УДК 515.16+519.17

ПОВЕДЕНИЕ БИНАРНОГО РАНГА ГРАФА ПРИ ДОБАВЛЕНИИ ВЕРШИН И РЕБЕР

С. Ю. Безгодова[1], **Д. П. Ильютко**[2]

Рассматривается вопрос изменения бинарного ранга матрицы смежности простого графа при добавлении вершин и некоторых ребер. Количество ребер, появляющихся после добавления вершины, не является постоянной величиной.

Ключевые слова: граф, бинарный ранг.

We consider the issue of changing the binary rank of the adjacency matrix of a simple graph under adding vertices and some edges. The number of edges that appear after adding a vertex is not constant.

Key words: graph, binary rank.

1. Введение. Критерий вложимости четырехвалентного графа с крестовой структурой в двумерную поверхность формулируется в работе [1] в терминах бинарного ранга матрицы смежности некоторого простого графа, построенного по данному четырехвалентному графу. При использовании данного критерия для описания запрещенных миноров к вложимости графа мы сталкиваемся с вопросом поведения бинарного ранга матрицы смежности в случае добавления вершин и ребер к графу. Проблема определения точного результата от добавления одной вершины в графе сложна, так как количество ребер, появляющихся после добавления вершины, не является постоянной величиной. Ранг нового графа не может уменьшиться, он может лишь увеличиться на 2. Мы рассматриваем несколько случаев добавления вершин. Результаты, касающиеся рангов над $\mathbb{Z}$, могут быть найдены в [2].

2. Основные определения и понятия. Пусть G — произвольный простой конечный граф с множеством вершин $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (т.е. все вершины пронумерованы) и множеством ребер $E(G)$. В настоящей работе рассматриваются только конечные простые графы. Напомним, что две вершины называются *смежными*, если они соединяются ребром, *степень* вершины $v \in V(G)$ равна числу инцидентных ей ребер и обозначается $\deg(v)$. Множество вершин, смежных с вершиной v, обозначается $N(v)$ и называется *окрестностью* вершины v.

Определение. *Матрица смежности* графа G — это квадратная матрица $A(G) = (a_{ij})$ размера n, где $a_{ij} = 0$ при $i = j$ и при $i \neq j$, если вершины v_i и v_j не являются смежными, и $a_{ij} = 1$, $i \neq j$, если вершины v_i и v_j являются смежными.

Определение. *Независимое множество* ребер, или *паросочетание* в графе, — это произвольное множество попарно несмежных ребер. *Реберное число независимости* $\beta_1(G)$ графа G — это наибольшее число ребер, образующих независимое множество.

Рассматриваются следующие операции над графами.

Удаление вершины v: граф $G - v$ получается из G удалением вершины v и всех инцидентных ей ребер.

Удаление ребра e: граф $G - e$ получается удалением ребра e из G, инцидентные ему вершины остаются.

Добавление вершины v *и одного ребра, инцидентного вершине* $u \in V(G)$: граф $G \oplus_u v$ получается добавлением вершины v, а также ребра между вершиной u графа G и добавленной вершиной v.

Добавление вершины v *и нескольких ребер, задающихся* n*-мерным вектором* $\mathbf{x}$: граф $G \oplus_{\mathbf{x}} v$ получается добавлением вершины v, а также ребра между v и теми вершинами v_i графа G, для которых $x_i = 1$ в векторе $\mathbf{x}$, состоящем из 0 и 1 (номер координаты вектора соответствует номеру

[1] *Безгодова Светлана Юрьевна* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bezgodowa.s@yandex.ru.

[2] *Ильютко Денис Петрович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ilyutko@yandex.ru.

Bezgodova Svetlana Yurievna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Ilyutko Denis Petrovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

i-й вершины графа). Вектор $\mathbf{x}$ называется *вектором окрестности вершины* v. В $G \oplus_{\mathbf{x}} v$ имеем $N(v) = \{v_i \mid x_i = 1\}$ и определим $\mathbf{x}$ как *вектор окрестности* вершины v в графе G. Следовательно,

$$A(G \oplus_{\mathbf{x}} v) = \begin{pmatrix} A(G) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

если v имеет номер $n+1$. Заметим, что если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, то $G \oplus_{\mathbf{x}} v = G \oplus_{v_i} v$.

