

Топология слоений Лиувилля трехмерных софокусных билиардов с интегрируемым потенциалом четвертой степени¹

Белозеров Г. В.²

Аннотация. Рассматриваются билиарды внутри многомерных областей, ограниченных софокусными квадрами, с углами излома на границе, равными $\pi/2$. Согласно теореме Якоби-Шаля (о геодезических на квадрах) классические билиарды внутри таких областей (т.е. в отсутствии внешних сил) являются интегрируемыми. В работе определены условия на потенциал V , при добавлении которого интегрируемость системы сохранится. Найден явный вид интегрируемого полиномиального потенциала четвертой степени. Для трехмерных билиардов с таким потенциалом внутри эллипсоида, а также бесфокусных столов описано устройство слоения Лиувилля в окрестности слоев, отвечающих невырожденным особенностям.

Ключевые слова: билиард, интегрируемый билиард, слоение Лиувилля, топологические инварианты, атомы.

§1 Описание системы. Условие интегрируемости

1.1 Софокусные квадраи. Рассмотрим в евклидовом $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$ семейство софокусных квадрак

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1. \quad (1)$$

Здесь $a_1 > \dots > a_n$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр. На рисунке 1 проиллюстрированы софокусные квадраи на плоскости и в трехмерном пространстве. Софокусное семейство обладает многими замечательными свойствами. Приведем несколько из них без доказательств.

- Софокусные квадраи ортогональны в точках пересечения.
- Через каждую точку $\mathbb{R}^n$ проходит в точности n софокусных квадрак с учетом кратности. Если обозначить параметры этих квадрак через $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, то $\lambda_1 \in [a_2, a_1]$, $\lambda_2 \in [a_3, a_2]$, $\dots$, $\lambda_n \in (-\infty, a_n]$.

Определение 1. Координаты $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ называются *эллиптическими*.

Замечание 1. Эллиптические координаты были введены К. Якоби (см., например, [1]) при доказательстве интегрируемости геодезического потока на поверхности n -осного эллипсоида.

¹Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-10106.

²Московский Государственный университет имени М. В. Ломоносова, gleb0511beloz@yandex.ru

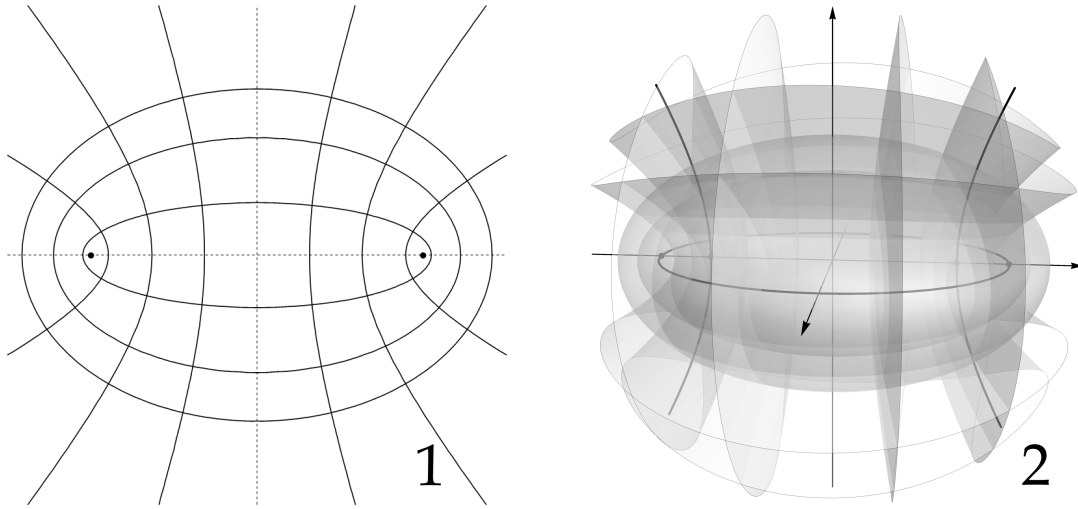


Рис. 1: Софокусные квадрики: 1 — на плоскости, 2 — в трехмерном пространстве.

Выведем несколько соотношений между эллиптическими и декартовыми координатами. Согласно определению λ_i являются корнями уравнения 1. Умножим его на $\prod_{i=1}^n (\lambda - a_i)$ и перенесем слагаемые в одну сторону

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - a_i) - \prod_{i \neq 1} (\lambda - a_i) x_1^2 - \cdots - \prod_{i \neq n} (\lambda - a_i) x_n^2 = 0$$

Согласно формулам Виета выражение слева равно $(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$. Приравнявая соответствующие коэффициенты многочленов, заключаем

[illegible]

Здесь и далее через $\sigma_k^{i_1 \dots i_p}(b_1, \dots, b_n)$ будем обозначать элементарный симметрический многочлен степени k от переменных $\{b_1, \dots, b_n\} \setminus \{b_{i_1}, \dots, b_{i_p}\}$. Предполагаем, что $\sigma_{-1}^{i_1 \dots i_p} \equiv 0$, $\sigma_0^{i_1 \dots i_p} \equiv 1$. Более кратко последнюю систему можем переписать так:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{k-1}^i(a_1, \dots, a_n) x_i^2 = \sigma_k(a_1, \dots, a_n) - \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Если рассмотреть эти уравнения как систему на $x_1^2, \dots, x_n^2$ и решить ее, получим

$$x_k^2 = \frac{\prod_{i=1}^n (a_k - \lambda_i)}{\prod_{i \neq k} (a_k - a_i)} \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

1.2 Постановка задачи. Описание системы. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ компактную область D , ограниченную конечным числом софокусных квадрик с двугранными углами излома границы, равными $\pi/2$. Такую область будем называть *софокусным бильiardным столом*. На рисунке 2 представлены примеры софокусных столов на плоскости и в пространстве.

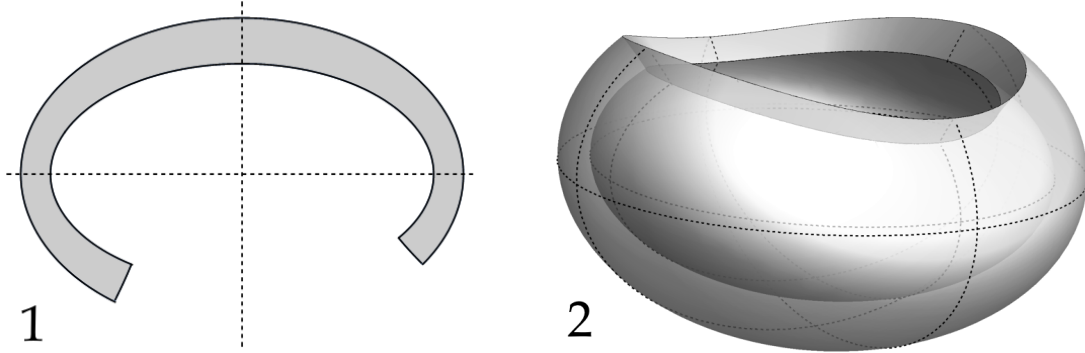


Рис. 2: Примеры софокусных столов: 1 — на плоскости, 2 — в трехмерном пространстве.

