

УДК 519.17

В. П. Ильютко, Д. П. Ильютко

## Критерий цикличности обобщенного крестового графа с помощью минимальных миноров

В своей работе [1] Джилен и Оум нашли классы минимальных запрещенных миноров для цикличности простого графа с точностью до шарнирных преобразований и для эйлеровости дельта-матроида. Классы эквивалентности циклических простых графов по шарнирным преобразованиям и дельта-матроиды возникают при исследовании эйлеровых циклов на крестовых графах (4-графах с крестовой структурой) [2, 3, 4]. Полученные в [1] результаты полностью опираются на леммы 1.7 и 1.9 из этой же работы, которые, как мы покажем ниже, не совсем верны.

В данной работе рассматриваются обобщенные крестовые графы, которые появляются при описании поворачивающих обходов на крестовых графах. Для таких графов мы ищем критерий цикличности, повторяя и дополняя рассуждения из [1], а также подправляя неправильно сформулированные утверждения. В результате мы получаем тот же самый список, состоящий из 166 неэквивалентных графов, запрещенных минимальных миноров для цикличности обобщенного крестового графа.

**Ключевые слова:** граф, крестовой граф, хордовая диаграмма, эйлеров цикл, поворачивающий обход, цикличность.

### § 1. Введение

Многие известные свойства графов являются замкнутыми относительно перехода к минорам, т.е. к графам, полученным с помощью операций удаления ребра, стягивания ребра в точку и удаления связных компонент. К таким свойствам, например, относятся свойства планарности графа, вложимости графа в ту или иную поверхность, вложимости графа в трехмерное пространство без «узлов», а также многие другие. Миноры играют большую роль в теории графов, например, они полезны при построении полиномиальных алгоритмов распознавания разных свойств графов: вложимости, незаузленности и т.п.

Важной вехой в теории графов была серия работ Робертсона, Сеймура и Томаса (см. [5] и ссылки в ней) доказавших, что любое *минорно замкнутое* свойство, т.е. свойство графа, сохраняющееся при переходе к минорам, характеризуется конечным числом запрещенных графов. Иными словами, если граф не обладает таким свойством, то он содержит один из графов из конечного списка запрещенных графов в качестве минора. Заметим, что свойство графа иметь хроматическое число не больше данного и свойство реализуемости (*цикличности*) графа посредством хордовой диаграммы, см. определения ниже, к

---

Исследование Д. П. Ильютко выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда, проект 21-11-00355.

таким не относятся. Оказывается, что нереализуемость графа посредством хордовой диаграммы (его *нецикличность*) описывается в терминах некоторого конечного числа графов и некоторых операций над графами [6].

В работе [7] предложено исследовать аналог минорных свойств для крестовых графов. Крестовые графы тесным образом связаны как с графами общего вида, так и с теорией узлов. Например, критерий Понтрягина–Куратовского планарности графа можно доказать, используя только крестовые графы, см. [8]. Приведем еще один простой пример. Свойство двудольности графа не является минорно замкнутым. Однако если у 4-графа с крестовой структурой граф пересечений хордовой диаграммы его некоторого поворачивающего обхода, см. определения ниже, является двудольным, то двудольными являются все графы пересечений, соответствующие всем поворачивающим обходам, и это свойство равносильно планарности исходного крестового графа [9, 10] (все определения см. ниже). Таким образом, при переходе от графов пересечений к крестовым графам свойство, не являющееся минорным, (двудольность) превращается в минорно замкнутое свойство (планарность).

Целью настоящей работы является построение некоторого обобщения теории миноров для крестовых графов. А именно, каждому крестовому графу соответствует класс эквивалентности простых оснащенных графов по некоторым преобразованиям, см. определения ниже. Заметим, что такое соответствие не является взаимно однозначным, но каждый граф класса является циклическим, т.е. реализуется в виде графа пересечений какой-то хордовой диаграммы. Мы рассматриваем классы эквивалентности всех простых оснащенных графов по полученным преобразованиям, вводим понятие минора так, что свойство цикличности класса является минорно замкнутым, и находим все запрещенные минимальные миноры для цикличности класса. Аналогичная работа была проделана в статье [1], но основные результаты этой статьи опираются на леммы 1.7 и 1.9, которые частично верны.

Структура работы следующая. В следующем параграфе мы даем основные понятия и определения. В § 3 мы формулируем и доказываем критерий цикличности обобщенного крестового графа. Большинство результатов получено написанием авторами независимо друг от друга программ на пакете Mathematica. Поскольку большинство наших результатов совпало с результатами из [1], а справедливость некоторых наших результатов, отличных от результатов из [1], проверяется руками, то мы смеем предположить, что список минимальных запрещенных миноров для цикличности обобщенного крестового графа верен.

## § 2. Основные определения

В данном разделе мы дадим все основные определения. Все рассматриваемые графы являются конечными.

Пусть  $G$  — произвольный граф с множеством вершин  $V(G)$  и множеством ребер  $E(G)$ . *Ребро* графа — класс эквивалентности двух *полуребер*, составляющих его. Вершина  $v \in V(G)$  имеет *степень*, равную  $k$ , если  $v$  инцидентна ровно  $k$  полуребрам. Граф, все вершины которого имеют одну и ту же степень  $k$ , называется  *$k$ -валентным* или просто  *$k$ -графом*. Нам будет удобно считать, что

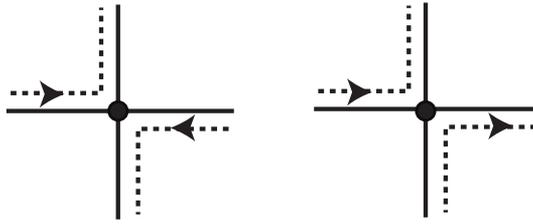


Рис. 1. Поворот в вершине

*свободная петля*, т.е. граф без вершин с одним *циклическим ребром*, является  $k$ -графом для любого  $k$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Гамильтонов цикл* на графе — это цикл, проходящий через все вершины графа по одному разу. *Хордовая диаграмма* — это 3-граф, состоящий из фиксированного неориентированного гамильтонового цикла (*окружности*) и неориентированных ребер (*хорд*), соединяющих точки на окружности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Мы назовем две хорды *зацепленными*, если концы одной хорды лежат в разных связных компонентах множества, полученного из окружности удалением концов другой хорды. В противном случае хорды называются *незацепленными*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** *Граф пересечений* хордовой диаграммы — это простой граф, т.е. граф без кратных ребер и петель, множество вершин которого находится во взаимно однозначном соответствии с множеством хорд хордовой диаграммы, и две вершины соединены ребром в том и только том случае, если соответствующие хорды зацеплены. Простой граф называется *циклическим*, если он является графом пересечений некоторой хордовой диаграммы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** 4-Граф называется *крестовым графом*, или графом с *крестовой структурой* или *со структурой противоположности ребер*, или *оснащенным 4-графом* [3, 4, 7, 9], если в каждой вершине графа четыре исходящих из нее полуребра разбиты на две пары полуребер. Полуребра из одного семейства называются (формально) *противоположными*, а из разных — *соседними*.

