ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 509, с. 5–7

МАТЕМАТИКА

УДК 514.745.82

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ СОФОКУСНЫХ КВАДРИК

 Г. В. Белозеров[1,*]

Представлено академиком РАН А.Т. Фоменко
Поступило 19.10.2022 г.
После доработки 26.10.2022 г.
Принято к публикации 20.12.2022 г.

Классическая теорема Якоби–Шаля утверждает, что касательные линии, проведенные к геодезической на n-осном эллипсоиде в евклидовом n-мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще $(n-2)$-х софокусных с ним квадрик, общих для всех точек данной геодезической. Из этой теоремы немедленно следует интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде. В данной работе доказывается обобщение этого результата для геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Кроме того, если добавить к такой системе потенциал Гука с центром в начале координат, интегрируемость задачи сохранится.

Ключевые слова: интегрируемая система, софокусные квадрики, эллиптические координаты

DOI: 10.31857/S2686954322600628, **EDN:** CQSGJC

Рассмотрим в евклидовом n-мерном пространстве семейство софокусных квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n-\lambda}=1.$$

Здесь $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ – фиксированные числа, а λ – вещественный параметр. Квадрику этого семейства будем называть *вырожденной*, если ее параметр равен a_i для некоторого $i = 1,\ldots,n$, иначе квадрику будем называть *невырожденной*.

К. Якоби в работе [1] показал, что через каждую точку $\mathbb{R}^n$ проходит в точности n софокусных квадрик. Этот факт позволяет ввести в евклидовом n-мерном пространстве *эллиптические координаты* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ($\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$): каждой точке мы сопоставляем набор параметров софокусных квадрик, содержащих ее, а затем упорядочиваем эти числа по возрастанию. В работе [1] К. Якоби доказал ортогональность этой системы координат.

М. Шаль доказал, что любая прямая в евклидовом $\mathbb{R}^n$ касается $n-1$ софокусной квадрики. Рассмотрим этот результат с механической точки зрения.

Пусть в евклидовом $\mathbb{R}^n$ по инерции движется материальная точка единичной массы. Ее траекторией является прямая, заданная параметрически: $(x_1+\tau\dot{x}_1,\ \ldots,\ x_n+\tau\dot{x}_n)$, $\tau\in\mathbb{R}$. В таком случае уравнение на параметры квадрик, которых касается рассматриваемая траектория, имеет вид:

$$F_0\lambda^{n-1}-F_1\lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}F_{n-1}=0, \qquad (1)$$

где функции F_m вычисляются по формуле

$$F_m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^m\dot{x}_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\sigma_{i,j}^{m-1}K_{i,j}.$$

Здесь $K_{i,j}=x_i\dot{x}_j-x_j\dot{x}_i$, а $\sigma^m_{i_1,\ldots,i_k}$ – элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $\{x_1,\ldots,x_n\}/\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}$. Считаем, что $\sigma_{i,j}^{-1}\equiv 0$, $\sigma_{i,j}^{0}\equiv 1$.

Заметим, что F_0 есть полная механическая энергия системы и степень уравнения (1) почти всегда равна $n-1$. Следовательно, согласно результату Шаля это уравнение имеет $n-1$ вещественный корень и все эти корни являются первыми интегралами рассматриваемой динамической системы. Поскольку старший коэффициент уравнения (1) совпадает с полной механической энергией, функции $F_0,\ldots,F_m$ являются первыми интегралами этой системы. Оказывается, что эти функции являются функционально независимыми и попарно коммутирующими относительно

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru*

стандартной скобки Пуассона. Проверить этот факт легче всего в эллиптических координатах.

Теперь рассмотрим геодезический поток на n-осном эллипсоиде в $\mathbb{R}^n$. Эта динамическая система является вполне интегрируемой в силу известной теоремы Якоби-Шаля.