Пусть D — софокусный бильiardный стол, а V — функция, гладкая в окрестности стола D . Мы будем рассматривать следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри D под действием потенциала V , отражаясь от границы D абсолютно упруго. Такую динамическую систему мы будем называть *софокусным бильiardом с потенциалом V* .

Замечание 2. Приведенное выше описание системы не определяет динамику частицы в точках излома границы бильiardного стола. Однако ввиду того, что все двугранные углы излома равны $\pi/2$ (а не $3\pi/2$), движение частицы, попавшей на стык нескольких граней можно продолжить по непрерывности. Если частица пришла в точку P границы бильiardного стола с вектором скорости v и в этой точке смыкаются грани $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, то она выйдет из точки P с вектором скорости v' , который получается из v последовательным отражением от $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Фазовое пространство софокусного бильiardа является топологическим многообразием $M^{2n} = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x \mathbb{R}^3\} / \sim$, где $\sim$ — следующее отношение эквивалентности на границе бильiardного стола. Пары (x_1, v_1) и (x_2, v_2) эквивалентны в том и только том случае, когда $x_1 = x_2 \in \partial D$, а v_1 получается из v_2 путем нескольких отражений от гладких граней границы стола, смыкающихся в точке x .

Замечание 3. Тот факт, что M^{2n} является топологическим многообразием в случае $n = 3$, ранее был показан автором в работах [2, 3]. Для бильiardных книжек (обобщение софокусных бильiardов, введенное В. В. Ведюшкиной) аналогичный факт был доказан И. С. Харчевой в работе [4].

Замечание 4. Полная механическая энергия $H = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2) + V$ является первым интегралом софокусного бильярда.

1.3 Интегрируемость. Условие на потенциал V . Фазовое многообразие M^{2n} , как правило, является лишь кусочным-гладким. Разобьем его в объединение гладких “кусков” $\widetilde{M}^{2n}$. На $\widetilde{M}^{2n}$ корректно определена стандартная симплектическая форма ω , которая имеет непрерывные пределы “справа” и “слева” в точках излома M^{2n} (здесь под изломом подразумевается негладкость). Заметим, что на $\widetilde{M}^{2n}$ динамика материальной точки определяются векторным полем $v = \text{sgrad } H$. Такого вида динамические системы называются *кусочно-гладкими гамильтоновыми системами*. Следующее определение было введено А. Т. Фоменко.

Определение 2. Говорят, что кусочно-гладкая гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ является *интегрируемой по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле*, если существуют непрерывные на M^{2n} и гладкие на $\widetilde{M}^{2n}$ первые интегралы $F_0 = H, \dots, F_{n-1}$, такие, что

- 1) $F_0, \dots, F_{n-1}$ функционально независимы на $\widetilde{M}^{2n}$,
- 2) $F_0, \dots, F_{n-1}$ попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона на $\widetilde{M}^{2n}$.

Согласно теореме Якоби-Шаля об интегрируемости геодезического потока на квадраках (см., например, [1]), а также наблюдению В. В. Козлова и Д. В. Трещева (см. [5]) произвольный софокусный бильярд в отсутствии внешних сил (т.е. при $V = 0$) является интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Более того, все звенья произвольной траектории-ломаной (или их продолжения) касаются $n - 1$ общих софокусных квадрак. Параметры этих квадрак вместе с кинетической энергии образуют набор первых интегралов из определения 2. Напишем явные формулы первых интегралов этой задачи. Для этого рассмотрим движение материальной точки по инерции и найдем параметры софокусных квадрак семейства 1, которых касается ее траектория.

Пусть частица в некоторый момент времени t находилась в точке с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ и имела вектор скорости в этой точке, равный $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$. В таком случае траектория частицы есть прямая, заданная параметрически

$$(x_1 + \tau \dot{x}_1, \dots, x_n + \tau \dot{x}_n), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Чтобы найти точки пересечения этой прямой с квадракой параметра μ , нужно решить следующее квадратное относительно параметра τ уравнение:

$$\frac{(x_1 + \tau \dot{x}_1)^2}{a_1 - \mu} + \dots + \frac{(x_n + \tau \dot{x}_n)^2}{a_n - \mu} = 1.$$

Заметим, что прямая касается квадрики в том и только в том случае, когда дискриминант этого квадратного относительно τ уравнения равен нулю. Это условие можно переписать следующим образом.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_1 \dot{x}_1}{a_1 - \mu} + \dots + \frac{x_n \dot{x}_n}{a_n - \mu} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{\dot{x}_1^2}{a_1 - \mu} + \dots + \frac{\dot{x}_n^2}{a_n - \mu} \right) \left(\frac{x_1^2}{a_1 - \mu} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \mu} - 1 \right) \end{aligned}$$

Следовательно, чтобы найти квадрики, которых касается траектория материальной точки, нужно решить уравнение последнее относительно μ .

Сперва преобразуем это уравнение: раскроем скобки в обеих частях этого равенства, перенесем все слагаемые в левую часть и упростим ее, выделив полные квадраты.

$$\frac{\dot{x}_1^2}{a_1 - \mu} + \dots + \frac{\dot{x}_n^2}{a_n - \mu} - \sum_{i < j} \frac{K_{i,j}^2}{(a_i - \mu)(a_j - \mu)} = 0$$

Здесь $K_{i,j} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i$. Домножим обе части этого уравнения на $\prod_i (a_i - \mu)$.

$$\sum_{k=1}^n \prod_{m \neq k} (a_m - \mu) \dot{x}_k^2 - \sum_{i < j} \prod_{m \neq i,j} (a_m - \mu) K_{i,j}^2 = 0$$

Полученное уравнение будем называть *уравнением касания*. Обозначим через I_m коэффициент при $2 \cdot (-1)^{n-1-m} \mu^{n-m-1}$. Получим следующие равенства.

$$I_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_m^k(a_1, \dots, a_n) \dot{x}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_{m-1}^{ij}(a_1, \dots, a_n) K_{i,j}^2 \quad (4)$$

Заметим, что I_0 — кинетическая энергии. Поскольку все корни уравнения касания, а также его старший коэффициент являются первыми интегралами софокусного бильярда, система функций $(I_0, \dots, I_{n-1})$ — набор первых интегралов из определения 2. Все эти функции являются квадратичными по скоростям.

