

Описание топологии слоения Лиувилля трехмерных билиардов, ограниченных софокусными параболоидами^[1]

Белозеров Г. В.^[2]

Аннотация. Рассматриваются трехмерные билиарды, ограниченные софокусными параболоидами. Такие системы являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. На множестве билиардных столов (конфигурационных пространствах рассматриваемых систем) введено отношение комбинаторной эквивалентности, сохраняющее лиувиллеву эквивалентность соответствующих билиардов, доказана теорема классификации. Как оказалось, существует в точности 14 неэквивалентных трехмерных билиардных столов, ограниченных софокусными параболоидами. Для каждого класса эквивалентности столов описано полулокальное устройство слоения Лиувилля, соответствующего билиарда. Билиарды на комбинаторно неэквивалентных столах оказались лиувиллево неэквивалентными.

Ключевые слова: билиард, интегрируемый билиард, софокусные квадрики, слоение Лиувилля, топологические инварианты, атомы.

§1 Софокусные параболоиды и их свойства

Зафиксируем $a > 0$.

Определение 1. Семейством софокусных параболоидов в $\mathbb{R}^3$ назовем множество квадрик, заданных уравнением

$$z - \lambda = \frac{x^2}{4(a - \lambda)} - \frac{y^2}{4(a + \lambda)},$$

где λ — вещественный параметр.

Отметим, что параметр λ семейства софокусных параболоидов может принимать все вещественные значения кроме a , $-a$. Для того чтобы доопределить семейство в этих точках, достаточно умножить последнюю формулу на $(a - \lambda)(-a - \lambda)$. В таком случае значению $\lambda = a$ будет отвечать плоскость $x = 0$, а $\lambda = -a$ — плоскость $y = 0$.

На рисунке [1] приведены три софокусных параболоида: два эллиптических, отвечающих значениям $\lambda < -a$, $\lambda > a$, и гиперболический, он отвечает $\lambda \in (-a, a)$.

Приведем несколько простейших свойств семейства софокусных параболоидов.

Предложение 1. Касательные плоскости в точках пересечения двух софокусных параболоидов ортогональны.

¹Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-10106.

²Московский Государственный университет имени М. В. Ломоносова, gleb0511beloz@yandex.ru

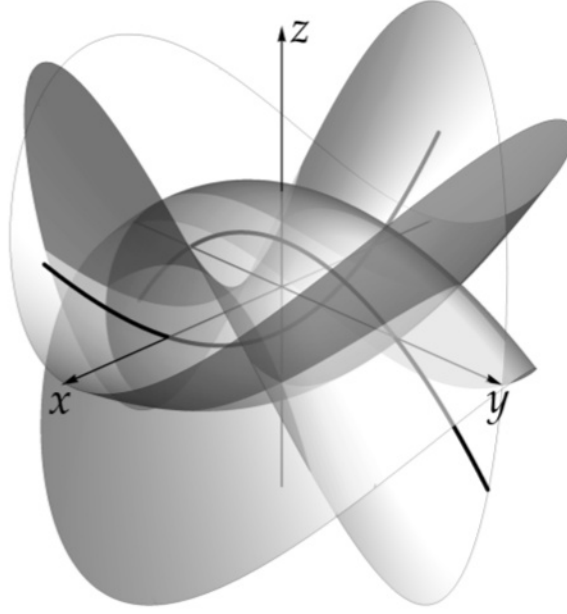


Рис. 1: Три софокусных параболоида в $\mathbb{R}^3$. Черным выделены фокальные кривые

Доказательство. Пусть точка P лежит на пересечении двух софокусных квадрик параметров λ_1 и λ_2 , в таком случае координаты (x, y, z) этой точки удовлетворяют следующей системе уравнений.

$$\begin{cases} z - \lambda_1 = \frac{x^2}{4(a - \lambda_1)} - \frac{y^2}{4(a + \lambda_1)} \\ z - \lambda_2 = \frac{x^2}{4(a - \lambda_2)} - \frac{y^2}{4(a + \lambda_2)} \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе и разделим полученное выражение на $\lambda_1 - \lambda_2$:

$$\frac{x^2}{4(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)} + \frac{y^2}{4(a + \lambda_1)(a + \lambda_2)} = -1.$$

Последнее уравнение равносильно тому, что нормали к касательным плоскостям параболоидов в точке P ортогональны. Значит, и сами касательные плоскости ортогональны. $\square$

Предложение 2. *Через каждую точку $\mathbb{R}^3$ проходит в точности три софокусных параболоида с учетом кратности. Параметры $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ этих квадрик удовлетворяют неравенствам $\lambda_1 \leq -a \leq \lambda_2 \leq a \leq \lambda_3$.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ точку P с координатами (x, y, z) и сопоставим ей многочлен

$$f_P(\lambda) = 4(\lambda - z)(\lambda + a)(\lambda - a) - (\lambda + a)x^2 - (\lambda - a)y^2.$$

Заметим, что $f_P(\lambda_0) = 0$ в том и только в том случае, когда через точку P проходит параболоид параметра λ_0 .