Очевидно, что простой граф является циклическим, если и только если его компоненты связности являются циклическими простыми графами. Поскольку мы исследуем цикличность простых графов, связанных с крестовыми графами, то без ограничения общности мы рассматриваем только связные крестовые графы.

Для каждого связного крестового графа существует *эйлеров цикл* [3, 9, 11], т.е. цикл, проходящий все ребра графа ровно один раз. Кроме того, существует эйлеров цикл, поворачивающий в каждой вершине с полуребра на соседнее полуребро [3, 9, 11]. Мы назовем такой эйлеров цикл *поворачивающим обходом*. В каждой вершине мы имеем один из двух случаев: либо ориентации, порожденные эйлеровым циклом, противоположных полуребер противоположны, либо они совпадают, см. рис. 1.

Имея поворачивающий обход на крестовом графе, мы получаем *оснащенную* хордовую диаграмму (каждая хорда имеет метку 0 или 1, называемую

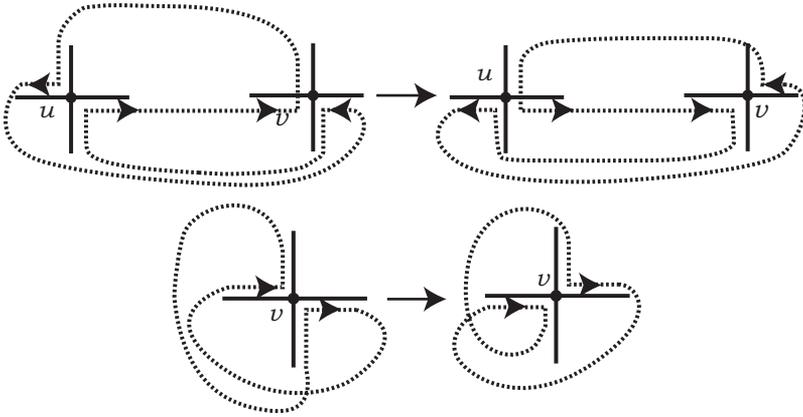


Рис. 2. Смена обхода

оснащением) по следующему правилу. Двигаясь вдоль обхода, мы отмечаем на окружности, которая соответствует обходу, точки всякий раз, как только мы встречаем вершину графа. Затем мы соединяем точки, соответствующие одной и той же вершине. Далее, хорда имеет оснащение 0, если ориентации противоположных полуребер в соответствующей вершине противоположны, и хорда имеет оснащение 1, в противном случае. По оснащенной хордовой диаграмме мы можем построить крестовой граф, для которого существует поворачивающий обход, дающий оснащенную хордовую диаграмму, совпадающую с данной оснащенной хордовой диаграммой. Очевидно, что существует много поворачивающих обходов, и любые два поворачивающих обхода получаются друг из друга последовательностью преобразований, изображенных на рис. 2, см. [3, 11].

Обобщим понятие крестового графа

Имея оснащенную хордовую диаграмму, мы можем построить ее *оснащенный* граф пересечений, приписав каждой вершине оснащение соответствующей хорды. Хорошо известно, что разные хордовые диаграммы могут иметь один и тот же граф пересечений, см. рис. 3, и существуют графы, которые не являются графами пересечений хордовых диаграмм, см. рис. 4 и [2]. В связи с этим определим *обобщенный* крестовой граф, рассматривая классы эквивалентности оснащенных (простых) графов, по некоторым преобразованиям, к которым мы сейчас переходим.

Множество всех вершин графа  $G$ , смежных с  $v$  и отличных от  $v$ , называется *окрестностью* вершины  $v$  и обозначается через  $N_G(v)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** *Локальное дополнение* графа  $G$  в вершине  $v \in V(G)$  — это операция, которая меняет смежности только между всеми вершинами  $a, b \in N_G(v)$  и  $a \neq b$  (остальные смежности остаются без изменений). Обозначим граф, полученный из  $G$  с помощью операции локального дополнения в вершине  $v$ , через  $LC(G; v)$ .

Определим две операции над оснащенными простыми графами:

$RC_1$ : берем в графе  $G$  две смежные вершины  $u$  и  $v$  с оснащением 0 и заменяем

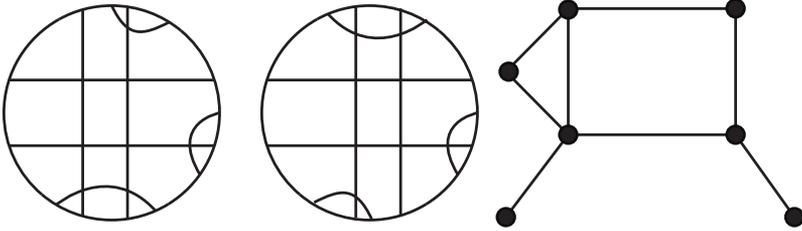


Рис. 3. Две хордовые диаграммы, имеющие один и тот же граф пересечений

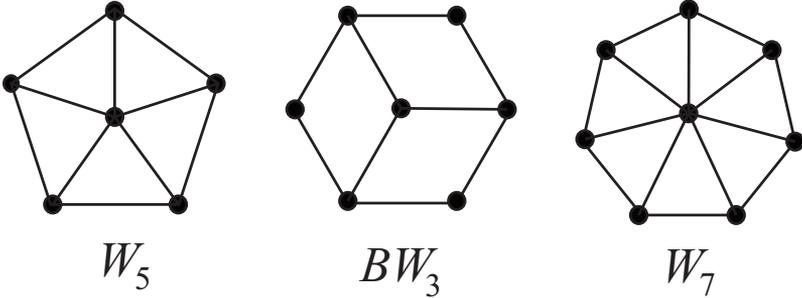


Рис. 4. Не циклические графы

граф  $G$  на граф  $LC(LC(LC(G; u); v); u)$  (оснащения всех вершин сохраняются);  $RC_2$ : берем в графе  $G$  одну вершину  $v$  с оснащением 1 и заменяем граф  $G$  на граф  $LC(G; v)$  и меняем оснащение каждой вершины из  $N_G(v)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Преобразование графа  $G$  в граф  $LC(LC(LC(G; u); v); u)$ , где  $u$  и  $v$  две смежные вершины графа  $G$ , называется шарнирным преобразованием графа  $G$  в вершинах  $u$  и  $v$  и обозначается  $piv(G; u, v)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если вершины  $u$  и  $v$  смежны, то легко показать изоморфность графов  $piv(G; u, v)$  и  $piv(G; v, u)$ .