Для софокусного бильярда с потенциалом V будем искать первые интегралы в виде $F_k = I_k + f_k$, где f_k — функция зависящая лишь от пространственных переменных, а $f_0 = V$. В таком случае F_0 будет совпадать с H . Наша цель — найти условие на функцию V , при выполнении которого можно найти интегралы F_k указанным способом. Такая задача для $n = 2$ была решена В. В. Козловым в работе [6]. В этой статье он нашел дифференциальное уравнение на функцию V . Мы поступим аналогичным образом.

Теорема 1. *Функции $F_k = I_k + f_k$, где I_k — указанные выше квадратичные интегралы софокусного бильярда без потенциала, а f_k — функции, зависящие от пространственных переменных, являются первыми интегралами софокусного*

бильярда с потенциалом V в том и только том случае, когда V удовлетворяет следующей системе уравнений в частных производных.

$$\begin{aligned} & (a_j - a_i + x_i^2 - x_j^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + 3 \left(x_i \frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \right) x_i x_j + \sum_{l \neq i, j} x_l \left(x_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_l} - x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_l} \right) = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned} \quad (5)$$

Более того, если помимо энергии найдется хотя бы один первый интеграл вида $I_k + f_k(x)$, то найдутся и все остальные.

Перед тем как приступить к доказательству этой теоремы, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. Если функция V удовлетворяет системе 5, то для любой тройки попарно различных индексов i, j, l выполнено равенство

$$(a_i - a_j) x_l \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + (a_j - a_l) x_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_l} + (a_l - a_i) x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_i} = 0. \quad (6)$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим уравнения системы 5 для пар индексов (i, j) , (j, l) , (l, i) . Умножим уравнение для пары (i, j) на x_l , для пары (j, l) — на x_i , для пары (l, i) — на x_j , а затем сложим получившиеся равенства. В результате получится равенство 6. $\square$

Теперь приступим к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Поскольку F_i — первые интегралы рассматриваемой задачи, I_k — интегралы задачи без потенциала и f_k зависят лишь от пространственных переменных, получаем следующую цепочку равенств.

$$0 = \{F_k, F_0\} = \{I_k + f_k, I_0 + f_0\} = \{I_k, f_0\} + \{I_0, f_k\} \quad (7)$$

Выразим частные производные функции f_k из последнего равенства. Для этого вычислим частные производные I_k по $\dot{x}_i$ (см. формулу 4). Переменные в симметрических многочленах писать не будем, предполагая, что все они зависят от $a_1, \dots, a_n$.

$$\frac{\partial I_k}{\partial x_i} = \sigma_k^i \dot{x}_i - \sum_{l \neq i} \sigma_{k-1}^{il} x_l (x_l \dot{x}_i - x_i \dot{x}_l)$$

С учетом этих формул уравнение 7 можно переписать следующим образом.

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sigma_k^i \dot{x}_i - \sum_{l \neq i} \sigma_{k-1}^{il} x_l (x_l \dot{x}_i - x_i \dot{x}_l) \right)$$

Приравнивая слагаемые при соответствующих $\dot{x}_i$, получим выражения для частных производных функций f_k .

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \left(\sigma_k^i - \sum_{l \neq i} \sigma_{k-1}^{il} x_l^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{l \neq i} \sigma_{k-1}^{il} x_i x_l \frac{\partial V}{\partial x_l} \quad (8)$$

Совместность этой системы эквивалентна равенству смешанных производных. Получаем следующее условие на потенциал V .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\sigma_k^i - \sum_{l \neq i} \sigma_{k-1}^{il} x_l^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{l \neq i} \sigma_{k-1}^{il} x_i x_l \frac{\partial V}{\partial x_l} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\sigma_k^j - \sum_{l \neq j} \sigma_{k-1}^{jl} x_l^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_j} + \sum_{l \neq j} \sigma_{k-1}^{jl} x_j x_l \frac{\partial V}{\partial x_l} \right) \end{aligned}$$

Упростим это уравнение. Для этого мы раскроем скобки и воспользуемся следующим довольно простым соотношением: $\sigma_k^i - \sigma_k^j = (a_j - a_i) \sigma_{k-1}^{ij}$.

$$\begin{aligned} & \sigma_{k-1}^{ij} (a_j - a_i - x_j^2 + x_i^2) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \\ & + 3\sigma_{k-1}^{ij} \left(x_i \frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) + \sigma_{k-1}^{ij} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \right) x_i x_j + \\ & + \sum_{l \neq i, j} \left(\sigma_{k-1}^{jl} x_l^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} - \sigma_{k-1}^{il} x_l^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sigma_{k-1}^{il} x_i x_l \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_j} - \sigma_{k-1}^{jl} x_j x_l \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_i} \right) = 0 \end{aligned}$$

Разберемся с последним слагаемым. Заметим, что при $k = 1$ получившаяся система уравнений — в точности система 5. Поэтому для существования интеграла F_1 эта системы необходима и достаточна. Разберемся теперь с произвольным k . Для этого преобразуем последнее слагаемое. Добавим к нему сумму

$$\sum_{l \neq i, j} \sigma_{k-1}^{ij} x_l \left(x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_l} - x_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_l} \right),$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{l \neq i, j} x_l \left((\sigma_{k-1}^{jl} - \sigma_{k-1}^{il}) x_l \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + (\sigma_{k-1}^{il} - \sigma_{k-1}^{ij}) x_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_j} + (\sigma_{k-1}^{ij} - \sigma_{k-1}^{jl}) x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_i} \right) = \\ = \sum_{l \neq i, j} \sigma_{k-1}^{ijl} x_l \left((a_i - a_j) x_l \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + (a_j - a_l) x_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_l} + (a_l - a_i) x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Теперь остается воспользоваться леммой 1, согласно которой вся эта сумма равна нулю. Таким образом, разделив на σ_{k-1}^{ij} условие совместности для f_k снова систему 5. Значит, она является необходимой и достаточной.

Остается заметить, что по сути система 5 является необходимым и достаточным условием существования интеграла F_1 . Поэтому если F_1 существует, то найдутся и $F_2, \dots, F_{n-1}$. Абсолютно аналогично можно показать, что условие существования интеграла F_k ($k \geq 2$) эквивалентно системе 5. Следовательно, если F_k нашелся, то найдутся и остальные интегралы. Теорема 1 доказана. $\square$

Приведем без доказательства еще одно важное утверждение, которое проверяется абсолютно теми же методами, которыми мы пользовались при доказательстве теоремы 1.

Предложение 1. *Если потенциал V удовлетворяет системе 5, то функции F_i коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.*

Отсюда следует, что софокусные бильярды с потенциалами, удовлетворяющим уравнениям 5, являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле.

Замечание 5. На самом деле, в эллиптических координатах система 5 эквивалентна системе уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу.

§2 Интегрируемые потенциалы четвертой степени

В настоящем параграфе мы опишем все полиномиальные потенциалы четвертой степени в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие уравнениям 5, а также найдем явный вид первых интегралов F_k и запишем систему уравнений движения на поверхностях их совместного уровня.