Пусть сначала $x, y \neq 0$, тогда $f_P(a) = -2ax^2 < 0$, $f_P(-a) = 2ay^2 > 0$. Поскольку степень f_P равна трем, $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f_P(\lambda) = \pm\infty$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса о промежуточном значении непрерывной функции на интервалах $(-\infty, -a)$, $(-a, a)$, $(a, +\infty)$ многочлен $f_P(\lambda)$ должен иметь хотя бы по одному корню. Большого числа корней быть не может, поскольку $\deg f_P = 3$.

Остается заметить, что при $x = 0$ или $y = 0$ многочлен $f_P(\lambda)$ можно равномерно приблизить многочленами вида $f_{P'}(\lambda)$ таких, что первые две координаты P' отличны от нуля. А значит, количество корней $f_P(\lambda)$ и неравенства на них сохраняются. Таким образом, предложение доказано. $\square$

Определение 2. Координаты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются *параболическими*.

Предложение 3. Следующая система устанавливает связь между параболическими и декартовыми координатами.

$$\begin{cases} x^2 = -\frac{2}{a}(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3) \\ y^2 = \frac{2}{a}(-a - \lambda_1)(-a - \lambda_2)(-a - \lambda_3) \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Проверяется прямым вычислением. $\square$

Заметим, что параболическое семейство обладает тремя нетривиальными симметриями: отражения от координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$, а также линейное преобразование, задаваемое матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Первые две симметрии сохраняют параболические координаты точки, в то время как последняя меняет знаки всех параболических координат, т.е. точка с координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ переходит в точку $(-\lambda_3, -\lambda_2, -\lambda_1)$. Обозначим эту симметрию через σ .

Как правило, параболические координаты точки попарно различны, выясним, как устроены множества $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = a$. Подставим эти уравнения в систему $\mathbb{I}$.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$. В таком случае $y = 0$ и $z = \frac{x^2}{8a} - a$. Получаем параболу в плоскости Oxz . Обозначим ее через $\mathfrak{F}_1$.

- $\lambda_2 = \lambda_3 = a$. В таком случае $x = 0$ и $z = -\frac{y^2}{8a} + a$. Получаем параболу в плоскости Oyz . Обозначим ее через $\mathfrak{F}_2$.

Определение 3. Параболы $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ будем называть *фокальными*.

Фокальные параболы изображены на рисунке $\mathbb{I}$ для трех софокусных параболоидов.

Отметим без доказательства следующие свойства фокальных парабол.

1. Парабола $\mathfrak{F}_1$ проходит через фокус $\mathfrak{F}_2$, а парабола $\mathfrak{F}_2$ — через фокус $\mathfrak{F}_1$.
2. Фокальные параболы состоят из омбилических точек софокусного семейства.

Между семейством софокусных квадрик (эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды), а также семейством софокусных параболоидов существует тесная связь.

Рассмотрим семейство софокусных квадрик

$$\frac{z^2}{A - \mu} + \frac{x^2}{a - \mu} + \frac{y^2}{-a - \mu} = 1,$$

где $A > a$. Обозначим через $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ эллиптические координаты, отвечающие этому семейству.

Зафиксируем $b \in (a, A)$. Пусть $\mathcal{A}_{par}$ — область в $\mathbb{R}^3$, определяемая неравенством $\lambda_3 < b$, а $\mathcal{A}_{ell}$ — множество в $\mathbb{R}^3$, задаваемая неравенствами $\mu_3 < b, z < 0$.

Теорема 1. *Существует диффеоморфизм $\varphi : \mathcal{A}_{ell} \mapsto \mathcal{A}_{par}$, переводящий эллиптические координаты в параболические.*

Доказательство. Рассмотрим точку $P = (x, y, z) \in \mathcal{A}_{ell}$ с эллиптическими координатами (μ_1, μ_2, μ_3) и сопоставим ей точку $\varphi(P) = (x', y', z')$ с параболическими координатами $\lambda_i = \mu_i$. Для того чтобы отображение было однозначным, потребуем, чтобы $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} x', \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} y'$. Найдем явные формулы для φ .

Напомним, что эллиптические и декартовы координаты точки связаны следующими соотношениями.

$$\begin{cases} z^2 = \frac{(A - \mu_1)(A - \mu_2)(A - \mu_3)}{(A - a)(A + a)} \\ x^2 = \frac{(a - \mu_1)(a - \mu_2)(a - \mu_3)}{2a(a - A)} \\ y^2 = \frac{(-a - \mu_1)(-a - \mu_2)(-a - \mu_3)}{2a(a + A)} \end{cases}$$

Сравнивая их с системой [1], заключаем, что $x' = 2\sqrt{A - a}x, y' = 2\sqrt{A + a}y$. Далее,

$$x^2 + y^2 + z^2 = A - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = A - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = A - z'.$$

Откуда $z' = A - x^2 - y^2 - z^2$. Итак, отображение φ задается следующей системой.