Преобразования поворачивающих обходов на крестовых графах, изображенные на рис. 2, на языке оснащенных графов пересечений соответствующих оснащенных хордовых диаграмм соответствуют операциям  $RC_1$  и  $RC_2$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Обобщенный крестовой граф* — это класс эквивалентности оснащенных простых графов по преобразования  $RC_1$  и  $RC_2$ .

### § 3. Критерий цикличности обобщенного крестового графа

Легко видеть, что если какой-то представитель обобщенного крестового графа является циклическим, то и любой его представитель является циклическим [12]. Назовем обобщенный крестовой граф *циклическим*, если он имеет циклический представитель.

Определим *минор* обобщенного крестового графа  $G$  как обобщенный крестовой граф, порожденный графом, полученным из какого-то представителя

графа  $G$  удалением произвольных  $k$  вершин. Заметим, что для циклического оснащенного графа, полученного из крестового графа как граф пересечений некоторого поворачивающего обхода, удаление вершины соответствует разведению в соответствующей вершине крестового графа, т.е. операции  $\times \rightarrow \rangle\langle$  или  $\times \rightarrow \wedge$ , а выбор представителя для порождения минора как раз и задает одно из разведений в каждой удаляемой вершине.

Количества вершин разных представителей одного и того же обобщенного крестового графа одинаковы, и между вершинами имеется естественная биекция. Кроме того, количество разных миноров обобщенного крестового графа, полученных удалением одних и тех же  $k \geq 0$  вершин, не больше, чем  $2^k$ . В реализуемом случае это очевидно, в общем случае см. [12, 13].

Следующая лемма следует из геометрического описания миноров в случае циклического обобщенного крестового графа.

**ЛЕММА 3.1.** *Если обобщенный крестовой граф является циклическим, то любой его минор является циклическим.*

Наша цель описать запрещенные миноры для цикличности обобщенного крестового графа, т.е. указать такой список графов, что необходимым и достаточным условием цикличности обобщенного крестового графа является отсутствие минора, порожденного каким-то графом из данного списка. Очевидно, что достаточно описать минимальные запрещенные миноры, т.е. такие графы, что любой их минор, содержащий на одну вершину меньше, является циклическим.

Далее, теорема 1.1 из работы [2] утверждает, что простой граф не является циклическим тогда и только тогда, когда найдется *локально эквивалентный* ему граф, т.е. граф, полученный из него с помощью конечной последовательности локальных дополнений в вершинах, содержащий индуцированный подграф, изоморфный одному из графов, изображенных на рис. 4. Таким образом, каждый представитель запрещенного минора локально эквивалентен графу, содержащему индуцированный подграф, изоморфный одному из графов, изображенных на рис. 4. Напомним, что индуцированный подграф — это подграф, полученный удалением некоторого числа вершин из данного графа.

Опишем все запрещенные миноры к цикличности обобщенного крестового графа. Поиск этих миноров будем производить методами, использованными в [1].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.** Граф  $H$  называется *вершинным минором* графа  $G$ , если  $H$  является индуцированным подграфом в графе, локально эквивалентном графу  $G$ .

**ЛЕММА 3.2** (см. [14]). *Пусть  $H$  — вершинный минор простого графа  $G$ ,  $v \in V(G) \setminus V(H)$  и  $w \in N_G(v)$ . Тогда  $H$  вершинный минор одного из трех графов  $G \setminus v$ ,  $LC(G; v) \setminus v$  и  $\text{riv}(G; v, w) \setminus v$ .*

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Заметим, что для любых двух вершин  $w_1, w_2 \in N_G(v)$  графы  $\text{riv}(G; v, w_1) \setminus v$  и  $\text{riv}(G; v, w_2) \setminus v$  локально эквивалентны. Поскольку мы рассматриваем графы с точностью до локальной эквивалентности, то, следуя работе [1], будем обозначать граф  $\text{riv}(G; v, w) \setminus v$ , где  $w \in N_G(v)$ , через  $G/v$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть  $H$  — произвольный простой граф. Простой граф  $G$  называется  $H$ -единственным, если  $H$  изоморфен вершинному минору графа  $G$ , и для каждой вершины  $v \in V(G)$  не более одного графа среди графов  $G \setminus v$ ,  $LC(G; v) \setminus v$  и  $G/v$  имеет вершинный минор, изоморфный  $H$ .

ЛЕММА 3.3 (СР. [1]). Пусть  $G$  — представитель минимального запрещенного минора. Тогда  $G$  либо  $W_5$ -, либо  $BW_3$ -, либо  $W_7$ -единственный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф  $G$  содержит вершинный минор  $H$ , изоморфный либо  $W_5$ , либо  $BW_3$ , либо  $W_7$ , см. [2; теорема 1.1]. Допустим, что  $G$  не  $H$ -единствен. Тогда существует вершина  $v$ , такая, что по крайней мере два графа среди графов  $G \setminus v$ ,  $LC(G; v) \setminus v$  и  $G/v$  имеют вершинный минор, изоморфный  $H$ . Если один из таких графов это граф  $G \setminus v$ , то обобщенный крестовой граф, порожденный графом  $G \setminus v$ , является запрещенным минором. Получаем противоречие с минимальностью запрещенного минора  $\{G\}$ .

Пусть графы  $LC(G; v) \setminus v$  и  $G/v$  имеют вершинный минор, изоморфный  $H$ . Рассмотрим следующие случаи (принимая во внимание, что граф  $G$  связан): вершина  $v$  имеет оснащение 1; вершина  $v$  имеет оснащение 0 и найдется вершина  $w \in N_G(v)$  с оснащением 0; вершина  $v$  имеет оснащение 0 и любая вершина  $w \in N_G(v)$  имеют оснащение 1.

В первом случае мы получаем, что оснащенный граф  $LC(G; v)$  является представителем обобщенного крестового графа  $\{G\}$ , порожденного  $G$ , и, следовательно,  $LC(G; v) \setminus v$  порождает запрещенный минор, т.е. опять получаем противоречие с минимальностью запрещенного минора  $\{G\}$ .