Обозначим через $\mathcal{L}_{ij}$ дифференциальный оператор, соответствующий левой части формулы 5 для пары индексов (i, j) . Заметим, что подпространства многочленов четной и нечетной степеней являются инвариантными для всех этих операторов. Поэтому, если V — полиномиальный потенциал, $\mathcal{L}_{ij}V = 0$ и $V = V_0 + V_1$ — разложение V в сумму многочлена V_0 четной степени и нечетной V_1 , то $\mathcal{L}_{ij}V_0 = 0$ и $\mathcal{L}_{ij}V_1 = 0$.

Теорема 2. *Полином V , удовлетворяющий уравнениям 5, степени меньше либо равной 4 имеет следующий вид.*

$$V = p((x_1^2 + \dots + x_n^2)^2 - a_1x_1^2 - \dots - a_nx_n^2) + q(x_1^2 + \dots + x_n^2) + C \quad (9)$$

Здесь p, q, C — произвольные вещественные константы.

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что $V_1 = 0$. В нашем случае V_1 — сумма многочленов первой и третьей степеней. Для удобства индекс 1 внизу писать не будем.

Заметим, что если i, j, l — три попарно различных индекса и коэффициент при x_l многочлена $\mathcal{L}_{ij}V$ отличен от нуля, то коэффициент при $x_i x_j x_l$ в многочлене V

тоже не равен нулю. Поэтому в V мономы вида $x_i x_j x_l$ отсутствуют. Обозначим через c_{ij} коэффициент при $x_i^2 x_j$, через α_i — при x_i , а через β_i — при x_i^3 .

Коэффициент при x_i^3 многочлена $\mathcal{L}_{ij}V$ равен $5c_{ij}$, поэтому, если $\mathcal{L}_{ij}V = 0$, то $c_{ij} = 0$. Теперь заметим, что $\mathcal{L}_{ij}V = \alpha_j x_i - \alpha_i x_j + \dots$ (здесь многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка). Следовательно, если все $\alpha_i = 0$.

Значит, $V = \beta_1 x_1^3 + \dots + \beta_n x_n^3$. Покажем, что все $\beta_i = 0$. Действительно, посмотрим на коэффициент при $x_i^2 x_j$ многочлена $\mathcal{L}_{ij}V$. Он равен $3\beta_i$. Поэтому, если $\mathcal{L}_{ij}V = 0$, то все $\beta_i = 0$, т.е. $V_1 = 0$.

Шаг 2. Итак, согласно первому шагу $V = V_0$. Сперва заметим, что все константы автоматически удовлетворяют уравнению 5. Коэффициенты при мономах $x_i x_j$ равны нулю, поскольку $\mathcal{L}_{ij}x_i x_j = a_j - a_i \neq 0$. Значит, квадратичная часть многочлена V имеет вид $\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$. Обозначим ее через $V^{(2)}$. Имеем: $\mathcal{L}_{ij}V^{(2)} = 6(\alpha_j - \alpha_i)x_i x_j$. Следовательно, коэффициенты V при мономах вида $x_i^3 x_j$, $x_i^2 x_j x_l$, $x_i x_j x_k x_l$ равны нулю. Значит, многочлен V имеет следующий вид.

$$V = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i^4 + \sum_{i < j} c_{ij} x_i^2 x_j^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 + C$$

Найдем соотношения на константы. Коэффициент при $x_i x_j$ многочлена $\mathcal{L}_{ij}V$ равен $4(a_j - a_i)c_{ij} + 8(\alpha_j - \alpha_i)$. Отсюда находим, что $c_{ij} = \frac{2(\alpha_i - \alpha_j)}{a_j - a_i}$. Теперь вычислим коэффициент при $x_i^3 x_j$ у $\mathcal{L}_{ij}V$. Он равен $4c_{ij} + 6c_{ij} - 12\beta_i + 2c_{ij} - 12\beta_i$, отсюда $c_{ij} = 2\beta_i$. Значит, все β_i равны между собой. Обозначим это число через p . В таком случае все c_{ij} совпадают и равны $2p$. При этом, $\frac{\alpha_i - \alpha_j}{a_j - a_i} = p$. Положим $\alpha_1 = -pa_1 + q$. Отсюда заключаем, что $\alpha_i = -pa_i + q$ для всех i . Таким образом,

$$V = p((x_1^2 + \dots + x_n^2)^2 - a_1 x_1^2 - \dots - a_n x_n^2) + q(x_1^2 + \dots + x_n^2) + C.$$

Нетрудной проверкой легко убедиться, что полином V найденного вида удовлетворяет системе уравнений 5. $\square$

Теперь, используя формулы 8, найдем функции f_k и тем самым определим первые интегралы для билиарды с потенциалом вида 9. Напомним, что $f_0 = V$. Имеем:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 2p \sum_{l \neq i} (\sigma_k^i + \sigma_k^l) x_i x_l^2 + 4p \sigma_k^i x_i^3 - 2p \sigma_k^i x_i a_i + 2q \sigma_k^i x_i,$$

откуда

$$f_k = p \sum_i \sigma_k^i x_i^2 \sum_l x_l^2 - p \sum_i \sigma_k^i a_i x_i^2 + q \sum_i \sigma_k^i x_i^2. \quad (10)$$

Найдем явный вид уравнений движения системы на совместном уровне первых интегралов $F_0, \dots, F_n$. Сделаем это (следуя Якоби) в эллиптических координатах. Согласно формулам замены 2

$$f_k = -p \sigma_{k+1}(\lambda)(\sigma_1(a) - \sigma_1(\lambda)) + p(\sigma_{k+2}(a) - \sigma_{k+2}(\lambda)) + q(\sigma_{k+1}(a) - \sigma_{k+1}(\lambda)). \quad (11)$$

Здесь через λ обозначен набор $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, а через a — набор $a_1, \dots, a_n$. Считаем, что $\sigma_{n+1} \equiv 0$. Напомним, что в эллиптических координатах $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и сопряженных им импульсах $p_1, \dots, p_n$ функции I_k записываются так.

$$I_k = 2 \sum_{j=1}^n \sigma_k^j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A_j p_j^2, \quad \text{где } A_j = \frac{\prod_{i=1}^n (a_k - \lambda_j)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_k - \lambda_j)} \quad (12)$$

Теорема 3. На совместном уровне первых интегралов $F_0 = g_0, \dots, F_{n-1} = g_{n-1}$ уравнения движения бильярда с потенциалом вида 8 имеют следующий вид.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad (13)$$

$$\text{где } V(z) = \prod_{k=1}^n (a_k - z) \left((pz - q) \prod_{k=1}^n (a_k - z) + (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i g_i z^{n-1-i} \right).$$

Доказательство. Упростим выражение $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k F_k \lambda_m^{n-1-k}$ для всех $m = 1, \dots, n$.