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{A - a}x \\ y' = 2\sqrt{A + a}y \\ z' = A - x^2 - y^2 - z^2 \end{cases}$$

Остается заметить, что это отображение является гладким и биективным. Обратное к φ тоже гладкое, поскольку координата z в области $\mathcal{A}_{ell}$ не обращается в ноль. Теорема доказана. $\square$

§2 Трехмерные параболические бильiardы. Интегрируемость

Настоящий параграф посвящен описанию трехмерных параболических бильiardов и доказательству их интегрируемости.

1.1 Постановка задачи. Описание системы. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ компактную область D , ограниченную конечным числом софокусных параболоидов с двугранными углами излома границы, равными $\pi/2$. Такую область будем называть *параболическим бильiardным столом*.

Пусть D — параболический бильiardный стол. Мы будем рассматривать следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется свободно внутри D , отражаясь от границы D абсолютно упруго. Такую динамическую систему мы будем называть *трехмерным параболическим бильiardом*.

Замечание 1. Приведенное выше описание системы не определяет динамику частицы в точках излома границы бильiardного стола. Однако ввиду того, что все двугранные углы излома равны $\pi/2$ (а не $3\pi/2$), движение частицы, попавшей на стык нескольких граней можно продолжить по непрерывности. Если частица пришла в точку P границы бильiardного стола с вектором скорости v и в этой точке смыкаются грани $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, то она выйдет из точки P с вектором скорости v' , который получается из v последовательным отражением от $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Фазовое пространство параболического бильiardа является топологическим многообразием $M^6 = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x \mathbb{R}^3\} / \sim$, где $\sim$ — следующее отношение эквивалентности на границе бильiardного стола. Пары (x_1, v_1) и (x_2, v_2) эквивалентны в том и только том случае, когда $x_1 = x_2 \in \partial D$, а v_1 получается из v_2 путем нескольких отражений от гладких граней границы стола, смыкающихся в точке x .

Замечание 2. Тот факт, что M^6 является топологическим многообразием, ранее был показан автором в работах [2, 3]. Для бильiardных книжек (обобщение софокусных бильiardов, введенное В. В. Ведюшкиной) аналогичный факт был доказан И. С. Харчевой в работе [4].

Замечание 3. Полная механическая энергия $H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ является первым интегралом трехмерного параболического бильiardа.

1.2 Интегрируемость. Фазовое многообразие M^6 , как правило, является лишь кусочным-гладким. Разобьем его в объединение гладких “кусков” $\widetilde{M}^6$. На $\widetilde{M}^6$ корректно определена стандартная симплектическая форма ω , которая имеет непрерывные пределы “справа” и “слева” в точках излома M^6 (здесь под изломом подразумевается негладкость). Заметим, что на $\widetilde{M}^6$ динамика материальной точки определяется векторным полем $v = \text{sgrad } H$. Такого вида динамические системы

называются *кусочно-гладкими гамильтоновыми системами*. Следующее определение было введено А. Т. Фоменко.

Определение 4. Говорят, что кусочно-гладкая гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ является *интегрируемой по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле*, если существуют непрерывные на M^6 и гладкие на $\widetilde{M}^6$ первые интегралы $F_0 = H, F_1, F_2$, такие, что

- 1) $F_0 = H, F_1, F_2$ функционально независимы на $\widetilde{M}^6$,
- 2) $F_0 = H, F_1, F_2$ попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона на $\widetilde{M}^6$.

Замечание 4. Согласно теореме Якоби-Шаля об интегрируемости геодезического потока на квадраках (см., например, [1]), а также наблюдению В. В. Козлова и Д. В. Трещева (см. [5]) произвольный софокусный бильярд (т.е., ограниченный софокусными эллипсоидами и гиперboloидами) в отсутствии внешних сил является интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. *Наша цель — доказать аналогичную теорему для параболоидов.*

Теорема 2. *Трехмерные параболические бильярды являются интегрируемыми по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Более того, все отрезки произвольной траектории-ломаной (или их продолжения) касаются в точности двух общих параболоидов, софокусных с квадраками границы стола.*

Доказательство. Рассмотрим движение материальной точки единичной по инерции в $\mathbb{R}^3$. Пусть в некоторый момент времени частица находилась в точке с координатой (x, y, z) и вектором скорости $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Определим параметры софокусных параболоидов, которых касается прямая-траектория материальной точки. Для этого, параметрическое уравнение траектории $(x + \tau\dot{x}, y + \tau\dot{y}, z + \tau\dot{z})$ подставим в уравнение семейства [1] и приравняем дискриминант по переменной τ к нулю:

$$\left(\frac{x\dot{x}}{a-\lambda} - \frac{y\dot{y}}{a+\lambda} - 2\dot{z} \right)^2 = \left(\frac{\dot{x}^2}{a-\lambda} - \frac{\dot{y}^2}{a+\lambda} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{a-\lambda} - \frac{y^2}{a+\lambda} + 4(\lambda - z) \right).$$

Домножив это уравнение на $(a-\lambda)(a+\lambda)$ и разделив на -8 , приведем его к виду

$$F_0\lambda^2 - F_1\lambda + F_2 = 0, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \\ F_1 &= \frac{1}{2}(a\dot{x}^2 - a\dot{y}^2 + \dot{y}(\dot{z}y - z\dot{y}) - \dot{x}(\dot{x}z - x\dot{z})), \\ F_2 &= \frac{1}{2}(a^2\dot{z}^2 + \frac{1}{4}(\dot{x}y - x\dot{y})^2 + a\dot{x}(\dot{x}z - x\dot{z}) + a\dot{y}(\dot{z}y - z\dot{y})). \end{aligned}$$

Правую часть уравнения [2] будем называть *многочленом касания*. Корни многочлена касания — параметры софокусных параболоидов, которых касается траектория материальной точки. Отметим, что F_0 — не что иное, как полная механическая энергия материальной точки.