Во втором случае мы получаем, что оснащенный граф  $\text{riv}(G; v, w)$  является представителем обобщенного крестового графа  $\{G\}$ , и, следовательно,  $G/v$  порождает запрещенный минор, т.е. опять получаем противоречие с минимальностью запрещенного минора  $\{G\}$ .

В третьем случае получаем, что оснащенный граф  $LC(LC(G; w); v)$  является представителем обобщенного крестового графа  $\{G\}$ . Поскольку граф  $LC(LC(G; w); v) \setminus v$  локально эквивалентен графу  $LC(LC(LC(G; w); v); w) \setminus v \cong G/v$ , то  $LC(LC(G; w); v) \setminus v$  порождает запрещенный минор, т.е. опять получаем противоречие с минимальностью запрещенного минора  $\{G\}$ .  $\square$

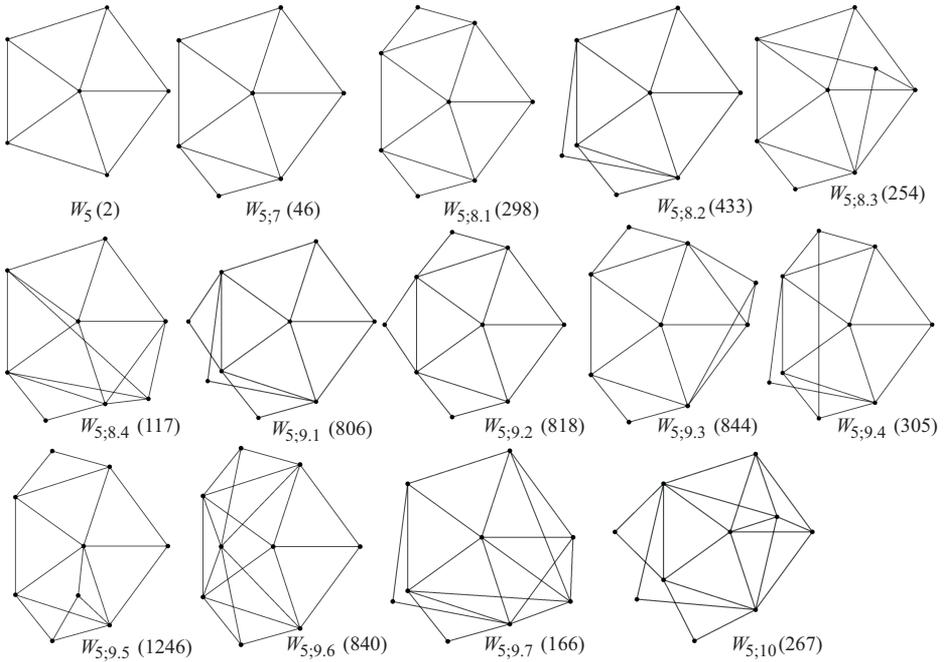
ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Геометрически доказательство леммы 3.3 означает, что при каком-то разведении вершины мы получим граф, который не реализуется хордовой диаграммой.

Опишем все  $W_5$ -,  $BW_3$ -,  $W_7$ -единственные графы. Сначала приведем леммы, которые помогают при описании таких графов.

ЛЕММА 3.4 (СМ. [1]). Пусть  $G$  —  $H$ -единственный граф, и  $H$  — вершинный минор графа  $G'$ , который в свою очередь является вершинным минором графа  $G$ . Тогда  $G'$  тоже является  $H$ -единственным.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Граф, локально эквивалентный  $H$ -единственному графу, —  $H$ -единственный.

ЛЕММА 3.5 (СМ. [1]). Пусть  $H$  — простой граф. Если для некоторого  $k > |V(H)|$ , не существует  $H$ -единственного графа, то каждый  $H$ -единственный граф имеет не более  $k - 1$  вершин.

Рис. 5.  $W_5$ -единственные графы

- ЛЕММА 3.6 (СР. [1]). 1) Каждый  $W_5$ -единственный граф локально эквивалентен графу, изоморфному одному из 14 графов, изображенных на рис. 5.
- 2) Каждый  $W_7$ -единственный граф либо локально эквивалентен графу  $W_7$ , либо имеет вершинный минор, изоморфный графу  $W_5$ .
- 3) Каждый  $BW_3$ -единственный граф либо локально эквивалентен графу  $BW_3$ , либо имеет вершинный минор, изоморфный графу  $W_5$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку  $H$ -единственный граф ищется с точностью до локальной эквивалентности (см. следствие 3.1), то мы можем считать, что он содержит индуцированный подграф, изоморфный  $H$ .

1) Каждый  $W_5$ -единственный граф должен содержать по крайней мере 6 вершин. Если  $W_5$ -единственный граф содержит 6 вершин, то мы получаем с точностью до локальной эквивалентности один граф,  $W_5$  (мощность класса локальной эквивалентности равна 2).

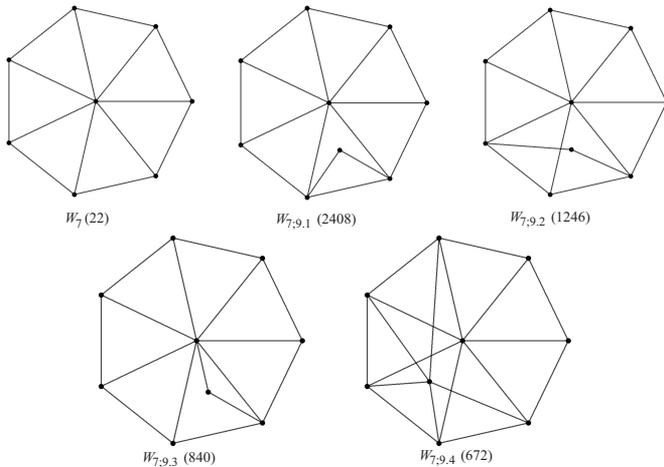
Пусть  $W_5$ -единственный граф содержит 7 вершин. Рассмотрим все неизоморфные связные простые графы, имеющие 7 вершин и содержащие индуцированный подграф, изоморфный  $W_5$ . Получаем 15 графов, из них 9 являются  $W_5$ -единственными и локально эквивалентными друг другу. В данном случае получаем с точностью до локальной эквивалентности один  $W_5$ -единственный граф  $W_{5,7}$  (класс локальной эквивалентности имеет мощность 46). Заметим, что графы  $BW_3$  и  $W_7$  не являются вершинными минорами графа  $W_{5,7}$ . Обозначим через  $FG_7$  множество, состоящее из оставшихся 6 графов, которые не являются  $W_5$ -единственными.