Для этого разобьем эту сумму на два слагаемых: $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_k \lambda_m^{n-1-k}$, $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_k \lambda_m^{n-1-k}$, и преобразуем каждое из них. Начнем с первого. Согласно формулам 12 имеем.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_k \lambda_m^{n-1-k} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \sigma_k^j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A_j p_j^2 (-1)^k \lambda_m^{n-1-k} =$$

Поменяем местами знаки суммирования и применим теорему Виета.

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k^j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (-1)^k \lambda_m^{n-1-k} \right) A_j p_j^2 = \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (\lambda_m - \lambda_k) A_j p_j^2 = 2(-1)^{n-1} p_m^2 \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_m) \end{aligned}$$

Теперь упростим второе слагаемое. Для это воспользуемся явным видом функций f_k в эллиптических координатах (см. 11) и разобьем его на несколько элементарных сумм, каждую из которых вычислим в явном виде.

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_m^{n-1-k} (-1)^k \sigma_{k+1}(\lambda) = - \sum_{j=1}^n \lambda_m^{n-j} (-1)^j \sigma_j(\lambda) = - \prod_j (\lambda_m - \lambda_j) + \lambda_m^n = \lambda_m^n$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_m^{n-1-k} (-1)^k (\sigma_{k+1}(a) - \sigma_{k+1}(\lambda)) = - \prod_{k=1}^n (\lambda_m - a_k)$
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_m^{n-1-k} (-1)^k (\sigma_{k+2}(a) - \sigma_{k+2}(\lambda)) = \lambda_m \prod_{k=1}^n (\lambda_m - a_k) + \lambda_m^n (\sigma_1(a) - \sigma_1(\lambda))$

В итоге получаем, что $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_k \lambda_m^{n-1-k} = (p\lambda_m - q) \prod_{k=1}^n (\lambda_m - a_k)$. Значит, на поверхности совместного уровня первых интегралов F_i выполнены равенства

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k g_k \lambda_k^{n-1-k} = 2(-1)^{n-1} p_m \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_m) + (p\lambda_m - q) \prod_{k=1}^n (\lambda_m - a_k).$$

Из последнего равенства выразим квадрат импульса. Далее воспользуемся уравнениям Гамильтона и выразим импульс p_m из них. Приравняем эти выражения. Получим требуемые формулы. Теорема доказана. $\square$

В последующих параграфах, основываясь на теореме 3, мы опишем топологию слоения Лиувилля вблизи невырожденных особенностей биллиарда внутри эллипсоида с интегрируемым потенциалом степени 4.

§3 Два-атомы и их симметрии

Для описания слоения Лиувилля рассматриваемой биллиардной системы нам необходимо напомнить понятие 2-атома, привести простые примеры, а также указать некоторые симметрии атомов, которые понадобятся в дальнейшем. Подробная информация о 2-атомах и их свойствах изложена в работе [9].

Рассмотрим на компактном ориентируемом многообразии M^2 функцию Морса f . Напомним, что

Определение 3. Гладкая функция f на многообразии N^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки являются невырожденными, т.е. если $df|_x = 0$, то $d^2f|_x$ имеет полный ранг (равен n).

Функция Морса на компактном многообразии обладает лишь конечным количеством критических точек. При этом, согласно лемме Морса в окрестности критической точки на M^2 подходящим выбором криволинейных координат функция H приводится к виду $H = H_0 \pm x^2 \pm y^2$ (см., например, [10]). Однако лемма Морса дает лишь локальное представление функции в окрестности невырожденной точки. Глобальное устройство функции Морса в окрестности критического слоя однозначно описывается 2-атомом. Напомним его определение.

Определение 4. Пусть f — функция Морса на двумерном компактном многообразии M^2 и c — ее критическое значение. Предположим также, что c — единственное критическое значение функции f на отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Тогда связную компоненту P^2 множества $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, расслоенную на линии уровня функции f , будем называть *2-атомом (двумерным атомом)* (P^2, f) .

Все 2-атомы рассматриваются с точностью до следующего отношения эквивалентности.

Определение 5. Будем называть 2-атомы (P_1^2, f_1) и (P_2^2, f_2) *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между P_1^2 и P_2^2 , переводящий функцию f_1 в функцию f_2 .

Приведем несколько примеров 2-атомов. Если точка $x \in M^2$ является точкой минимума или точкой максимума функции H , то согласно лемме Морса, 2-атом, отвечающий этой особенности, представляет собой двумерный диск, расслоенный на концентрические окружности (см. рис. 3.1). Такой атом называется *2-атомом A*.

Двумерный атом, содержащий на критическом слое ровно одну особую точку и отвечающий перестройке из одной окружности в две через критический уровень, гомеоморфный “восьмерке”, называется *2-атомом B*. Он изображен на рисунке 3.2. На рисунках 3.3 и 3.4 проиллюстрированы 2-атомы C_2 и D_1 соответственно.

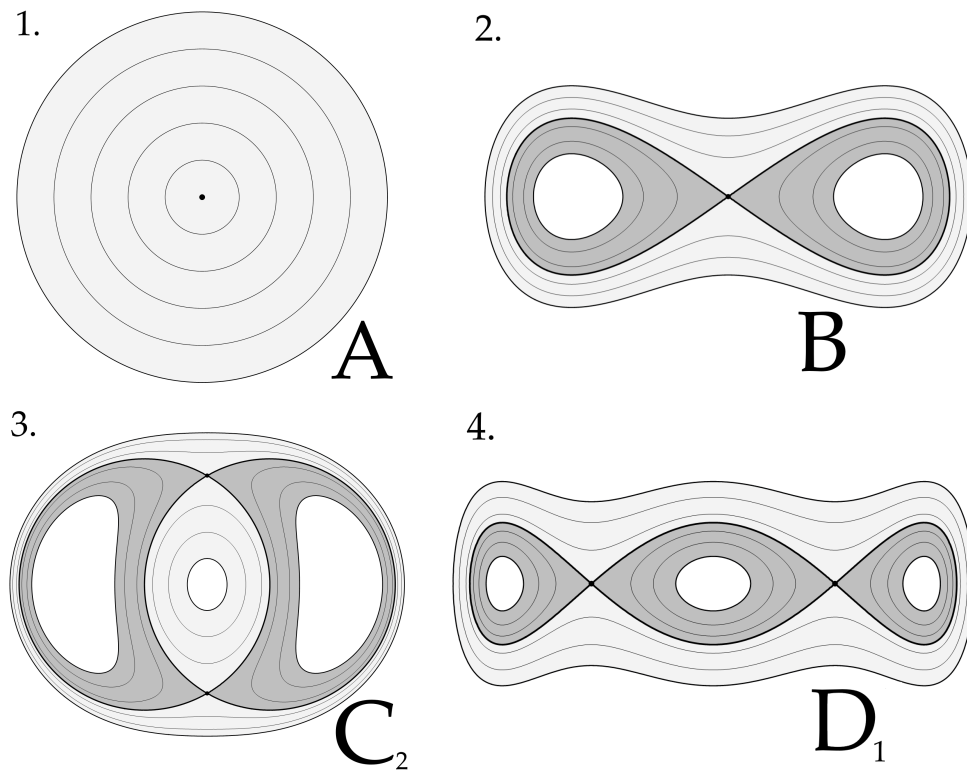


Рис. 3: Двумерные атомы A, B, C_2, D_1 и их расслоения линиями уровня функции Морса f . На рисунках 2–4 черной жирной линией выделен критический уровень $f = c$, светло-серым и темно-серым цветами — области $c < f \leq c + \varepsilon$ и $c - \varepsilon \leq f < c$.