3. Ранги некоторых графов. Пусть A — произвольная квадратная целочисленная матрица. Тогда через $\mathrm{rk}A$ и $\mathrm{rk}_2 A$ будем обозначать ранг матрицы A, рассматриваемой над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$ соответственно. Для графа G положим $r(G) = \mathrm{rk}A(G)$ и $r_2(G) = \mathrm{rk}_2 A(G)$. Матрица $A(G - v)$ является подматрицей матрицы $A(G)$, следовательно, $r_2(G - v) \leqslant r_2(G)$. Пусть B — матрица, полученная из матрицы $A(G)$ заменой строки и столбца, соответствующих вершине v, нулевыми строкой и столбцом, $C = A(G) - B$. Тогда C — матрица с ненулевыми значениями в одной строке и одном столбце. Следовательно, $r_2(C) \leqslant 2$ и $r_2(G) = \mathrm{rk}_2(B + C) \leqslant \mathrm{rk}_2 B + \mathrm{rk}_2 C \leqslant r_2(G - v) + 2$. Аналогично дело обстоит в случае $\mathbb{Z}$.

Утверждение 1. 1) *Для любого графа G и любой вершины v имеем $r_2(G) - 2 \leqslant r_2(G - v) \leqslant r_2(G)$, $r(G) - 2 \leqslant r(G - v) \leqslant r(G)$.*

2) *Для любого графа G при добавлении вершины v и ребер, задающихся вектором $\mathbf{x}$, имеем $r_2(G) \leqslant r_2(G \oplus_{\mathbf{x}} v) \leqslant r_2(G) + 2$, $r(G) \leqslant r(G \oplus_{\mathbf{x}} v) \leqslant r(G) + 2$.*

Доказательство следующей теоремы очевидно.

Теорема 1. *Если в графе G существует вершина $v \neq u$, такая, что $N(v) = N(u)$, то $r_2(G - u) = r_2(G)$, $r(G - u) = r(G)$.*

Теорема 2. *Для любой вершины v графа G, у которой* $\deg(v) = 1$ *и $N(v) = \{u\}$, имеем $r_2(G - \{u, v\}) = r_2(G) - 2$, $r(G - \{u, v\}) = r(G) - 2$.*

Доказательство. Пронумеруем вершины графа G таким образом, чтобы вершины v и u имели номера 1 и 2 соответственно. Тогда $a_{12} = a_{21} = 1$ и на остальных позициях первой строки и первого столбца — нули. Для второй строки и второго столбца, кроме a_{12} и a_{21}, могут быть еще ненулевые элементы. Пусть эти элементы имеют номера строк и номера столбцов $k_1, \ldots, k_m$, где $m \leqslant n - 2$. Применяя элементарные преобразования к $A(G)$, обнулим все эти ненулевые элементы (вычитаем первый столбец из столбца с номером k_i и первую строку из строки с номером k_i, $i = 1, \ldots, m$). Тогда

$$r_2(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A(G - \{u, v\}) \end{pmatrix}$$

(здесь $\mathbf{0}$ — вектор-столбец, состоящий из нулей), т.е. на 2 больше, чем $r_2(G - \{u, v\})$. □

Следующие результаты являются простыми следствиями теоремы 2.

Следствие 1. *Имеем $r_2(G \oplus_u v) = r_2(G - u) + 2$, $r(G \oplus_u v) = r(G - u) + 2$, $r_2((G \oplus_{\mathbf{x}} u) \oplus_u v) = r_2(G) + 2$ и $r((G \oplus_{\mathbf{x}} u) \oplus_u v) = r(G) + 2$.*

Теорема 3. *Пусть G — лес, тогда $r_2(G) = r(G) = 2\beta_1(G)$.*

Доказательство. Утверждение для дерева и ранга над $\mathbb{Z}$ доказано в [3]. Справедливость утверждения для леса и ранга над $\mathbb{Z}$ следует из справедливости утверждения для дерева и из аддитивности ранга и реберного числа независимости для дизъюнктного объединения графов.