Пусть  $W_5$ -единственный граф содержит 8 вершин. Используя лемму 3.4, мы рассмотрим все неизоморфные связные простые графы, имеющие 8 вершин, содержащие индуцированный подграф, изоморфный  $W_{5;7}$ , и не содержащие индуцированных подграфов, изоморфных какому-то графу из  $FG_7$ . Получаем 55 графов, которые разбиваются на 10 классов локальной эквивалентности, из них 4 класса содержат  $W_5$ -единственные графы. В данном случае получаем четыре  $W_5$ -единственного графа  $W_{5;8.1}$ ,  $W_{5;8.2}$ ,  $W_{5;8.3}$  и  $W_{5;8.4}$  (по одному представителю из каждого класса). Мощности классов локальной эквивалентности равны 298, 433, 254 и 117 соответственно. Заметим, что граф  $W_7$  не является вершинным минором ни одного из графов  $W_{5;8.1}$ ,  $W_{5;8.2}$ ,  $W_{5;8.3}$  и  $W_{5;8.4}$ , а  $BW_3$  является вершинным минором графов  $W_{5;8.3}$  и  $W_{5;8.4}$ , причем эти графы являются  $BW_3$ -единственными. Обозначим через  $FG_8$  множество, состоящее из оставшихся 25 графов, которые не являются  $W_5$ -единственными.

Пусть  $W_5$ -единственный граф содержит 9 вершин. Используя лемму 3.4, мы рассмотрим все неизоморфные связные простые графы, имеющие 9 вершин, содержащие индуцированные подграфы, изоморфные хотя бы одному из графов  $W_{5;8.1}$ ,  $W_{5;8.2}$ ,  $W_{5;8.3}$  и  $W_{5;8.4}$ , и не содержащие индуцированных подграфов, изоморфных какому-то графу из  $FG_7$  или  $FG_8$ . Получаем 278 графов, которые разбиваются на 47 классов локальной эквивалентности, из них 7 классов содержат  $W_5$ -единственные графы. В данном случае получаем семь  $W_5$ -единственных графов  $W_{5;9.1}$ ,  $W_{5;9.2}$ ,  $W_{5;9.3}$ ,  $W_{5;9.4}$ ,  $W_{5;9.5}$ ,  $W_{5;9.6}$  и  $W_{5;9.7}$  (по одному представителю из каждого класса). Мощности классов локальной эквивалентности равны 806, 818, 844, 305, 1246, 840 и 166 соответственно. Заметим, что граф  $W_7$  является вершинным минором графов  $W_{5;9.5}$  и  $W_{5;9.6}$ , причем эти графы являются  $W_7$ -единственными, а  $BW_3$  является вершинным минором графов  $W_{5;9.1}$  и  $W_{5;9.5}$ , причем эти графы являются  $BW_3$ -единственными. Обозначим через  $FG_9$  множество, состоящее из оставшихся 235 графов, которые не являются  $W_5$ -единственными.

Пусть  $W_5$ -единственный граф содержит 10 вершин. Используя лемму 3.4, мы рассмотрим все неизоморфные связные простые графы, имеющие 10 вершин, содержащие индуцированные подграфы, изоморфные хотя бы одному из графов  $W_{5;9.1}$ ,  $W_{5;9.2}$ ,  $W_{5;9.3}$ ,  $W_{5;9.4}$ ,  $W_{5;9.5}$ ,  $W_{5;9.6}$  и  $W_{5;9.7}$ , и не содержащие индуцированных подграфов, изоморфных какому-то графу из  $FG_7$  или  $FG_8$ , или  $FG_9$ . Получаем 85 графов, которые разбиваются на 49 классов локальной эквивалентности, из них 1 класс содержит  $W_5$ -единственные графы. В данном случае получаем один  $W_5$ -единственный граф  $W_{5;10}$  (мощность класса локальной эквивалентности равны 267). Заметим, что граф  $W_7$  не является вершинным минором графа  $W_{5;10}$ , а  $BW_3$  является, причем  $W_{5;10}$  является  $BW_3$ -единственным. Обозначим через  $FG_{10}$  множество, состоящее из оставшихся 84 графов, которые не являются  $W_5$ -единственными.

Если мы рассмотрим все неизоморфные связные простые графы, имеющие 11 вершин, содержащие индуцированный подграф, изоморфный  $W_{5;10}$ , и не содержащие индуцированных подграфов, изоморфных какому-то графу из  $FG_7$  или  $FG_8$ , или  $FG_9$ , или  $FG_{10}$ , то мы получим три графа, которые не являются  $W_5$ -единственными. Таким образом, не существует  $W_5$ -единственных графов, имеющих больше десяти вершин.

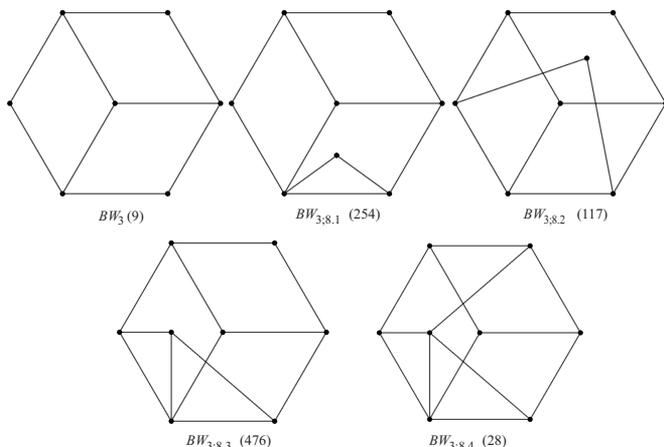
Рис. 6.  $W_7$ -единственные графы на 9 вершинах

2) Каждый  $W_7$ -единственный граф должен содержать по крайней мере 8 вершин. Если  $W_7$ -единственный граф содержит 8 вершин, то мы получаем с точностью до локальной эквивалентности один граф,  $W_7$  (мощность класса локальной эквивалентности равна 22).