Неформально напомним определения серий B и C два-атомов. Атомы B_n и C_n содержат n точек на критическом слое, однако B_n отвечает перестройке одной окружности в $n + 1$ (эта перестройка для $n = 1$ показана на рисунке 3.2, а для $n = 2$ — на 3.4), а C_n — бифуркации двух окружностей в n (эта перестройка для $n = 2$ указана на рисунке 3.3). Поэтому атом D_1 в некоторых работах обозначают через B_2 .

Заметим, что атом B является центрально симметричным. Эта инволюция атома B единственная нетривиальная. Атом C_2 , изображенный на рисунке 3.3, тоже обладает центральной симметрией. Однако список нетривиальных симметрий этого атома шире. Для того чтобы увидеть другие инволюции, рассмотрим реализацию C_2 на двумерной сфере (см. рис. 4). В такой реализации центральная симметрия с рисунка 3.3 перейдет в поворот α на угол π . Видим, что атом на рисунке 4.2 инвариантен относительно аналогичного поворота β на π вокруг другой выделенной оси. Инволюции α и β далее мы будем называть *вращательными симметриями*. На самом деле, α, β , а также $\alpha \circ \beta$ — полный список нетривиальных симметрий атома C_2 . Аналогичными буквами обозначим вращательные симметрии атома C_4 . Они изображены на рисунке 4.2.

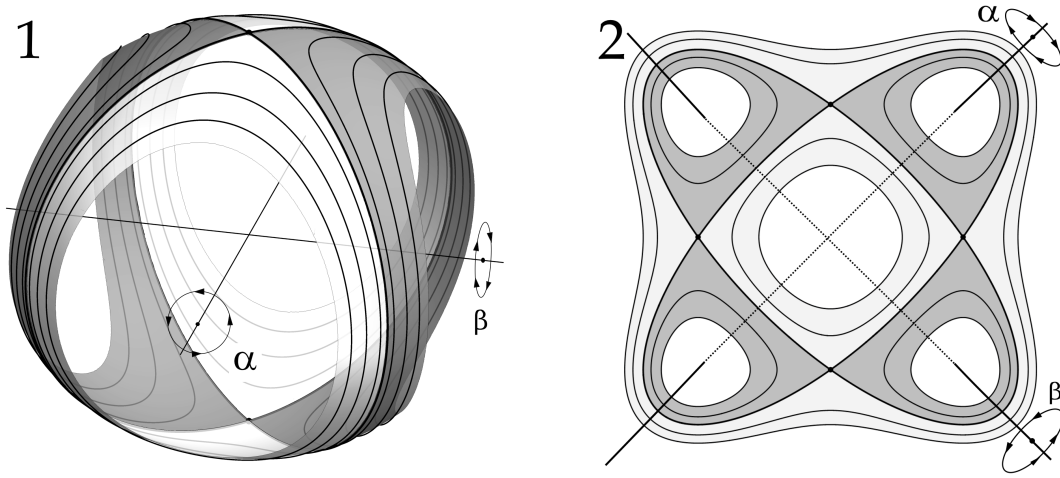


Рис. 4: 1. Сферическая реализация атома C_2 и вращательные симметрии α, β ; 2. Два-атом C_4 и его вращательные симметрии α, β .

§4 Слоение Лиувилля вблизи слоев с невырожденными особенностями

Топология слоения Лиувилля плоских билиардов с интегрируемым полиномиальным потенциалом 4-й степени изучалась С. Е. Пустовойтовым в работах [7, 8]. Мы опишем полулокальное устройство слоения Лиувилля некоторых трехмерных софокусных билиардов с интегрируемым потенциалом 4 степени вблизи слоев, отвечающих невырожденным особенностям. А именно, мы обсудим билиард внутри трехосного эллипсоида, а также внутри столов, не содержащих участки фокальных кривых. Последние столы мы будем называть *бесфокусными*.

Поскольку нас интересует случай $n = 3$, мы введем следующие обозначения: $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$.

Для начала ответим на следующий вопрос. При каких условиях в слоении Лиувилля возникает бифуркация? Для этого обратимся к теореме 3. Многочлен $V(z) = (a - z)(b - z)(c - z)((pz - q)(a - z)(b - z)(c - z) + g_0 z^2 + g_1 z + g_2)$ определяет устройство областей возможного движения. Действительно, чтобы точка P

с эллиптическими координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ входила в состав области возможного движения, нужно, чтобы $V(\lambda_i) = (a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i) \geq 0$ при всех i . Поэтому чтобы описать область возможного движения (далее ОВД), необходимо знать знак константы p , а также корни $W(z) = (pz - q)(a - z)(b - z)(c - z) + g_0 z^2 + g_1 z + g_2$.

Следовательно, тип ОВД изменится в случае, когда корни $V(z)$ изменят свое расположение. Перечислим возможные случаи.

1. Один из корней $W(z)$ совпал с a , b или c .
2. Многочлен $W(z)$ имеет кратный корень.

Есть еще один вариант смены области возможного движения, если один из корней W совпал с параметром квадратики границы стола. Однако этот случай нуждается в дополнительном пояснении, которое для краткости приводить не будем.

Итак, рассмотрим *отображение момента* $\mathcal{F} : M^6 \rightarrow \mathbb{R}^3(F_0, F_1, F_2)$. Точку P образа отображения момента будем называть *особой*, если она соответствует смене типа области возможного движения. Количество кратных корней многочлена W , отвечающего особой точке P , будем называть *кратностью* этой точки и обозначать $N(P)$. Оговоримся сразу, мы будем рассматривать только те особые точки, для которых многочлен W имеет корни кратности 2 и менее. Такие особые точки назовем *правильными*.

Как правило, кратность особой точки равна максимальному корангу системы дифференциалов dF_0, dF_1, dF_2 по всем точкам соответствующего слоя. Это можно проверить аналитически. Правильность точки зачастую гарантирует невырожденность особых точек слоя. Наша цель — описать послойные прообразы малых окрестностей правильных особых точек.

