УДК ????

А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина

Эволюционные силовые биллиарды.

Введен новый класс интегрируемых биллиардов, названный эволюционными силовыми биллиардами. Они зависят от параметра и меняют свою топологию с ростом энергии (времени). Доказано, что они реализуют некоторые важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы сразу на всем симплектическом четырехмерном фазовом многообразии, а не только на отдельных изоэнергетических 3-поверхностях. Таковы, например, случай Эйлера и случай Лагранжа. Доказано также, что эти две известные системы "биллиардно эквивалентны", несмотря на то, что первая из них квадратично интегрируема, а вторая допускает линейный интеграл.

Ключевые слова: интегрируемая система, биллиардная книжка, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга, эволюционные силовые биллиарды.

§ 1. Введение. Силовой (эволюционный) биллиард. Наглядное описание.

В серии работ [1, 2, 3] В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко с помощью интегрируемых биллиардов (топологических и т.н. книжек) удалось реализовать (в смысле лиувиллевой эквивалентности) многие известные интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Однако каждый раз эта реализация достигалась "по отдельности" на какой-то одной изоэнергетической 3-поверхности. Дело в том, что у топологических биллиардов, а также биллиардных книжек, введенных В.В. Ведюшкиной, энергия биллиардного шара (материальной точки) является всего лишь масштабным параметром. Это означает, что его изменение не меняет топологию изоэнергетической 3-поверхности. В то же время, большинство интегрируемых систем геометрии и физики "живут", будучи параметризованы значением энергии (гамильтониана), одновременно на нескольких изоэнергетических 3-поверхностях, отвечающих разным уровням энергии. Дело в том, что системы с двумя степенями свободы "живут" на четырехмерных симплектических фазовых многообразиях M^4. Эти 4-многообразия расслоены на поверхности постоянной энергии. Для почти всех значений энергии изоэнергетические поверхности регулярны и трехмерны. При особых значениях энергии они, вообще говоря, уже не являются 3-многообразиями, т.е. являются особыми слоями слоения M^4 на уровни постоянной энергии. При этом изменение энергии обычно меняет топологию изоэнергетических 3-поверхностей. То есть интегрируемая система эволюционирует, перестраивается с ростом энергии. Значение энергии является важным параметром, от которого зависят многие свойства системы и ее поведение.

Неоднократно возникал естественный вопрос: можно ли обнаружить новый класс биллиардов, которые реализуют гамильтонову систему “не по частям”, а сразу на всем четырехмерном фазовом многообразии M^4? Иными словами, мы хотим реализовать данную гамильтонову систему в её эволюции, как бы “в развертке во времени”, где роль времени играет энергия системы. То есть так, чтобы изменяющийся биллиард реализовывал систему “целиком”, сразу на всем M^4. Тем самым показывая изменения, возникающие в системе с ростом ее энергии. Оказывается, такой класс биллиардов существует.

А.Т.Фоменко ввел новый класс биллиардов, назвав его “эволюционные биллиарды”. Можно также использовать термин “силовые”. Термин “эволюционный” указывает, что “биллиардный стол” зависит от вещественного параметра, условно называемого энергией. Мы считаем эти термины эквивалентными и будем иногда пользоваться то одним, то другим. С ростом энергии биллиард меняет свою топологию и законы отражения-преломления на своих границах и “ребрах”. Термин “силовые” указывает на силу, с которой биллиардный шар (материальная точка) ударяется о стенку (границу) биллиардного стола. Насколько нам известно, в ранее изучавшихся математических моделях биллиардов эта сила не учитывалась. Точнее, при отсутствии внешних сил, считалось, что скорость биллиардного шара постоянна по модулю и, для простоты, полагалась равной единице. Это приводило к тому, что модуль скорости (первый интеграл системы) превращался в простой масштабный параметр, по существу не влияющий на поведение системы. В частности, его изменение никак не влияло на топологию решений, например, на геометрию бифуркаций интегральных траекторий. Конечно, ранее рассматривались биллиарды в поле каких-либо внешних сил: с гуковским потенциалом, в магнитном поле и т.п. См., например, [4, 5]. Но мы имеем в виду другое — не внешние силы, а как бы “внутреннюю энергию биллиарда”.