Докажем формулу для ранга над $\mathbb{Z}_2$ по индукции, где индукцию будем проводить по количеству вершин. Для одной вершины формула справедлива. Пусть формула верна для лесов с $n-1$ вершиной. Рассмотрим лес с n вершинами. Существует вершина v степени 1, которая смежна только вершине u. Тогда $r_2(G) = r_2(G - \{u, v\}) + 2 = r(G - \{u, v\}) + 2 = r(G) = 2\beta_1(G)$. □

Следствие 2. *Ранг пути P_n на n (при $n \geqslant 2$) вершинах равен*

$$r_2(P_n) = r(P_n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ четное;} \\ n - 1, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Утверждение 2. *Ранг цикла C_n длины n (при $n \geqslant 3$) равен*

$$r_2(C_n) = \begin{cases} n - 2, & \text{если } n \text{ четное;} \\ n - 1, & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases} \qquad r(C_n) = \begin{cases} n - 2, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4; \\ n, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение для $r_2(C_n)$ следует из двух простых фактов: сумма всех строк дает нулевой вектор и выкидывание вершины из графа дает путь, т.е. $r_2(C_n) = r_2(P_{n-1})$. □

Утверждение 3. *Ранг полного графа K_n на n вершинах равен*

$$r_2(K_n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ четное;} \\ n-1, & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases} \quad \text{и} \quad r(K_n) = n.$$

Доказательство. Заметим, что для случая над $\mathbb{Z}_2$ сумма четного числа столбцов дает вектор, у которого число единиц равно числу нулей, встречающихся в столбцах (остальные — нули), а сумма нечетного числа столбцов дает вектор, у которого число нулей равно числу нулей, встречающихся в столбцах (остальные — единицы). Значит, для полного графа с четным количеством вершин сумма всех столбцов дает единичный вектор и ранг такого графа равен количеству вершин. Для полного графа с нечетным количеством вершин сумма столбцов дает нулевой вектор, а при выкидывании вершины мы получаем граф K_{n-1} уже с четным количеством вершин. □

Корона двух графов (обозначение $G_1 \circ G_2$) — это граф, полученный взятием одной копии графа G_1 (пусть G_1 имеет n вершин) и n копий графа G_2 и соединением каждой i-й вершины графа G_1 с каждой вершиной i-й копии графа G_2. Следовательно, корона графа G с K_1 ($G \circ K_1$) — это граф, полученный добавлением n новых вершин, каждая из которых смежна с одной вершиной графа G. В таком случае матрица смежности для $G \circ K_1$ выглядит следующим образом:

$$A(G \circ K_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_n & I_n \\ I_n & A(G) \end{pmatrix},$$

где I_n и $\mathcal{O}_n$ — единичная и нулевая матрицы размера n. Из данного вида получаем следующую теорему.

Утверждение 4. *Если G — граф на n вершинах, то $r(G \circ K_1) = r_2(G \circ K_1) = 2n$.*

4. Добавление одной вершины и любого количества ребер в граф. При добавлении вершины и нескольких ребер в граф ранг матрицы может остаться неизменным или увеличиться на 2 для $\mathbb{Z}_2$ и может остаться неизменным или увеличиться на 1 или на 2 для $\mathbb{Z}$. Приведем теорему, которая позволяет вычислить ранг произвольного графа при добавлении одной вершины и некоторого количества смежных этой вершине ребер.

Обратимся к следующей очевидной лемме.