Оказывается, функции F_0, F_1, F_2 функционально независимы на $T^*\mathbb{R}^3$ и попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона. Для того чтобы более подробно изучить другие свойства этих функций, перепишем их в параболических координатах:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a - \lambda_1)(-a - \lambda_1)} \dot{\lambda}_1^2 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a - \lambda_2)(-a - \lambda_2)} \dot{\lambda}_2^2 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a - \lambda_3)(-a - \lambda_3)} \dot{\lambda}_3^2 \right), \\ F_1 &= \frac{1}{2} \left((\lambda_2 + \lambda_3) \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a - \lambda_1)(-a - \lambda_1)} \dot{\lambda}_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_3) \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a - \lambda_2)(-a - \lambda_2)} \dot{\lambda}_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a - \lambda_3)(-a - \lambda_3)} \dot{\lambda}_3^2 \right), \\ F_2 &= \frac{1}{2} \left(\lambda_2 \lambda_3 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a - \lambda_1)(-a - \lambda_1)} \dot{\lambda}_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a - \lambda_2)(-a - \lambda_2)} \dot{\lambda}_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \lambda_2 \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a - \lambda_3)(-a - \lambda_3)} \dot{\lambda}_3^2 \right). \end{aligned}$$

В параболических координатах уже легко проверить, что функции F_i коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона и функционально независимы. Более того, поскольку F_i зависят только от квадратов скоростей, а параболические координаты ортогональны, эти же функции являются первыми интегралами произвольного трехмерного параболического бильярда. Таким образом, первая часть теоремы доказана. Докажем вторую часть.

Лемма 1. *На совместном уровне первых интегралов $F_0 = f_0, F_1 = f_1, F_2 = f_2$ уравнения движения произвольного трехмерного параболического бильярда имеют следующий вид.*

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь $V(z) = (a - z)(-a - z)(f_0 z^2 - f_1 z + f_2)$.

Доказательство леммы 1. Достаточно упростить выражения вида $F_0 \lambda_i^2 - F_1 \lambda_i + F_2$ с помощью формулы Виета. $\square$

Остается заметить, что $V(z)$ есть произведение многочлена касания и квадратичного полинома $(a - z)(-a - z)$. Если предположить, что многочлен касания не имеет вещественных корней, то $V(z) < 0$ на промежутке $(-a, a)$. Однако параболическая координата λ_2 изменяется на замыкании этого множества, следовательно, движение вдоль λ_2 было бы невозможным. Значит, многочлен касания имеет

хотя бы один вещественный корень. А поскольку его степень равна двум, любая прямая касается в $\mathbb{R}^3$ в точности двух софокусных параболоидов.

Поскольку, F_0, F_1, F_2 — первые интегралы произвольного трехмерного параболического бильярда, корни многочлена касания — тоже первые интегралы. Теорема полностью доказана. $\square$

§3 Топологическая классификация параболических бильярдов в $\mathbb{R}^3$

Настоящий параграф мы разобьем на 2 пункта. В первом напомним необходимую информацию о 2-атомах (подробная информация о 2-атомах и их свойствах изложена в работе [6]) и их симметриях, а во втором представим классификацию трехмерных параболических бильярдов с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности. Напомним, что

Определение 5. Две вполне интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 на симплектических многообразиях M_1^{2n} и M_2^{2n} , обладающие наборами первых интегралов $(f_1, \dots, f_n)$ и $(g_1, \dots, g_n)$ в смысле определения [4], называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля этих систем, который локально (т.е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма самих слоений.

Замечание 5. Аналогичные определения эквивалентностей можно сформулировать для ограничений ИГС на поверхности уровня функции Гамильтона (т.е. на изоэнергетические поверхности).

Поскольку при изменении длины вектора скорости устройство траекторий системы не меняется. Мы будем изучать слоение Лиувилля наших бильярдов на поверхностях постоянной энергии.

3.1 Два-атомы и их симметрии. Рассмотрим на компактном ориентируемом многообразии M^2 функцию Морса f . Напомним, что

Определение 6. Гладкая функция f на многообразии N^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки являются невырожденными, т.е. если $df|_x = 0$, то $d^2f|_x$ имеет полный ранг (равен n).