Будем считать, что сила удара шара о границу биллиардного 2-стола определяется скоростью шара. Предлагаемая идея силового биллиарда состоит в том, что с изменением скорости шара (силы удара) будет меняться как геометрия самого биллиардного стола, так и закон отражения-преломления шара. Можно считать, что 2-стол не обязательно плоский или локально плоский (в смысле евклидовой метрики). В наших работах уже рассматривались биллиардные “столы”, являющиеся двумерными (или многомерными) римановыми многообразиями, по которым точка движется по геодезическим траекториям, отражаясь от границ-“стенок”. Но пока для простоты будем говорить о локально плоских биллиардах.

Идея эволюционного биллиарда состоит в том, чтобы рассмотреть биллиарды, зависящие от параметра (энергии, времени) и меняющиеся, перестраивающиеся, по некоторым естественным правилам. Понятие “естественности” можно формализовать по-разному. Важным аргументом в пользу вводимой ниже “естественности” является тот факт, что на этой основе авторам удается обнаружить ранее неизвестные связи между различными интегрируемыми системами. Подробности см. далее. Основные результаты настоящей работы следующие.

Первый результат. Оказывается, эволюционные (силовые) интегрируемые биллиарды реализуют (в смысле лиувиллевой эквивалентности) некоторые важные и хорошо известные в приложениях гамильтоновы системы "целиком", то есть сразу на всем фазовом симплектическом многообразии M^4 (за исключением, быть может, сингулярных слоев). Иными словами, сразу на всех регулярных изоэнергетических 3-поверхностях. То есть с ростом энергии h материальной точки биллиардный стол довольно просто и наглядно меняет свою топологию, причем (тоже наглядно) меняются законы отражения-преломления на ребрах биллиарда (на его "изломах"). При этом, шаг за шагом, меняются (тоже достаточно просто) трехмерные уровни постоянной энергии эволюционирующего биллиарда. В результате интегрируемая и эволюционирующая биллиардная система, "живущая" на этих последовательно меняющихся уровнях энергии, шаг за шагом реализует интересующую нас гамильтонову систему из геометрии, топологии, математической физики на всех ее уровнях энергии. В качестве ярких примеров мы "целиком" реализовали системы Эйлера, Лагранжа, а также на подходящем интервале значений энергии реализована система Горячева-Чаплыгина-Сретенского, хорошо известная в динамике тяжелого твердого тела (пока это не полная реализация).

Второй результат. Оказывается, при биллиардной реализации в случае Эйлера обнаруживаются, в качестве скрытых параметров, "софокусные квадрики", а в случае Лагранжа — "скрытые концентрические окружности". В итоге, естественная и простая деформация софокусных квадрик в окружности (при слиянии фокусов), оказывается, и "превращает" полный набор слоений Лиувилля случая Эйлера в полный набор слоений Лиувилля для Лагранжа. Напомним, что случай Эйлера интегрируем при помощи квадратичного интеграла, а случай Лагранжа — при помощи линейного интеграла. Такое "превращение" квадратично интегрируемой системы в линейно интегрируемую — интересный факт. Мы будем говорить, что в указанном смысле система Эйлера и система Лагранжа "биллиардно эквивалентны".

§ 2. Определения и постановка задачи. Основные свойства эволюционных биллиардов.

2.1. Носитель эволюционного биллиарда.