Лемма 1. *Для любого n-вектора $\mathbf{y}$ и любой симметричной целочисленной матрицы A размерности n выполнено $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y} = 0$ над $\mathbb{Z}_2$.*

Определение. Пусть A — матрица. Тогда *образом* $\mathrm{rs}(A)$ матрицы A назовем линейное пространство $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

Теорема 4. *Имеют место следующие утверждения*:

1) $r_2(G \oplus_{\mathbf{x}} v) = r_2(G) + 2$ *в том и только в том случае, когда* $\mathbf{x}$ *не является вектором из образа* $\mathrm{rs}(A(G))$ *матрицы* $A(G)$, *т.е.* $\mathbf{x} \notin \mathrm{rs}(A(G))$;

2) $r(G \oplus_{\mathbf{x}} v) = r(G) + 2$ *в том и только в том случае, когда* $\mathbf{x} \notin \mathrm{rs}(A(G))$;

3) *если* $\mathbf{x} = A\mathbf{y} \in \mathrm{rs}(A(G))$, *то*

а) $r(G \oplus_{\mathbf{x}} v) = r(G) + 1$ *в том и только в том случае, когда вектор* $\mathbf{x}$ *не ортогонален* $\mathbf{y}$;

б) $r(G \oplus_{\mathbf{x}} v) = r(G)$ *в том и только в том случае, когда вектор* $\mathbf{x}$ *ортогонален* $\mathbf{y}$.

Доказательство. Докажем утверждение над $\mathbb{Z}_2$. Пусть $A = A(G)$, $\{\mathbf{e}_i\}, i = 1, \ldots, k,$ — базис в $\mathrm{rs}(A)$ и

$$B = A(G \oplus_{\mathbf{x}} v) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\mathbf{x} \notin \mathrm{rs}(A)$, то $\{\mathbf{e}_i\} \cup \{\mathbf{x}\}$ представляет собой независимый набор векторов и, таким образом,

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

является базисом в $\mathrm{rs}(B)$.

Если $\mathbf{x} = A\mathbf{y} \in \mathrm{rs}(A)$, то ранг матрицы B равен рангу матрицы

$$\begin{pmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -\mathbf{y} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

По лемме 1 имеем $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \langle A\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$, следовательно, $\mathrm{rk}_2 B = \mathrm{rk}_2 A$. □ □

Следующие результаты являются обобщением теоремы 1.

Следствие 3. 1) *Пусть* u — *вершина графа* G. *Если вершины* $v_1, \ldots, v_k$, *где* $k \geqslant 1$, *в графе* G *не смежны с* u *и* $N(u)$ *не содержит общих элементов с множествами* $N(v_i)$, $i = 1, \ldots, k$, *то* $r_2(G - u) = r_2(G)$, $r(G - u) = r(G)$.

2) *Пусть* u — *вершина графа* G. *Если вершины* v_1, v_2 *в графе* G *не смежны с* u, *так что* $N(v_1) \subseteq N(v_2)$ *и множество* $N(u)$ *является разностью множеств* $N(v_1)$ *и* $N(v_2)$, *то* $r_2(G - u) = r_2(G)$, $r(G - u) = r(G)$.

Доказательство. Докажем следствие над $\mathbb{Z}_2$. Обозначим через J множество номеров вершин $v_1, \ldots, v_k$ из п. 1 (v_1, v_2 из п. 2), учитывая порядок вершин $G - u$, используемых в определении матрицы смежности $A = A(G - u)$. Выберем $\mathbf{y}$ так, что $y_i = 0$ для $i \notin J$, в то время как $x_i = 0$ для $i \in J$. Следовательно, $\mathbf{x} = A\mathbf{y}$. $\square$

5. Добавление одной вершины и одного ребра в граф $G \oplus_u v$. Предыдущие результаты являются слишком обобщенными. Гораздо больше можно сказать о частном случае добавления одной вершины и только одного ребра к определенным классам графов.