Пусть  $W_7$ -единственный граф содержит 9 вершин. Рассмотрим все неизоморфные связные простые графы, имеющие 9 вершин и содержащие индуцированный подграф, изоморфный  $W_7$ . Получаем 35 графов, которые разбиваются на 6 классов локальной эквивалентности, из них 4 класса содержат  $W_7$ -единственные графы. В данном случае получаем четыре  $W_7$ -единственных графа  $W_{7,9,1}$ ,  $W_{7,9,2}$ ,  $W_{7,9,3}$  и  $W_{7,9,4}$  (по одному представителю из каждого класса), см. рис. 6. Мощности классов локальной эквивалентности равны 2408, 1246, 840 и 672 соответственно. Осталось заметить, что граф  $W_{7,9,2}$  локально эквивалентен графу  $W_{5,9,5}$ , а  $W_{7,9,3}$  —  $W_{5,9,6}$ , и  $W_5$  является вершинным минором графов  $W_{7,9,1}$  и  $W_{7,9,4}$ , причем эти графы не являются  $W_5$ -единственными ( $W_{7,9,1}$  является  $BW_3$ -единственными).

3) Каждый  $BW_3$ -единственный граф должен содержать по крайней мере 7 вершин. Если  $BW_3$ -единственный граф содержит 7 вершин, то мы получаем с точностью до локальной эквивалентности один граф,  $BW_3$  (мощность класса локальной эквивалентности равна 9).

Пусть  $BW_3$ -единственный граф содержит 8 вершин. Рассмотрим все неизоморфные связные простые графы, имеющие 8 вершин и содержащие индуцированный подграф, изоморфный  $BW_3$ . Получаем 39 графов, которые разбиваются на 7 классов локальной эквивалентности, из них 4 класса содержат  $BW_3$ -единственные графы. В данном случае получаем четыре  $BW_3$ -единственных графа  $BW_{3;8,1}$ ,  $BW_{3;8,2}$ ,  $BW_{3;8,3}$  и  $BW_{3;8,4}$  (по одному представителю из каждого класса), см. рис. 7. Мощности классов локальной эквивалентности равны 254, 117, 476 и 28 соответственно. Осталось заметить, что граф  $BW_{3;8,1}$  локально эквивалентен графу  $W_{5;8,3}$ , а  $BW_{3;8,2}$  —  $W_{5;8,4}$ , и  $W_5$  является вер-

Рис. 7.  $BW_3$ -единственные графы на 8 вершинах

шинным минором графов  $BW_{3;8.3}$  и  $BW_{3;8.4}$ , причем эти графы не являются  $W_5$ -единственными.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.** Лемма 1.7 из [1] утверждает, что существует одиннадцать  $W_5$ -единственных графов. Как видим, эта лемма неверна. Также, как мы думаем, число под каждым графом на рис. 4 из [1] должно соответствовать мощности класса локальной эквивалентности соответствующего графа. Почти все мощности, за исключением первой, указаны неправильно.

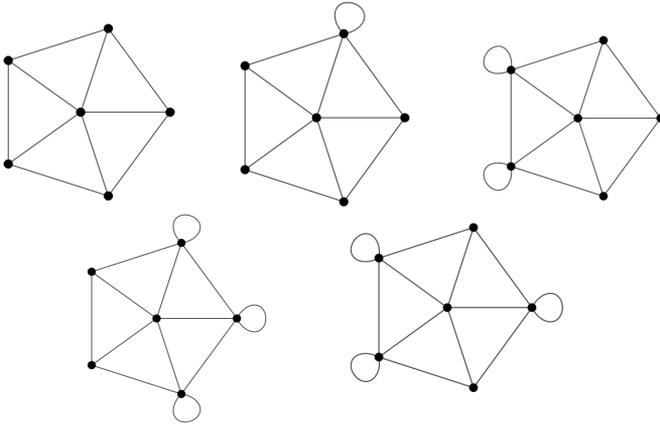
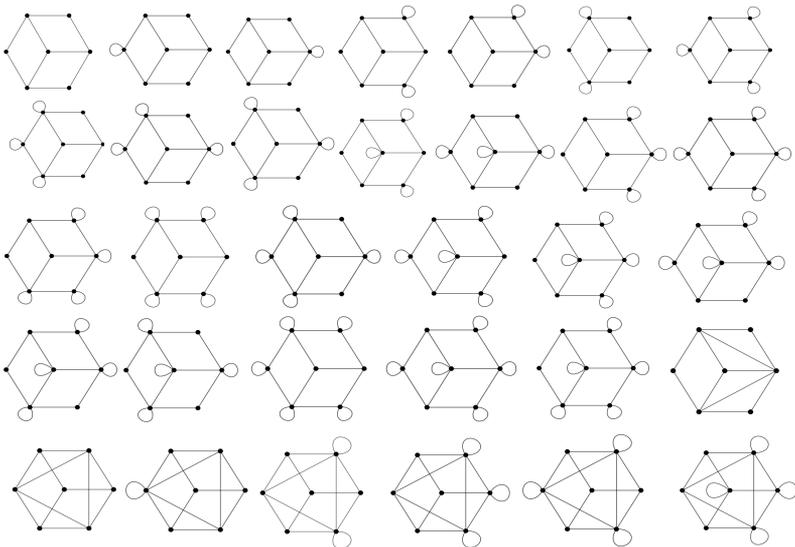
Лемма 1.9 из [1] утверждает, что граф  $Q_3$ , остов куба, является  $BW_3$ -единственным графом. Легко проверить, что утверждение тоже неверно.

**ТЕОРЕМА 3.1.** *Обобщенный крестовой граф является циклическим, если и только если он не содержит минора, порожденного одним из 166 графов, изображенных на рис. 8-15 (петли на рисунках соответствуют оснащению 1, т.е. вершины с оснащением 1, и только они, на рисунках изображены вершинами с петлями).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из лемм 3.3 и 3.6 следует, что представитель каждого минимального запрещенного минора локально эквивалентен  $BW_3$ ,  $W_7$  или одному из 14 графов, изображенных на рис. 5. Для каждого из 16 графов рассмотрим все ему локально эквивалентные графы, добавим всевозможные оснащения к каждому из полученных графов, разобьем полученное множество графов на классы эквивалентности по преобразованиям  $RC_1$  и  $RC_2$  и проверим каждый класс на минимальность. В результате получаем следующее.

Граф  $W_5$  дает 29 оснащенных графов, которые порождают 5 обобщенных крестовых графов, и все они являются минимальными запрещенными минорами, см. рис. 8.

Граф  $BW_3$  дает 560 оснащенных графов, которые порождают 32 обобщенных крестовых графов, и все они минимальные запрещенные миноры, см. рис. 9.