Функция Морса на компактном многообразии обладает лишь конечным количеством критических точек. При этом, согласно лемме Морса в окрестности критической точки на M^2 подходящим выбором криволинейных координат функция H приводится к виду $H = H_0 \pm x^2 \pm y^2$ (см., например, [7]). Однако лемма Морса дает лишь локальное представление функции в окрестности невырожденной точки. Глобальное устройство функции Морса в окрестности критического слоя однозначно описывается 2-атомом. Напомним его определение.

Определение 7. Пусть f — функция Морса на двумерном компактном многообразии M^2 и c — ее критическое значение. Предположим также, что c — единственное критическое значение функции f на отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Тогда связную компоненту P^2 множества $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, расслоенную на линии уровня функции f , будем называть 2-атомом (двумерным атомом) (P^2, f) .

Все 2-атомы рассматриваются с точностью до следующего отношения эквивалентности.

Определение 8. Будем называть 2-атомы (P_1^2, f_1) и (P_2^2, f_2) эквивалентными, если существует гомеоморфизм между P_1^2 и P_2^2 , переводящий функцию f_1 в функцию f_2 .

Приведем несколько примеров 2-атомов. Если точка $x \in M^2$ является точкой минимума или точкой максимума функции H , то согласно лемме Морса, 2-атом, отвечающий этой особенности, представляет собой двумерный диск, расслоенный на концентрические окружности (см. рис. 2.1). Такой атом называется 2-атомом A .

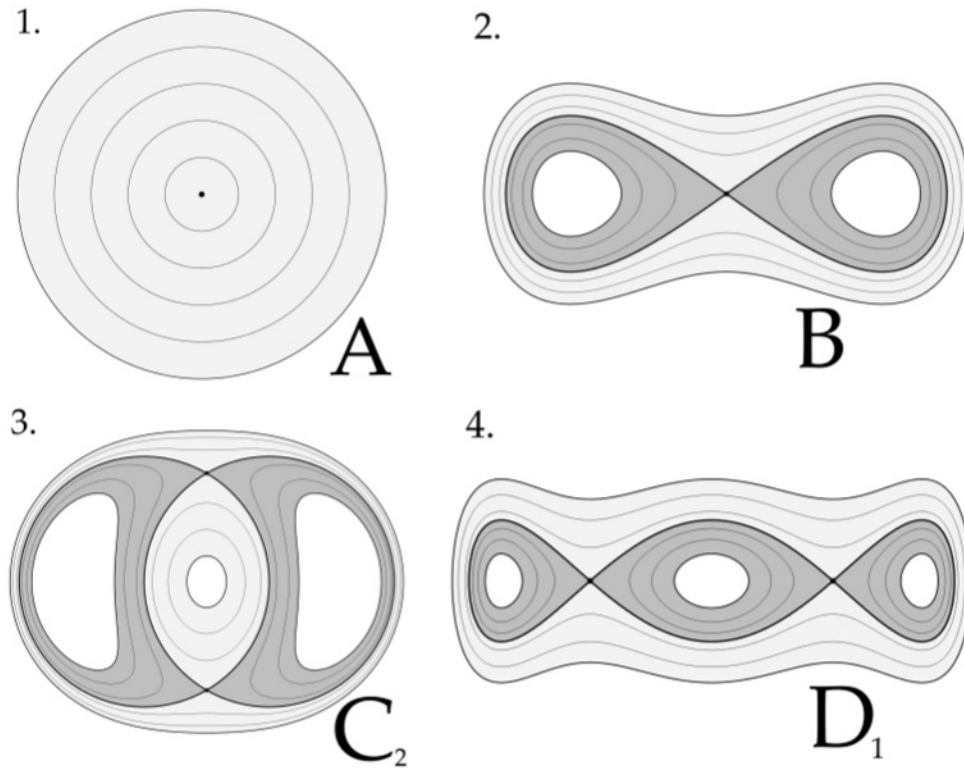


Рис. 2: Двумерные атомы A, B, C_2, D_1 и их расслоения линиями уровня функции Морса f . На рисунках 2–4 черной жирной линией выделен критический уровень $f = c$, светло-серым и темно-серым цветами — области $c < f \leq c + \varepsilon$ и $c - \varepsilon \leq f < c$.

Двумерный атом, содержащий на критическом слое ровно одну особую точку и отвечающий перестройке из одной окружности в две через критический уровень,

гомеоморфный “восьмерке”, называется *2-атомом* B . Он изображен на рисунке [2.2]. На рисунках [2.3] и [2.4] проиллюстрированы 2-атомы C_2 и D_1 соответственно.

Неформально напомним определения серий B и C два-атомов. Атомы B_n и C_n содержат n точек на критическом слое, однако B_n отвечает перестройке одной окружности в $n + 1$ (эта перестройка для $n = 1$ показана на рисунке [2.2], а для $n = 2$ — на [2.4]), а C_n — бифуркации двух окружностей в n (эта перестройка для $n = 2$ указана на рисунке [2.3]). Поэтому атом D_1 в некоторых работах обозначают через B_2 .