Теорема 5. *Имеем*

$$r_2(K_n \oplus_u v) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ четное;} \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases} \quad \text{и} \quad r(K_n \oplus_u v) = n+1,$$

$$r_2(C_n \oplus_u v) = r(C_n \oplus_u v) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ четное;} \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases}$$

$$r_2(P_n \oplus_u v) = r(P_n \oplus_u v) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ четное;} \\ n-1, & \text{если } n \text{ нечетное и с обеих сторон от } u \\ & \text{нечетное число вершин;} \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетное и с обеих сторон от } u \\ & \text{четное число вершин.} \end{cases}$$

Доказательство. Применяем теорему 2 для случаев $r_2(K_n \oplus_u v)$ и $r_2(C_n \oplus_u v)$, а равенство для $r_2(P_n \oplus_u v)$ следует из [2]. $\square$

Теорема 6. *Пусть* $G = C_n \oplus_{v_i} u$, *где* $C_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. *Тогда для* $j \neq i$ *имеем*

$$r_2(G \oplus_{v_j} v) = \begin{cases} r_2(G), & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ r_2(G), & \text{если } n \text{ четное и } i, j \text{ имеют одинаковую четность;} \\ r_2(G) + 2, & \text{если } n \text{ четное и } i, j \text{ имеют различную четность,} \end{cases}$$

$$r(G \oplus_{v_j} v) = \begin{cases} r(G), & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ r(G), & \text{если } n \text{ четное и } i, j \text{ имеют одинаковую четность;} \\ r(G) + 2, & \text{если } n \text{ четное и } i, j \text{ имеют различную четность.} \end{cases}$$

Доказательство. При удалении вершин v и v_j из графа $G \oplus_{v_j} v$ мы получаем граф $P_{n-1} \oplus_{v_i} u$. Если n нечетно, то $n-1$ четно и $r_2(P_{n-1} \oplus_{v_i} u) = n-1$, $r_2(G) = n+1$. Итак, по теореме 2 ранг исходного графа равен $(n-1)+2 = n+1 = r_2(G)$. Если же n четно, то $n-1$ нечетно и $r_2(G) = n$. Если i и j имеют одинаковую четность, то в графе $P_{n-1} \oplus_{v_i} u$ нечетное число вершин с обеих сторон от u, т.е. $r_2(P_{n-1} \oplus_{v_i} u) = n-2$. В очередной раз по теореме 2 получаем, что ранг исходного графа равен $n-2+2 = n = r_2(G)$. Аналогично если i и j имеют различную четность, то в графе четное число вершин с обеих сторон от u. Следовательно, $r_2(P_{n-1} \oplus_{v_i} u) = n$ и ранг исходного графа равен $n+2 = r_2(G)+2$. $\square$ $\square$

Теорема 7. *Пусть* $G = P_n \oplus_{v_i} u$, *где* $P_n = (v_1, v_2, ..., v_n)$. *Тогда для* $j \neq i$ *имеем*

$$r_2(G \oplus_{v_j} v) = \begin{cases} r_2(G) + 2, & \text{если } n \text{ и } j \text{ имеют одинаковую четность, а } i \text{ — другую четность;} \\ r_2(G) & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$r(G \oplus_{v_j} v) = \begin{cases} r(G) + 2, & \text{если } n \text{ и } j \text{ имеют одинаковую четность, а } i \text{ — другую четность;} \\ r(G) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8 из [2].

Мы завершаем этот пункт рассмотрением случая добавления вершины и ребра к дереву. Следующий алгоритм [4] сыграл важную роль в получении результатов для данного случая.

Определение. Вершину v ориентированного дерева называют *потомком* вершины u, если существует путь ненулевой длины из u в v, а если длина этого пути равна 1, то вершину v называют *сыном* вершины u.

Алгоритм. У заданного дерева T с n вершинами выберем вершину и назовем ее *корнем.*

1. Зададим $s = 0$ и обозначим все вершины степени 1, кроме корня, “нечетными”. Если $n = 1$, то обозначим корень “нечетным”.

2. Будем повторять следующие действия до тех пор, пока все вершины не будут обозначены. Пусть все сыновья вершины u помечены, а сама вершина u — нет, причем u имеет k нечетных сыновей. Тогда

(а) если $k = 0$, то обозначим u “нечетной”;

(б) если $k > 0$, то обозначим u “четной” и зададим $s = s + (k - 1)$.