Определение 1. В качестве *носителя* (то есть модельного пространства) X для эволюционного силового биллиарда $X(h)$ рассмотрим конечный двумерный комплекс X, содержащий вершины, ребра и двумерные замкнутые *области-листы* L_i, гомеоморфные замкнутым односвязным областям евклидовой плоскости, то есть двумерным дискам. Каждое ребро считаем гомеоморфным замкнутому отрезку, то есть его граница — это две вершины. Граница каждого замкнутого листа L_i состоит из конечного числа ребер. Далее, на каждом таком листе носителя биллиарда зададим локально плоскую евклидову метрику. Потребуем, чтобы углы между ребрами равнялись $\frac{\pi}{2}$. Если два листа имеют общее граничное ребро, вдоль которого они склеены, то считаем, что эта склейка является изометрией. То есть граничное ребро одного листа изометрично склеивается с граничным ребром соседнего листа. Таким образом, комплекс X получается склейкой локально плоских биллиардных листов по некоторым граничным *ребрам-корешкам.* Назовем получившийся 2-комплекс X — *носителем эволюционного биллиарда.*

Замечание 1. Можно было бы пока не предполагать биллиардную систему интегрируемой в каком-либо смысле. Конечно, интегрируемые биллиарды будут представлять для нас главный интерес. Однако многие вопросы интересны и для неинтегрируемых биллиардов.

Замечание 2. В теории плоских интегрируемых биллиардов встречаются плоские неодносвязные биллиарды-листы (например ограниченные двумя софокусными эллипсами), а также биллиарды, границы которых являются окружностями без изломов (биллиард в эллипсе). Однако такие биллиарды легко разбиваются на гомеоморфные дискам биллиарды, граница которых состоит из отрезков, стыкующихся под прямыми углами. В дальнейшем мы будем рассматривать в том числе биллиарды, листы которых могут быть неодносвязными (но легко разбиваются на диски так, чтобы динамика осталась неизменной). В частности, в работе нам потребуются биллиарды, ограниченные концентрическими окружностями.

Замечание 3. Как мы уже сказали, вместо локально плоской метрики на листах носителя эволюционного биллиарда можно задавать риманову метрику. Такой пример мы приведем ниже. В этом направлении возникает много интересных вопросов.

Обозначим через H модуль вектора скорости материальной частицы (ее энергию) и пусть $h > 0$ — какое-то конкретное его значение.

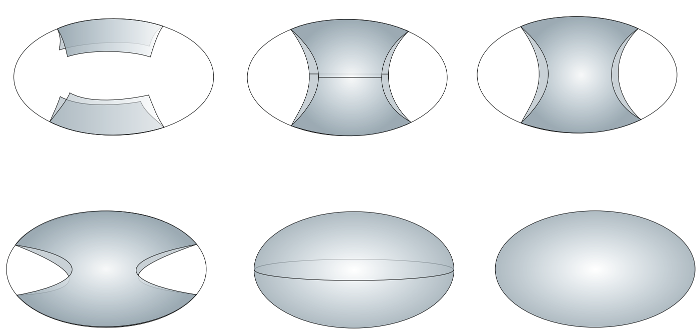

Рис. 1. Пример: локально плоский носитель силового биллиарда моделирующего случай Эйлера гомеоморфен двумерному эллипсоиду, а состояния $X(h)$ гомеоморфны гладко деформирующимся областям на эллипсоиде.

2.2. Эволюционный (силовой) биллиард как динамическая система на меняющемся биллиардном столе.

Определение 2. **Носитель эволюционного биллиарда и меняющиеся состояния биллиарда.**

1. Назовем носителем эволюционного биллиарда связный двумерный локально плоский клеточный комплекс ("стол"), описанный в определении 1. Например, важным классом, интересным для приложений, будут биллиардные книжки (см. [6, 7]). Напомним, что такие биллиарды задают интегрируемые системы с двумя степенями свободы.
2. Для каждого значения h рассмотрим в связном носителе замкнутый клеточный подкомплекс $X(h)$, не обязательно связный. Будем считать, что энергия h изменяется от 0 до бесконечности. Назовем $X(h)$ — *состоянием эволюционного (силового) биллиарда*, отвечающим значению h. При изменении параметра h состояние $X(h)$ будет, вообще говоря, меняться. Будем считать, что комплекс X является объединением всех состояний эволюционного биллиарда. То есть, все состояния "живут" внутри объемлющего комплекса-носителя X, как-то непрерывно меняются с ростом h и их объединение исчерпывает весь носитель X, и, более того, при увеличении h состояние $X(h)$ увеличивается. Т.е. если $h_1 < h_2$, то $X(h_2)$ содержит или совпадает с $X(h_1)$. Другими словами, с ростом h состояние $X(h)$ "поглощает" все предыдущие состояния. Это условие естественно, поскольку параметр h имеет смысл энергии. При увеличении энергии шара область биллиарда увеличивается, т.е. шар проникает в большую область в комплексе-носителе. При этом некоторые стенки, ранее бывшие *непроницаемыми* для шара, теперь становятся *проницаемыми*, или же гладко деформируются (отодвигаются) под воздействием ударов шара, так что область состояния $X(h)$ разрастается монотонно. Подчеркнём, что тем самым мы исключаем теоретическую возможность обратимости данной операции.