Заметим, что атом B является центрально симметричным. Эта инволюция атома B единственная нетривиальная. Атом C_2 , изображенный на рисунке [2.3], тоже обладает центральной симметрией. Однако список нетривиальных симметрий этого атома шире. Для того чтобы увидеть другие инволюции, рассмотрим реализацию C_2 на двумерной сфере (см. рис. [3]). В такой реализации центральная симметрия с рисунка [2.3] перейдет в поворот α на угол π . Видим, что атом на рисунке [3.2] инвариантен относительно аналогичного поворота β на π вокруг другой выделенной оси. Инволюции α и β далее мы будем называть *вращательными симметриями*. На самом деле, α , β , а также $\alpha \circ \beta$ — полный список нетривиальных симметрий атома C_2 .

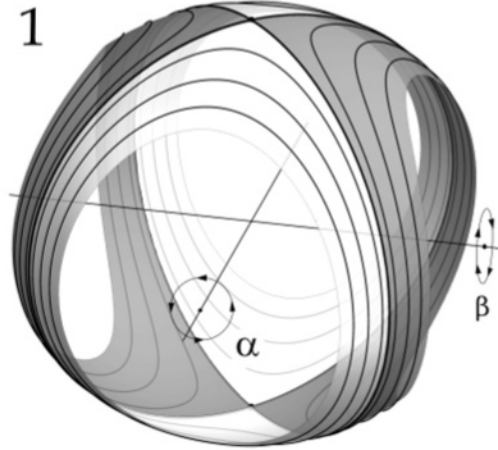


Рис. 3: Сферическая реализация атома C_2 и вращательные симметрии α, β .

3.2 Топологическая классификация трехмерных параболических билиардов. Следуя В. В. Ведюшкиной (см., например, [8]) на множестве параболических билиардных столов мы введем отношение комбинаторной эквивалентности, сохраняющее грубую лиувиллеву эквивалентность соответствующих билиардов.

Определение 9. Будем говорить, что параболические билиардные столы D_1 и D_2 *комбинаторно эквивалентны*, если один из них может быть получен из другого последовательностью следующих преобразований:

- изменением сегмента границы путем непрерывной деформации в классе софокусных параболоидов, при этом, значение изменяемого параметра λ при каждой деформации может равняться $-a$ или a только либо в начале, если объем стола уменьшается, либо в конце, если — увеличивается;
- симметрией относительно координатных плоскостей Oxz , Oyz ;
- линейным преобразованием σ , заданным матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. 1. *Существует в точности 14 комбинаторно неэквивалентных параболических бильярдных столов. Все они представлены в таблице 1 (см. стр. 14).*

2. *Трехмерные параболические бильярды грубо лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их бильярдные столы комбинаторно эквивалентны.*

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой [1]. В силу компактности бильярдного стола и наличия первого комбинаторного преобразования, можем считать, что произвольный параболический бильярдный стол лежит в некоторой области $\mathcal{A}_{par}$. Согласно теореме [1] параболические бильярдные столы при отображении φ^{-1} переходят в обычные трехмерные софокусные столы. При этом первые два пункта определения комбинаторной эквивалентности преобразуются в определение комбинаторной эквивалентности обычных трехмерных бильярдных столов. Остается воспользоваться соответствующей теоремой классификации (см. [2]) и отыскать среди них эквивалентные относительно третьего преобразования из определения [9]. Получится в точности 14 столов.

Оказывается, также что при преобразовании φ бильярды внутри столов D и $\varphi(D)$ являются лиувиллево эквивалентными. В этом нетрудно убедиться. Достаточно посмотреть на соответствующие уравнения движения на совместных поверхностях уровня интегралов. Эти уравнения будут отличаться на ненулевые множители. Таким образом, мы можем воспользоваться результатом классификации обычных трехмерных софокусных бильярдных, представленным в диссертации автора. $\square$

Перейдем от интегралов $F_0 = H, F_1, F_2$ к $F_0 = H, \Lambda_1, \Lambda_2$, где $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ — параметры софокусных параболоидов, которых касаются все отрезки (или их продолжения) произвольной траектории-ломаной.

Ниже (начиная со страницы 14) мы приводим таблицу, в которой для каждого класса комбинаторно эквивалентных столов вычислена круговая молекула точки $\Lambda_1 = a, \Lambda_2 = -a$, а также описаны прообразы малых окрестностей особых уровней

(a, a) , $(-a, -a)$ и $(a, -a)$ при отображении момента $\mathcal{F} : Q_h^5 \mapsto \mathbb{R}(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Все атомы в молекулах трехмерные и умножены на окружность.

В пятом столбце через PF_o обозначена ориентируемая эллиптическая вилка, а через PF_{no} — неориентируемая. У некоторых бильярдов малую окрестность слоя, отвечающего точке $(a, -a)$, нельзя представить в виде почти прямого произведения атомов и окружностей. Особенность, отвечающая паре $(a, -a)$, у этих бильярдов является топологически неустойчивой.

Для единообразия в пятой колонке таблицы будем использовать только 2-атомы.