3. Если корень обозначен “нечетным”, то $s = s + 1$, $r(T) = n - s$.

Теорема 8. *Пусть t — вершина дерева T и вершина t обозначается “нечетной” или “четной” по алгоритму, примененному к дереву T, у которого в качестве корня выбрана вершина t. Тогда*

$$r_2(T \oplus_t v) = r(T \oplus_t v) = \begin{cases} r(T), & \text{если } t \text{ обозначена “четной” по алгоритму;} \\ r(T) + 2, & \text{если } t \text{ обозначена “нечетной” по алгоритму.} \end{cases}$$

6. Добавление одной вершины и всех ребер в граф $G \oplus_{\mathbf{1}} v = G \,\square\, K_1$. Рассмотрим случай добавления одной вершины v в граф G и соединения этой вершины со всеми другими вершинами графа. Это называется *декартовым произведением* G с K_1 и обычно обозначается $G \,\square\, K_1$.

Теорема 9. *Если G — регулярный граф степени d, то $r_2(G \,\square\, K_1) = r_2(G)$ при нечетном d и $r(G \,\square\, K_1) = r(G) + 1$ при любом d.*

Доказательство. Над $\mathbb{Z}_2$ имеем

$$A(G \,\square\, K_1) = \begin{pmatrix} A(G) & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{1} = A(G)\mathbf{1}$. Следовательно, утверждение теоремы получается из теоремы 4. □ □

Следующие два утверждения показывают, что при четном d в случае $\mathbb{Z}_2$ могут быть две возможности.

Утверждение 5. *Имеем*

$$r_2(K_n \,\square\, K_1) = r_2(K_{n+1}) \quad \text{и} \quad r(K_n \,\square\, K_1) = r(K_{n+1}).$$

Утверждение 6. *При $n \geqslant 3$ имеем*

$$r_2(C_n \,\square\, K_1) = \begin{cases} r_2(C_n), & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod 4; \\ r_2(C_n) + 2, & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod 4, \end{cases} \quad \text{и} \quad r(C_n \,\square\, K_1) = r(C_n) + 1.$$

Доказательство. Докажем утверждение над $\mathbb{Z}_2$. Если $n \equiv 0 \pmod 4$, то $\mathbf{1} \in \mathrm{rs}(A(G))$, так как вектор $\mathbf{1}$ равен сумме столбцов матрицы $A(G)$ с номерами, сравнимыми с 1 и 2 по модулю 4.

Если $n \not\equiv 0 \pmod 2$, то очевидно $\mathbf{1} \notin \mathrm{rs}(A(G))$, так как каждый столбец матрицы $A(G)$ дает две единицы, а нам нужен столбец из нечетного числа единиц.

Если $n \equiv 2 \pmod 4$, то $\mathbf{1} \notin \mathrm{rs}(A(G))$, так как в противном случае вектор $\mathbf{1}$ равен сумме $n/2$ числа столбцов матрицы $A(G)$, в которых между двумя единицами стоит нуль, что невозможно для нечетного числа столбцов. □

Замечание. Граф $C_n \,\square\, K_1$ также известен как *колесо* W_n.

Теорема 10. *Если G — корона d-регулярного графа H на n вершинах с K_1, то*

$$r_2(G \,\square\, K_1) = r_2(G) = 2n, \quad r(G \,\square\, K_1) = \begin{cases} 2n + 1, & \text{если} \quad d \neq 2; \\ 2n, & \text{если} \quad d = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Над $\mathbb{Z}_2$ имеем

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & A(H) \end{pmatrix}, \quad A(G)\mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} (1-d)\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{1}.$$

Далее доказательство следует из теоремы 4. □

Следствие 4. *Если* $G = C_n \circ K_1$, *то* $r(G) = r(G \,\Box\, K_1) = r_2(G \,\Box\, K_1) = r_2(G) = 2n$.