3.1 Бесфокусные столы. У бесфокусных столов эллиптические координаты отделены друг от друга. Это позволяет в формулах разделения переменных 13 избавиться от множителей $\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)$, не меняя при этом топологии слое-ния Лиувилля. Более того, перестройка одной пары корней $V(z)$ будет влечь за собой изменение ОВД ровно по одной из эллиптических координат. При этом, влияния остальных корней не будет, следовательно, от них можно избавиться, убирая соответствующие множители в разложении $W(z)$ на элементарные. Будем рассматривать только те правильные особые точки, которые по каждой эллиптической координате влекут не более одной перестройки. В таком случае, *прообраз малой окрестности правильной точки P будет послойно гомеоморфен прямому произведению $V_1 \times V_2 \times V_3$, где V_i — 2-атом (или кольцо, разбитое на концентрические окружности), отвечающий перестройке системы по i -й эллиптической координате*. Более подробно о 2-атомах см. [9].

Отметим, что все бесфокусные столы — прямые произведения трех одномерных софокусных столов. Под одномерным столом мы подразумеваем пересечение двух

софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$, либо же участок квадрики на плоскости. Т.е. дуга эллипса либо гиперболы, на которой введена эллиптическая координата.

Остается выяснить, какие 2-атомы V_i могут возникать. Разумеется, V_i может быть гомеоморфен 2-атому A . Однако нас в большей степени интересуют седловые атомы. Для того чтобы написать полный список искомых 2-атомов, нужно описать все возможные бифуркации на одномерных софокусных столах (т.е. дугах эллипсов и гипербол). Напомним, что мы рассматриваем бифуркации двух видов: когда $W(z)$ имеет кратный корень или один из корней $W(z)$ равен a, b или c . Посмотрим, какие перестройки происходят в каждом из случаев, когда в качестве одномерного стола выбран эллипс.

Начнем со случая, когда $W(z)$ имеет на интервале (a_i, a_{i+1}) кратный корень. Тогда перестройка будет происходить по правилу, изображенному на рисунке 5. Четыре окружности преобразуются в две, и эта бифуркация, безусловно, отвечает 2-атому C_4 .

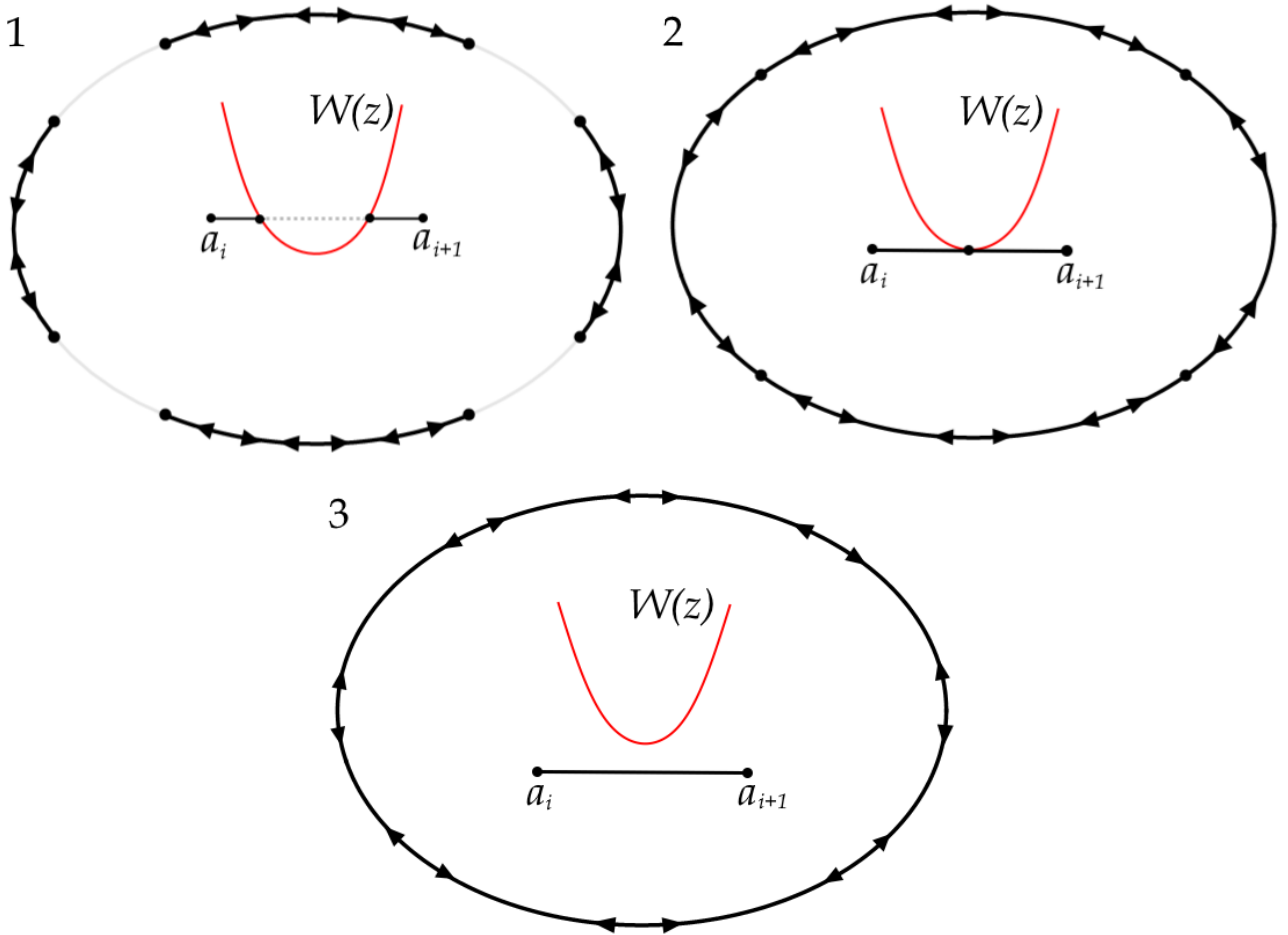


Рис. 5: Перестройка системы на эллипсе при условии возникновения кратного корня $W(z)$.

Если же один из корней $W(z)$ совпадает с a_i или a_{i+1} , то нетрудно проверить что соответствующая перестройка отвечает 2-атому C_2 (возникает аналогичная картина, только вместо четырех точек склейки окружностей остаются две).

Приведем теперь полный список седловых 2-атомов V_i которые будут появляться в аналогичных системах с многочленом $W(z)$ на дугах эллипсов и гипербол. Получим $C_2, C_4, B, B_2, B_3, B_4$. В итоге нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть P — правильная особая точка образа отображения момента бильярда внутри трехмерного бесфокусного стола с интегрируемым потенциалом вида 9. Тогда прообраз малой окрестности точки P послойно гомеоморфен одному или несвязному объединению нескольких прямых произведений вида $V_1 \times V_2 \times V_3$, где V_i — либо плоское кольцо, расслоенное на концентрические окружности, либо один из следующих 2-атомов: $A, B, B_2, B_3, B_4, C_2, C_4$.