Теорема 1 (Якоби и Шаль). *Касательные линии, проведенные во всех точках данной геодезической на эллипсоиде в евклидовом n-мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще $(n-2)$-х софокусных с ним квадрик, общих для всех точек этой геодезической.*

Замечание 1. Отметим, что с помощью метода разделения переменных Якоби показал интегрируемость геодезического потока на n-осном эллипсоиде в $\mathbb{R}^n$ для произвольного n (см. [1]), а М. Шаль доказал теорему 1 в трехмерном случае (см. [2]).

Современное доказательство теоремы Якоби-Шаля можно найти в работах [3, 4]. Отметим, что из этой теоремы следует интегрируемость биллиарда внутри $(n-1)$-осного эллипсоида. Доказательство этого факта, а также другие следствия теоремы Якоби-Шаля изложены в работах [5, 6].

Не так давно В.А. Кибкало исследовал вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Он доказал, что геодезический поток на пересечении $(n-2)$-х квадрик в $\mathbb{R}^n$ является вполне интегрируемой системой.

Оказывается, этот результат можно обобщить, если рассмотреть геодезический поток на пересечении произвольного числа невырожденных софокусных квадрик. Все дело в том, что функции $F_1,\ldots,F_{n-1}$ останутся первыми интегралами геодезического потока на таком пересечении.

Теорема 2 (Белозеров). *Пусть $Q_1,\ldots,Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики различных типов в евклидовом n-мерном пространстве и $Q=\bigcap_{i=1}^{k} Q_i$, тогда*

1. *геодезический поток на Q квадратично интегрируем*;

2. *касательные линии, проведенные ко всем точкам данной геодезической, касаются помимо $Q_1,\ldots,Q_k$ еще $n-k-1$ квадрик софокусных с $Q_1,\ldots,Q_k$ и общих для всех точек этой геодезической.*

Замечание 2. Отметим, что геодезические на пересечении невырожденных софокусных квадрик, вообще говоря, не являются геодезическими на какой-либо из квадрик $Q_1,\ldots,Q_k$. Поэтому теорема 2 не является следствием классической теоремы Якоби—Шаля.

Возникает естественный вопрос о классе гомеоморфности такого пересечения.

Хорошо известен результат В.В. Козлова о том, что геодезический поток на компактной двумерной ориентируемой аналитической поверхности обладает дополнительным функционально независимым аналитическим первым интегралом в том и только в том случае, когда эта поверхность гомеоморфна либо двумерной сфере S^2, либо двумерному тору T^2 (см. [7]). Заметим, что из этого факта и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Связная компонента компактного пересечения $(n-2)$-х софокусных квадрик разных типов в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфна либо двумерной сфере S^2, либо двумерному тору T^2.*

Отметим, что это следствие было получено ранее В.А. Кибкало.

В случае $\dim Q > 2$ такие рассуждения не сработают. Тем не менее можно определить класс гомеоморфности поверхности Q, не прибегая к интегрируемости геодезического потока на ней, а используя эллиптические координаты.

Поскольку $Q_1,\ldots,Q_k$ — квадрики различных типов, их параметры соответствуют разным эллиптическим координатам. Поэтому, пересекая эти квадрики, мы фиксируем k эллиптических координат. В частности, если поверхность Q компактна, одна из квадрик является эллипсоидом, и, следовательно, первая эллиптическая координата на Q будет зафиксирована.

Итак, пусть Q — компактная поверхность и для любого i квадрика Q_i задается в эллиптических координатах уравнением $\lambda_{l_i}=\lambda^0_{l_i}=\mathrm{const}$. Без ограничения общности можем считать, что $1=l_1<\ldots<l_k$. Для $i=1,\ldots,k$ положим $m_i=l_{i+1}-l_i$, где $l_{k+1}=n+1$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 3 (Белозеров). *Пусть $Q_1,\ldots,Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики различных типов в евклидовом n-мерном пространстве и $Q=\bigcap_{i=1}^{k} Q_i$ компактно, тогда Q гомеоморфно прямому произведению сфер $S^{m_1-1}\times\ldots\times S^{m_k-1}$, где числа m_i определены выше.*

Замечание 3. В работе [8] С. Гитлер и С.Л. Медрано изучали топологию пересечений нескольких соосных квадрик с единичной сферой. Они получили, что такие пересечения в общем случае гомеоморфны связным суммам прямых произведений сфер. Отметим, что софокусные квадрики являются соосными, более того в силу теоремы 3 их компактные пересечения гомеоморфны прямым произведениям сфер.