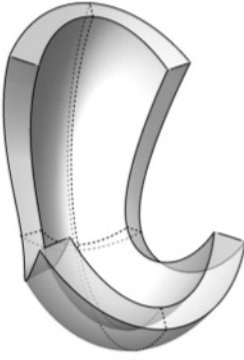
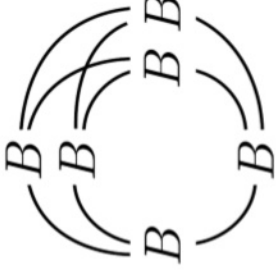
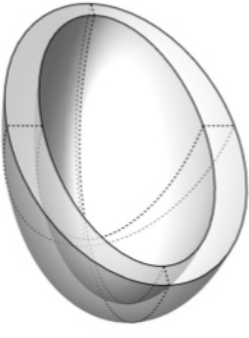
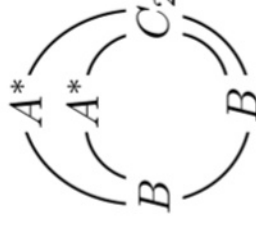
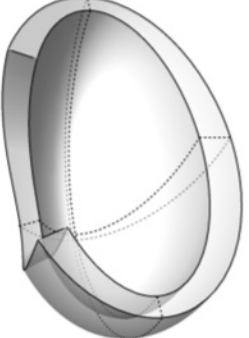
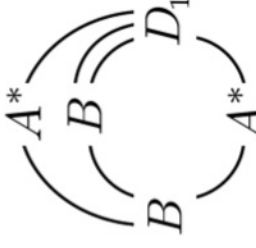
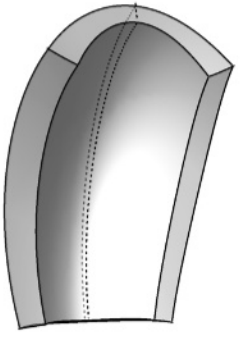
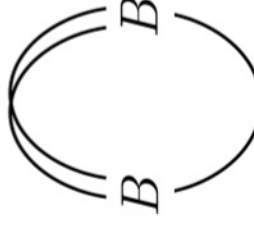
На рисунках в первой колонке черными пунктирными линиями выделены кривые пересечения границ бильярдных столов с координатными плоскостями. Во второй колонке дано краткое описание самих границ. Под центральной симметрией на атоме C_2 подразумевается вращательная симметрия.

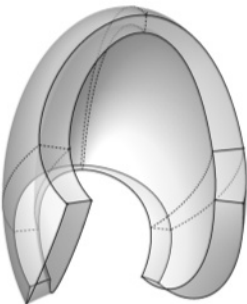
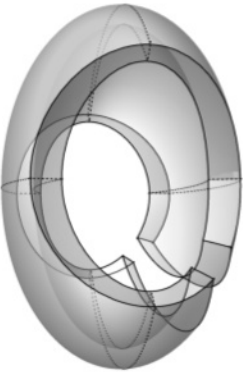
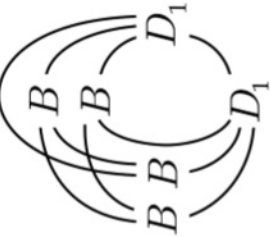
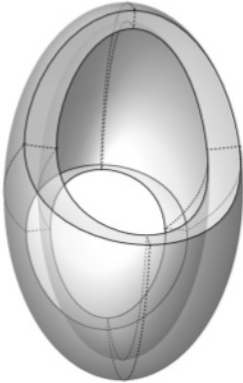
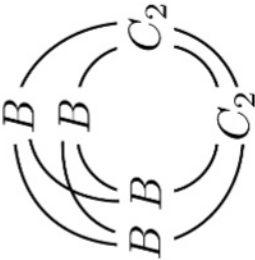
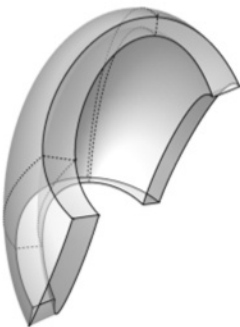
Эллиптические параболоиды в софокусном семействе бывают двух типов в зависимости от направления их полости вдоль оси Oz , поэтому одни из них будем называть эллиптическими параболоидами первого типа (и сокращать эл. пар. типа 1), а другие — второго.

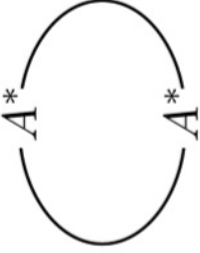
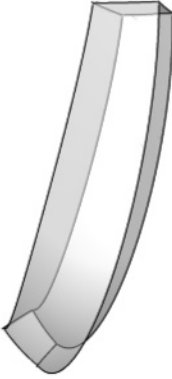
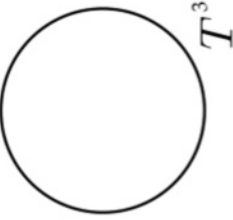
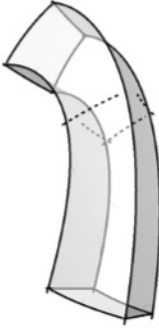
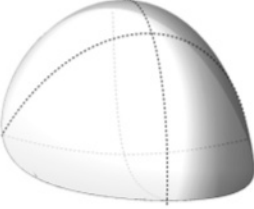
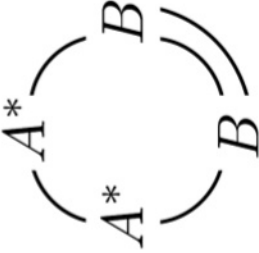
Список литературы

