть непрерывные функции точки, отображение f является непрерывным. При этом, для любого $\alpha = 1, \dots, k$ и любого $i \in I_\alpha$

$$y_i^2 = \frac{\prod\limits_{j \in I_\alpha} (a_i - \lambda_j)}{\prod\limits_{j \in I_\alpha, j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

Покажем, что f инъективно. Действительно, зная все y_i мы однозначно восстановим эллиптические координаты ее прообраза. А поскольку, в добавок к этому, знаки координат точки и координат образа этой точки соответственно совпадают, мы однозначно можем восстановить прообраз точки $(y_1, \dots, y_n)$ при отображении f.

Так как Q компактно, а f — непрерывная биекция, то Q гомеоморфно $f(Q)$. Найдем класс гомеоморфности $f(Q)$. Поскольку $y_{c_i}, \dots, y_{c_{i+1}-1}$ связаны с $\lambda_{c_i}, \dots, \lambda_{c_{i+1}-1}$, как эллиптические координаты с декартовыми, фиксируя квадрику Q_i мы получаем ограничение вида

$$\frac{y_{c_i}^2}{a_{c_i} - \lambda_{c_i}} + \dots + \frac{y_{c_{i+1}-1}^2}{a_{c_{i+1}-1} - \lambda_{c_i}} = 1. \tag{6.2}$$

В $\mathbb{R}^{m_i+1}(y_{c_i},\dots,y_{c_{i+1}-1})$ эта поверхность представляет собой эллипсоид размерности m_i, который гомеоморфен сфере S^{m_i}.

Таким образом, поверхность $f(Q)$ есть пересечение квадрик 6.2 по всем $i = 1,\dots,k$. Заметим, что каждая переменная y_i встречается лишь единажды во всех этих уравнениях, следовательно $f(Q)$ гомеоморфно прямому произведению сфер $S^{m_1}\times\dots\times S^{m_k}$. Что и требовалось доказать.

Замечание 6. Отметим, что в этом доказательстве мы нигде не пользовались интегрируемостью соответствующего геодезического потока.

§ 7. Системы с потенциалом

Ключевую роль в доказательстве теоремы 3 сыграло утверждение 6. В этом параграфе мы опишем класс интегрируемых гамильтоновых систем, которые удовлетворяют условию этого утверждения, после чего докажем теорему 4.

Рассмотрим движение материальной точки в $\mathbb{R}^n$ под действием поля сил с потенциалом $V(x_1,\dots,x_n)$. Полной механической энергией этой системы является функция $G_0 = F_0 + V$. Следуя В. В. Козлову (см. [16]), будем искать дополонительные первые интегралы $G_1,\dots,G_{n-1}$ к гамильтониану G_0 в следующем виде: $G_i = F_i + f_i$, где $i = 1,\dots,n-1$, а функции $f_1,\dots,f_{n-1}$ зависят только от пространственных переменных.

Замечание 7. Отметим, что В. В. Козлов использовал этот метод для поиска дополнительных первых интегралов биллиарда с потенциалом внутри эллипса. При таком подходе отражение можно не учитывать, то есть искать дополнительные первые интегралы, как интегралы задачи без отражения.

Если нам удастся найти функции f_i, то согласно предложению 7 функции $G_0,\dots,G_{n-1}$ будут функционально независимыми.

Итак, функции G_i являются первыми интегралами рассматриваемой системы в том и только в том случае, когда $\{G_i, G_0\} = 0$ для любого $i = 1,\dots,n-1$, то есть

$$0 = \{G_i, G_0\} = \{F_i + f_i, F_0 + V\} = \{F_i, V\} - \{F_0, f_i\}.$$

Распишем полученные уравнения в эллиптических координатах.

$$4\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^i \hat{A}_j p_j \frac{\partial V}{\partial\lambda_j} - 4\sum_{j=1}^{n}\hat{A}_j p_j \frac{\partial f_i}{\partial\lambda_j} = 0$$

Они эквивалентны следующей системе уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial f_i}{\partial\lambda_j} = \sigma_j^i \frac{\partial V}{\partial\lambda_j} \quad \text{для любых } i, j.$$

Эта система имеет решение в том и только в том случае, когда выполнено условие равенства смешанных производных, то есть

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\left(\sigma_j^i \frac{\partial V}{\partial\lambda_j}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\left(\sigma_k^i \frac{\partial V}{\partial\lambda_k}\right) \quad i = 1,\dots,n-1, \quad j,k = 1,\dots,n.$$

Расписывая производные от произведения и используя равенство $\sigma^i_j - \sigma^i_k = (\lambda_j - \lambda_k)\sigma^i_{jk}$, приведем эту систему уравнений в частных производных к системе 1.1. Таким образом, если гладкая функция V удовлетворяет уравнениям 1.1, то найдутся гладкие функции $f_1, \dots, f_n$, а следовательно, система будет обладать n функционально независимыми первыми интегралами.

Оказывается, что это требование является сильным. Если гладкая функция V удовлетворяет уравнениям 1.1, то функции $G_0, \dots, G_{n-1}$ удовлетворяют предложению 6. В этом можно нетрудно убедиться.

Применяя рассуждения доказательства теоремы 2, получаем, что если гладкая функция V удовлетворяет уравнениям 1.1, то задача о движении материальной точки на пересечении нескольких невырожденных софокусных квадрик под действием потенциала V является квадратично интегрируемой. Тем самым, теорема 4 доказана.

Отметим, что потенциал Гука с центром в начале координат удовлетворяет теореме 4. Также интегрируемым является потенциал $V = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{x_i^2}$, найденный В. В. Козловым. Здесь α_i произвольные вещественные константы. Хоть он и не попадает под условие теоремы 4, однако функции f_i для него находятся.

Список литературы

[1] C. G. G. Jacobi, "Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1839, № 19, 309–313.

[2] К. Якоби, *Лекции по динамике*, Гостехиздат, М., 1936.

[3] M. Chasles, "Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **11** (1846), 5–20.

[4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.

[5] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, "Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела", *Функц. анализ и его прил.*, **29**:3 (1995), 1–15.

[6] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация, т. 1, 2*, Издательский дом "Удмуртский университет", Ижевск, 1999.

[7] Н. Т. Зунг, "Топологические инварианты интегрируемых геодезических потоков на многомерном торе и сфере", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **205** (1995), 63–78.

[8] K. M. Davison, H. R. Dullin, A. V. Bolsinov, "Geodesics on the ellipsoid and monodromy", *Journal of Geometry and Physics*, **57**:12 (2006), 2437–2454.

[9] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, издательство "МГУ", М., 1991.

[10] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, издательство "РХД", М.–Ижевск, 2010.

[11] В. В. Фокичева, "Описание особенностей системы "бильярд в эллипсе"", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 5, 31–34.

[12] В. В. Фокичева, "Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2014, № 4, 18–27.

[13] В. В. Фокичева, “Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, *Матем. сб.*, **206**:10 (2015), 127–176.

[14] В. В. Козлов, “Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем”, *Докл. АН СССР*, **249**:6 (1979), 1299–1302.

[15] S. Hitler, S. L. Merdano, “Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums”, *Geometry & Topology*, **17** (2013), 1497–1534.

[16] В. В. Козлов, “Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде”, *Прикл. матем. и механ.*, **59**:1 (1995), 3–9.

Г. В. Белозеров (G. V. Belozerov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

Поступила в редакцию
08.11.2022