Рис. 8. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $W_5$ Рис. 9. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $BW_3$

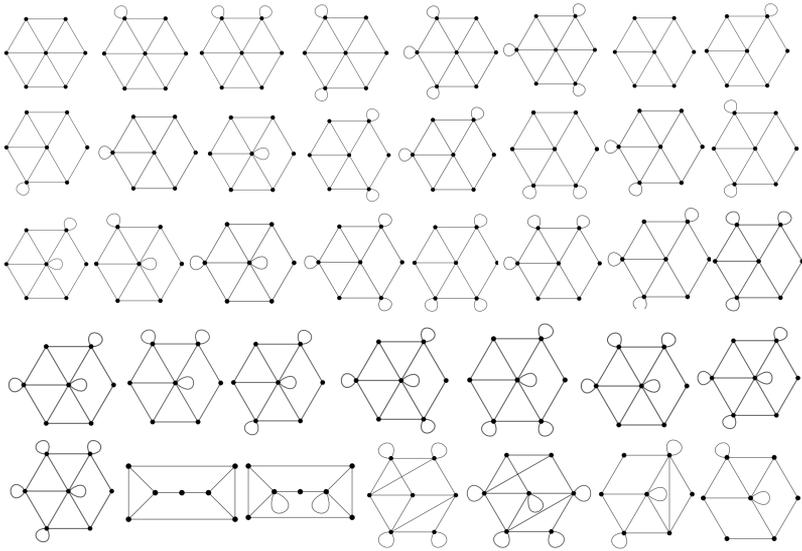


Рис. 10. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $W_{5,7}$

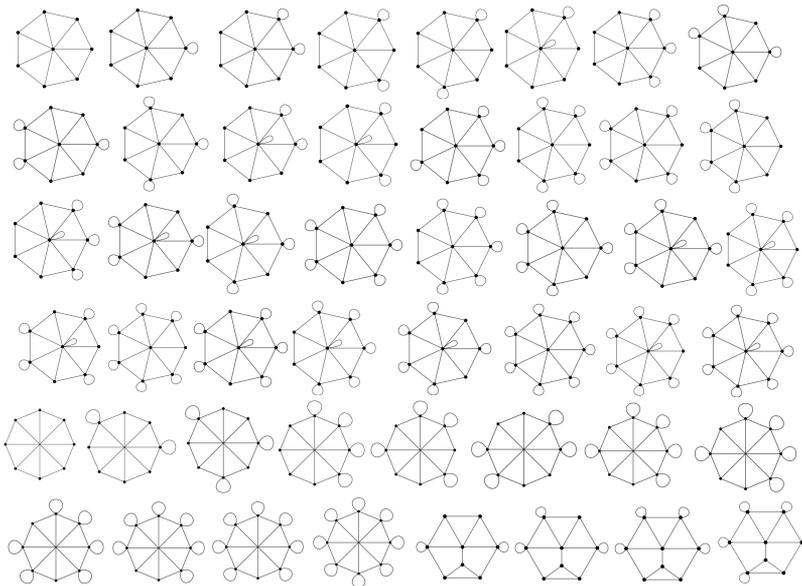


Рис. 11. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $W_7$

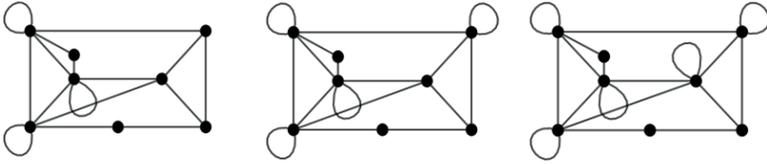


Рис. 12. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $W_{5;8.1}$

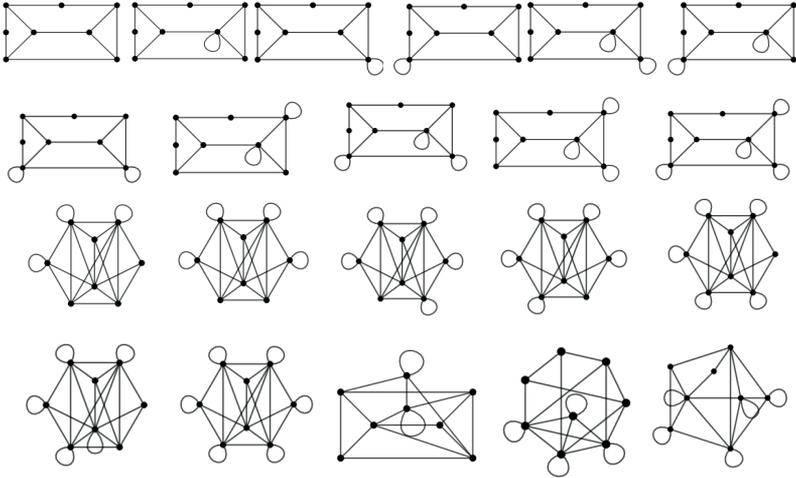


Рис. 13. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $W_{5;8.2}$

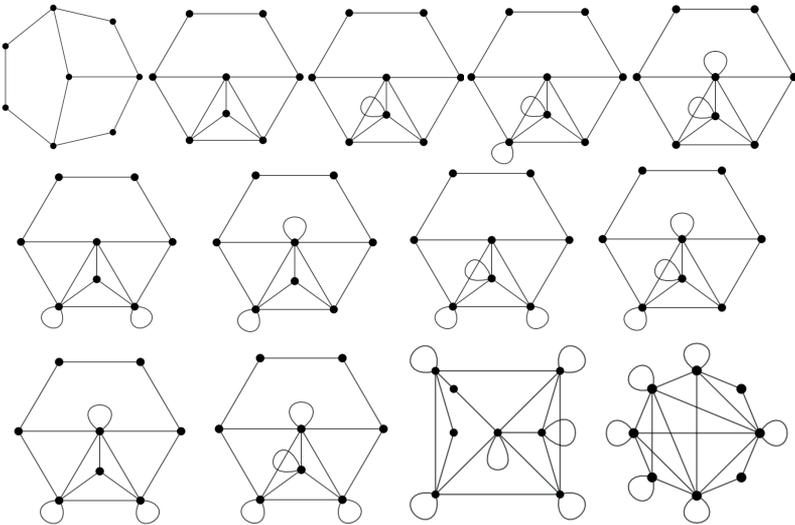


Рис. 14. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $W_{5;8.3}$

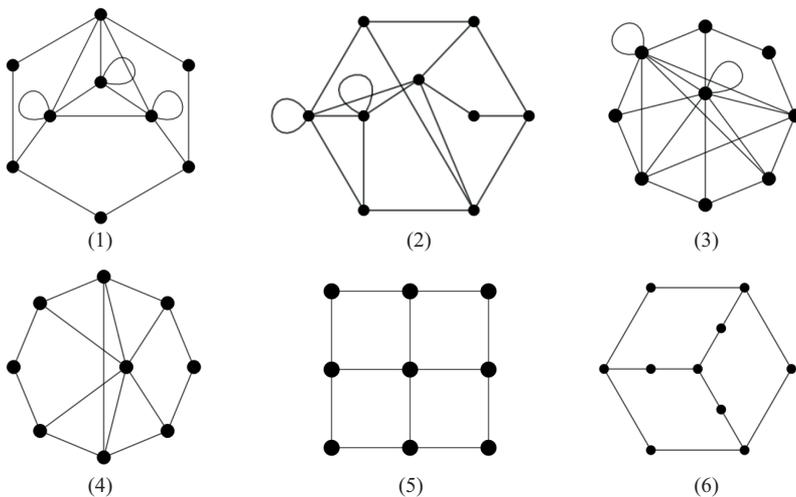


Рис. 15. Минимальные запрещенные миноры, порожденные  $W_{5;9.1}$ ,  $W_{5;9.2}$ ,  $W_{5;9.3}$ ,  $W_{5;9.4}$ ,  $W_{5;9.7}$  и  $W_{5;10}$

Граф  $W_{5;7}$  дает 2226 оснащенных графов, которые порождают 114 обобщенных крестовых графов, и 38 из них являются минимальными запрещенными минорами, см. рис. 10.

Граф  $W_7$  дает 2711 оснащенных графов, которые порождают 48 обобщенных крестовых графов, и все они минимальные запрещенные миноры, см. рис. 11.

Граф  $W_{5;8.1}$  дает 5128 оснащенных графов, которые порождают 561 обобщенный крестовой граф, и 3 из них являются минимальными запрещенными минорами, см. рис. 12.

Граф  $W_{5;8.2}$  дает 16594 оснащенных графов, которые порождают 933 обобщенных крестовых графов, и 21 из них являются минимальными запрещенными минорами, см. рис. 13.

Граф  $W_{5;8.3}$  дает 7840 оснащенных графов, которые порождают 579 обобщенных крестовых графов, и 13 из них являются минимальными запрещенными минорами, см. рис. 14.

Графы  $W_{5;8.4}$ ,  $W_{5;9.5}$  и  $W_{5;9.6}$  дают 1484, 5536 и 6848 оснащенных графов соответственно, которые порождают 142, 1330 и 894 обобщенных крестовых графов соответственно, и ни один из них не является минимальным запрещенным минором.

Графы  $W_{5;9.1}$ ,  $W_{5;9.2}$ ,  $W_{5;9.3}$ ,  $W_{5;9.4}$ ,  $W_{5;9.7}$  и  $W_{5;10}$  дают 5568, 5960, 7290, 1690, 662 и 1210 оснащенных графов соответственно, которые порождают 1339, 1398, 1490, 530, 267 и 441 обобщенных крестовых графов соответственно, и 6 из них (по одному для каждого первоначального графа) являются минимальными запрещенными минорами, см. рис. 15. □

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Таким образом, мы получили тот же самый список минимальных запрещенных миноров, который был приведен на рис. 5 из [1].

Авторы выражают благодарность В. О. Мантурову и И. М. Никонову за внимание к работе и полезные замечания.