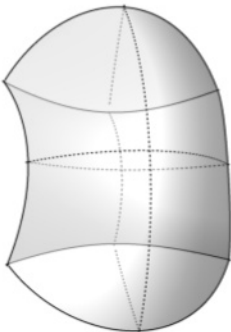
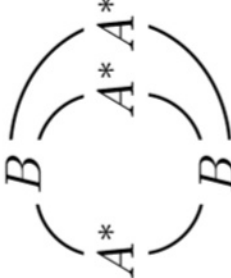
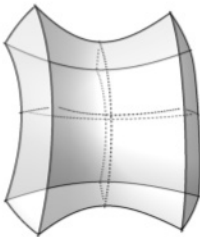
- [1] *К. Якоби*, Лекции по динамике, ОНТИ, М.–Л., 1936, 272 с.
- [2] *Г. В. Белозеров*, “Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадраками”, Матем. сб., **213**:2 (2022), 3–36.
- [3] *Г. В. Белозеров*, “Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука”, Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика, 2022, 6, 21–31.
- [4] *И. С. Харчева*, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 4, 2020, 12 – 22.
- [5] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев*, Генетическое введение в динамику систем с ударами, Москва, Изд-во МГУ, 1991.
- [6] *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко*, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2 (Монография), Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [7] *J. Milnor*, Morse theory, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [8] *В. В. Фокичева*, “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадраков”, Матем. сб., **206**:10 (2015), 127–176.

Таблица 1. Описание слоений Лиувилля параболических бильярдов

Номер	Трёхмерный стол	Описание границы	Круговая молекула точки $(a, -a)$	Особенность, отвечающая точке
1		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		1. $B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1$ 2. $\emptyset$ 3. $PF_o \times S^1$
2		Две области на эл. пар. типа 1, одна кольцевая область на эл. пар. типа 2		1. $\frac{B_2^{(2)} \times C_2^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1, \alpha$ инволюция центральной симметрии 2. $2 PF_{no} \times S^1$ 3. $PF_o \times S^1$
3		Две области на эл. пар. типа 1, по одной на эл. пар. типа 2 и гип. пар.		1. $\frac{B_2^{(2)} \times D_1^{(2)}}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1, \alpha$ инволюция центральной симметрии 2. $PF_{no} \times S^1$ 3. $PF_o \times S^1$
4		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		1. $B^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ 2. $A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^1$ или $\emptyset$ 3. $PF_o \times S^1$

5		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		1. $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности 2. $2PF_o \times S^1$ 3. $PF_o \times S^1$
6		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		1. $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности 2. $2PF_o \times S^1$ 3. $2PF_o \times S^1$
7		Две кольцевые области на эл. пар. типа 1, две кольцевые области на эл. пар. типа 2		1. $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности 2. $2PF_o \times S^1$ 3. $2PF_o \times S^1$
8		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		1. $K^3 \times T^2$, где K^3 отвечает топологически неустойчивой особенности 2. $PF_o \times S^1$ 3. $PF_o \times S^1$

9		Две области на эл. пар. типа 1, по одной на эл. пар. типа 2 и гип. пар		$1. \frac{B^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times S^1 \times \overline{D}^{-1},$ $\alpha - \text{инволюция}$ $\text{центральной симметрии}$ $2. PF_{no} \times S^1$ $3. A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^{-1} \text{ или } \emptyset$
10		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		$1. T^3 \times \overline{D}^{-2}$ $2. A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^{-1} \text{ или } \emptyset$ $3. A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^{-1} \text{ или } \emptyset$
11		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		$1. B^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^{-1}$ $2. \emptyset$ $3. A^{(2)} \times T^2 \times \overline{D}^{-1} \text{ или } \emptyset$
12		Область на эл. пар. типа 1 и эл. пар. типа 2		$1. \frac{B_2^{(2)} \times C_2^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha) \times \mathbb{Z}_2(\beta)}, \alpha$ $\text{центр. сим. на } B, \text{ вращ.}$ $\text{на } C_2, \beta - \text{доп. вращ. на}$ $C_2 \text{ и центр. } S^1$ $2. PF_{no} \times S^1$ $3. PF_{no} \times S^1$

13		По одной области на эл. пар. типа 1 и гип. пар., две области на эл. пар. типа 2		$1. \frac{B_2^{(2)} \times S^1}{\mathbb{Z}_2(\alpha)} \times B^{(2)}, \alpha -$ инволюция центральной симметрии 2. $\emptyset$ 3. $PF_{no} \times S^1$
14		По две области на эл. пар. типа 1, эл. пар. типа 2 и гип. пар		1. $B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1$ 2. $\emptyset$ 3. $\emptyset$