Замечание 6. В теореме 4 дополнительно предполагается, что на всех участках, отвечающих различным эллиптическим координатам происходит ровно одна перестройка корней многочлена V . Без этого предположения описать прообразы правильных особых точек в виде (почти) прямого произведения 2-атомов не получится.

3.2 Бильярд внутри трехосного эллипсоида. Без ограничения общности можем считать, что $c > 0$. Рассмотрим бильярд с потенциалом 9 внутри эллипсоида параметра 0. Мы будем предполагать, что $p \neq 0$. Случай $p = 0$ был рассмотрен автором в работе [11].

Наибольший интерес и соответственно трудность представляет устройство слоения Лиувилля этой системы в окрестности слоев, отвечающих правильным особым точкам кратности 3. Пусть P — правильная особая точка кратности 3, тогда отвечающий ей многочлен $W(z)$ имеет 4 вещественных корня с учетом кратности. Обозначим их $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \xi_4$.

Теорема 5. Пусть P — правильная особая точка кратности 3 образа отображения момента для бильярда внутри эллипсоида параметра 0. Следующая таблица полностью описывает топологию слоения Лиувилля этой системы вблизи слоя, отвечающего точке P .

Таблица 1. Слоение Лиувилля вблизи слоев, отвечающих правильным особым точками кратности 3

Знак p	Корни $W(z)$	Слоение вблизи особенности
$p > 0$	$\xi_1 < \xi_2 = c < \xi_3 = b < \xi_4 = a$	$\frac{B \times C_2 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)}$, где α действует центральной симметрией на B и вращательной на первом C_2 , а β — дополнительной вращательной на первом C_2 и вращательной на втором

$p > 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 < \xi_3 = b < \xi_4 = a$	$A \times \frac{B \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α действует центральной симметрией на B и вращательной на C_2
$p > 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = b < \xi_3 < \xi_4 = a$	$A \times A \times B$
$p > 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = b < \xi_3 = a < \xi_4$	$A \times A \times A$
$p > 0$	$\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = c < \xi_4 = b$	$2 A \times A \times A$
$p > 0$	$\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = c < \xi_4 = a$	$A \times A \times C_2$
$p > 0$	$\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = b < \xi_4 = a$	$A \times \frac{C_2 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α действует вращательной симметрией на сомножителях
$p > 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 = b$	$2 A \times A \times A$
$p > 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = \xi_3 < b < \xi_4 = a$	$A \times A \times C_2$
$p > 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = b < \xi_3 = \xi_4 < a$	$2 A \times A \times A$
$p < 0$	$\xi_1 < \xi_2 = c < \xi_3 = b < \xi_4 = a$	$A \times A \times A, 6 A \times A \times \text{Cyl}^2$, где Cyl^2 — кольцо, расслоенное концентрическими окружностями
$p < 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 < \xi_3 = b < \xi_4 = a$	$A \times A \times B, 4 A \times \frac{B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times I$, где I — отрезок, расслоенный на точки, а инволюция α действует центральной симметрией на B и S^1
$p < 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = b < \xi_3 < \xi_4 = a$	$2 \frac{B \times C_2 \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)} \times I, A \times \frac{B \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где I — отрезок, расслоенный на точки, α действует центральной симметрией на B и вращательной C_2 , β — дополнительной вращательной на C_2 и центральной на S^1
$p < 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = b < \xi_3 = a < \xi_4$	$\frac{B \times C_2 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)}$, где α действует центральной симметрией на B и вращательной первом C_2 , β — дополнительной вращательной на первом C_2 и вращательной на втором

$p < 0$	$\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = c < \xi_4 = b$	$\frac{C_2 \times C_2 \times D_1}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)}$, где α действует вращательными симметриями на атомах C_2 , β — дополнительной вращательной на втором C_2 и центральной на D_1
$p < 0$	$\xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = c < \xi_4 = a$	$A \times \frac{C_2 \times D_1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α действует центральной симметрией на D_1 и вращательной C_2
$p < 0$	$\xi_1 = \xi_2 < c < \xi_3 = b < \xi_4 = a$	$A \times A \times D_1$
$p < 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 = b$	$\frac{B \times C_4 \times C_2}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)}$, где α действует центральной симметрией на B и вращательной на C_4 , а β — дополнительной вращательной на C_4 и вращательной на C_2
$p < 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = \xi_3 < b < \xi_4 = a$	$A \times \frac{B \times C_4}{\mathbb{Z}_2(\alpha)}$, где α действует центральной симметрией на B и вращательной на C_4
$p < 0$	$c < \xi_1 = \xi_2 < \xi_3 = b < \xi_4 = a$	$5 A \times A \times \text{Cyl}^2$, где Cyl^2 — кольцо, расслоенное концентрическими окружностями
$p < 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = b < \xi_3 = \xi_4 < a$	$\frac{B \times C_2 \times C_4}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)}$, где α действует центральной симметрией на B и вращательной на C_4 , а β — дополнительной вращательной на C_2 и вращательной на C_4
$p < 0$	$\xi_1 = c < \xi_2 = b < \xi_3 = \xi_4 < a$	$3 A \times \frac{B \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times I$, где I — отрезок, расслоенный на точки, а инволюция α действует центральной симметрией на B и S^1
$p < 0$	$\xi_1 = b < \xi_2 = \xi_3 < \xi_4 = a$	$3 A \times A \times \text{Cyl}^2$, где Cyl^2 — кольцо, расслоенное концентрическими окружностями

Список литературы

- [1] *К. Якоби*, Лекции по динамике, ОНТИ, М.–Л., 1936, 272 с.
- [2] *Г. В. Белозеров*, “Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадрами”, Матем. сб., **213**:2 (2022), 3–36.
- [3] *Г. В. Белозеров*, “Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука”, Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика, 2022, 6, 21–31.
- [4] *И. С. Харчева*, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 4, 2020, 12 – 22.
- [5] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев*, Генетическое введение в динамику систем с ударами, Москва, Изд-во МГУ, 1991.
- [6] *В. В. Козлов*, “Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде”, Прикладная математика и механика, **59**, 1, 1995.
- [7] *С. Е. Пустовойтов*, “Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2021, 5, 8 – 19.
- [8] *С. Е. Пустовойтов*, “Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадрами, в потенциальном поле”, Матем. сб., **212**:2, 2021, 81 – 105.
- [9] *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко*, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2 (Монография), Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [10] *J. Milnor*, Morse theory, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [11] *G. V. Belozarov*, Non-degenerate Singularities of a Three-dimensional Billiard Bounded by an Ellipsoid in a Hooke Potential Field, LJM, 2025 (в печати).