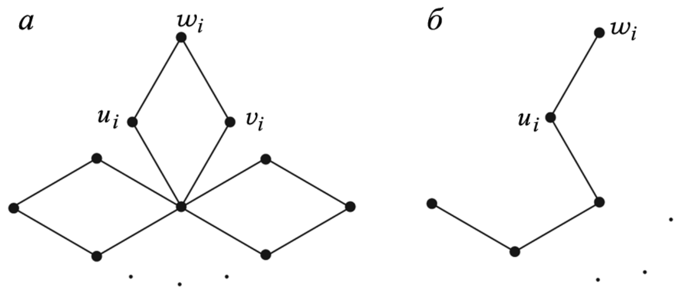
Теорема 11. *При* $n \geqslant 2$ *имеем*

$$r_2(P_n \,\Box\, K_1) = r_2(P_n) + \begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 1 \pmod 4; \\ 0, & \textit{если } n \not\equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

$$r(P_n \,\Box\, K_1) = \begin{cases} n, & \textit{если } n \equiv 3 \pmod 4; \\ n+1, & \textit{если } n \not\equiv 3 \pmod 4, \end{cases} = r(P_n) + \begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 1 \pmod 4; \\ 1, & \textit{если } n \not\equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим систему $A(P_n)\mathbf{y} = \mathbf{1}$ над $\mathbb{Z}_2$. Если $n \equiv 1 \pmod 4$, то система даст $y_{n-1} = 0$ и $y_{n-1} = 1$. Следовательно, система не имеет решения и $\mathbf{x} = \mathbf{1} \notin \operatorname{rs}(A(P_n))$. Если $n \not\equiv 1 \pmod 4$, то система имеет следующее решение: $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = \big(a\,1\,1 - a\,0\,a\,1\,1 - a\,0\ldots\big)$ с a, равным 0 при $n \equiv 0 \pmod 4$, 1 при $n \equiv 2 \pmod 4$ и 0 или 1 при $n \equiv 3 \pmod 4$. Далее применяем теорему 4 и получаем результат. □

Завершаем этот пункт рассмотрением результатов для конкретного графа.



Графы: *а* — граф G, *б* — дерево T

Лемма 2. *Если граф* G *такой, как показано на рисунке,* а, *где* $k \geqslant 2$ *— количество* 4*-циклов, то* $r_2(G) = r(G) = 2k$.

Доказательство. Граф G имеет $4k$ ребер, и в i-м 4-цикле $N(v_i) = N(u_i)$. Следовательно, по теореме 1 имеем $r_2(G) = r_2(G - v_i)$, и мы можем рассматривать граф без "повторяющихся" вершин (см. рисунок, *б*). Имеем $T = G - \{v_1, \ldots, v_k\}$ — дерево и $r_2(G) = r_2(T) = 2\beta_1 = 2k$.

Теорема 12. *Если граф* G *такой же, как в лемме* 2, *то* $r_2(G \,\Box\, K_1) = r(G \,\Box\, K_1) = 2k + 2$.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из теоремы 9 работы [2] и теоремы 3 настоящей работы. □

Авторы приносят благодарность академику РАН А. Т. Фоменко и доценту И. М. Никонову за постоянное внимание к работе.

Работа Д. П. Ильютко выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда, проект № 21–11–00355.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мантуров В.О.* Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности // Докл. РАН. 2009. **424**, № 3. 308–310.
2. *Bevis J.H., Blount K.K., Davis G.J, Domke G.S., Miller V.A.* The rank of a graph after vertex addition // Linear Algebra and its Appl. 1997. **265**, N 1–3. 55–69.
3. *Cvetkovik D., Doob M., Sachs H.* Spectra of Graphs: Theory and Applications. N.Y.: Academic, 1980.
4. *Bevis J.H., Domke G.S., Miller V.A.* Ranks of trees and grid graphs // J. Combin. Math. and Combin. Comput. 1995. **18**. 109–119.

Поступила в редакцию
12.05.2021