### Список литературы

- [1] J. Geelen and S. Oum, “Circle graph obstructions under pivoting”, *J. Graph Theory*, **61**:1 (2009), 1–11.
- [2] A. Bouchet, “Greedy algorithm and symmetric matroids”, *Math Programming*, **38**:2 (1987), 147–159.
- [3] Д. П. Ильютко “Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы”, *Матем. сбор.*, **202**:9 (2011), 53–76; D. P. Ilyutko, “Framed 4-valent graphs: Euler tours, Gauss circuits and rotating circuits”, *Sb. Math.*, **202**:9 (2011), 1303–1326.
- [4] D. P. Ilyutko, V. O. Manturov, “Introduction to graph-link theory”, *J. Knot Theory Ramifications*, **18**:6 (2009), 791–823.
- [5] N. Robertson, P. D. Seymour, “Graph minors XX. Wagners conjecture”, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **92**:2 (2004), 325–357.
- [6] A. Bouchet, “Circle graph obstructions”, *J. Comb. Theory Ser. B.*, **60** (1994), 107–144.
- [7] V. O. Manturov, “Framed 4-valent graph minor theory I: Introduction. A planarity criterion and linkless embeddability”, *J. Knot Theory Ramifications*, **23**:7 (2014).
- [8] I. Nikonov, “A new proof of Vassiliev’s conjecture”, *J. Knot Theory Ramifications*, **23** (2014).
- [9] В. О. Мантуров, “Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений”, *Известия РАН: Сер. Мат.*, **69**:5 (2005), 169–178; V. O. Manturov, “A proof of Vassiliev’s conjecture on the planarity of singular links”, *Izv. Math.*, **69**:5 (2005), 1025–1033.
- [10] R. C. Read, P. Rosenstiehl, “On the Gauss crossing problem”, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, 1976, 843–876.
- [11] A. Kotzig, “Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations”, *Theory of Graphs*, 1968, 219–230.
- [12] V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, *Virtual Knots: The State of the Art*, World Scientific, Singapore, 2013.
- [13] Д. П. Ильютко, В. С. Сафина, “Граф-зацепления: нереализуемость, ориентация и полином Джонса”, *Топология, СМФН*, **51** (2013), 33–63; D. P. Ilyutko, V. S. Safina, “Graph-links: nonrealizability, orientation, and Jones polynomial”, *Journal of Mathematical Sciences*, **214**:5 (2013), 632–664.
- [14] A. Bouchet, “Graphic presentations of isotropic systems”, *J. Combin. Theory Ser. B.*, **45**:1 (1988), 58–76.

#### В. П. Ильютко (V. P. Ilyutko)

Факультет вычислительной математики и кибернетики,  
Московский государственный университет имени  
М. В. Ломоносова

E-mail: [ilyutko@cs.msu.ru](mailto:ilyutko@cs.msu.ru)

#### Д. П. Ильютко (D. P. Ilyutko)

Механико-математический факультет, Московский  
государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: [denis.ilyutko@math.msu.ru](mailto:denis.ilyutko@math.msu.ru)