Рассмотрим теперь задачу о движении материальной точки единичной массы в евклидовом n-мерном пространстве под действием упругой силы коэффициента k, центр которой расположен в начале координат. В этом случае полная механическая энергия имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \ldots + \dot{x}_n^2\right) + \frac{k}{2}\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) = F_0 + V.$$

Следуя методу, описанному В.В. Козловым в работе [9], найдем дополнительные первые интегралы рассматриваемой системы. Будем искать их в виде $G_m = F_m + f_m$, где $m = 1,\ldots,n-1$ и функция f_m зависит только от пространственных переменных. Нетрудными вычислениями можно показать, что в качестве f_m можно взять функцию $\frac{k}{2}\left(\Delta_1^m x_1^2 + \ldots + \Delta_n^m x_n^2\right)$, где Δ_i^m — элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $\{a_1,\ldots,a_n\}/\{a_i\}$.

К. Якоби в работе [1] показал, что задача о движении материальной точки по n-осному эллипсоиду в евклидовом n-мерном пространстве под действием упругой силы коэффициента k, центр которой расположен в начале координат, является интегрируемой. Доказательство этого факта он получил опять же с помощью метода разделения переменных.

Оказывается, что задача останется интегрируемой, если в качестве конфигурационного пространства взять пересечение нескольких невырожденных софокусных квадрик. Это происходит вследствие того, что, как и в случае задачи без потенциала, функции $G_1,\ldots,G_{n-1}$ останутся первыми интегралами.

Теорема 4 (Белозеров). *Пусть $Q_1,\ldots,Q_k$ — невырожденные софокусные квадрики различных типов в евклидовом n-мерном пространстве и $Q = \bigcap_{i=1}^{k} Q_i$. Тогда задача о движении материальной точки по Q под действием упругой силы коэффициента k с центром в начале координат является квадратично интегрируемой.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит В.А. Кибкало за постановку задачи и А.Т. Фоменко за ряд ценных замечаний и комментариев.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ №22-71-10106.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.: Гостехиздат, 1936.
2. *Chasles M.* Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré // Journal de Mathématiques Pures et Appliqués. 1846. V. 11. P. 5–20.
3. *Арнольд В.И.* Несколько замечаний об эллиптических координатах // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 133, Изд-во "Наука", Ленинград. отд., Л., 1984. С. 38–50.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. С. 472.
5. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
6. *Драгович В., Раднович М.* Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010.
7. *Козлов В.В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
8. *Gitler S., Medrano S.L.* Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums // Geometry & Topology. 2013. V. 17. P. 1497–1534.
9. *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ. 1995. Т. 59. № 1. С. 3–9.

INTEGRABILITY OF A GEODESIC FLOW ON THE INTERSECTION OF SEVERAL CONFOCAL QUADRICS

G.V. Belozerov[a]

[a] *Moscow State University M.V. Lomonosov, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.T. Fomenko

The classical Jacobi-Schall theorem states that Tangent lines drawn at all points of a geodesic curve on a quadric in n-dimensional Euclidean space are tangent, as well as to the given quadric, to $n-2$ other confocal quadrics, which are the same for all points of the geodesic curve. This theorem immediately implies the integrability of a geodesic flow on an ellipsoid. In this paper, we prove a generalization of this result for a geodesic flow on the intersection of several confocal quadrics. Moreover, if we add the Hooke's potential field centered at the origin of coordinates to such a system, the integrability of the problem is preserved.

Keywords: integrable system, confocal quadrics, elliptic coordinates