   На интервале изменения h выделим конечное число значений $h = 1, h = 2, ..., h = N$, которые назовем *особыми (сингулярными)*, остальные значения назовем *регулярными.*
3. *Ребрами-корешками* состояний $X(h)$ являются дуги софокусных квадрик или отрезки фокусных прямых. В составе границ состояний $X(h)$ могут быть также окружности, которые при критических значениях энергии могут вырождаться в точки.
4. *Эволюционным (силовым) биллиардом на носителе* X назовем динамическую систему, задаваемую движением материальной точки (биллиардного шара) по отрезкам геодезических внутри листов L_i с постоянным модулем скорости, равным h и со своим законом отражения-преломления $Z(h)$ на границе каждого листа биллиарда, то есть либо на ребре-корешке, либо на граничной окружности.

Замечание 4. Иногда удобно рассматривать носитель и состояния $X(h)$ с точностью до гомеоморфизма, то есть временно игнорируя наличие локально плоской метрики на листах биллиарда. Это позволяет более наглядно представлять (например, изображать на двумерных моделях в трехмерном евклидовом пространстве) топологические свойства носителя и состояний биллиарда. Конкретный пример показан на рис.1. Оказывается, он возникает при анализе случая Эйлера в динамике твердого тела. Здесь локально плоский носитель гомеоморфен двумерному эллипсоиду, а состояния $X(h)$ гомеоморфны гладко деформирующимся областям на эллипсоиде.

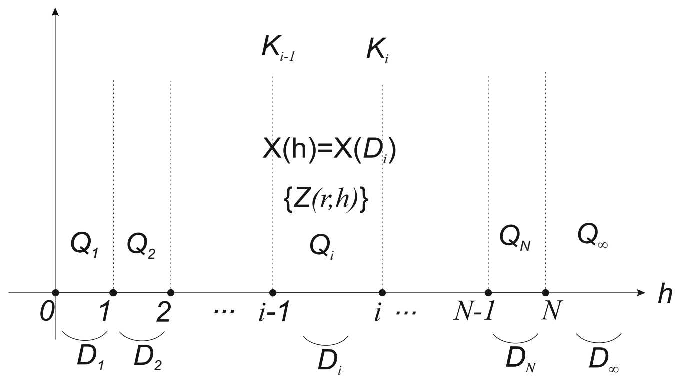

Рис. 2. Законы отражения–преломления, особые и неособые изоэнергетические поверхности.

Напомним неформальное определение *биллиардной книжки.* Пусть дан комплекс X, состоящий из двумерных клеток–листов. Напомним, что мы потребовали, чтобы каждая клетка являлась областью на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой, такой что все углы равнялись $\frac{\pi}{2}$. Эти клетки склеены друг с другом вдоль одномерных ребер-корешков. Занумеруем листы книжки. Каждому одномерному ребру сопоставим циклическую перестановку из группы $S(k)$, где k это число листов книжки, сходящихся в данном ребре. При этом перестановка записана так, чтобы сохранить единую нумерацию биллиардных листов. Спроектируем X на плоскость. Рассмотрим множество границ всех биллиардов-листов. Пусть на плоскости две границы образовали угол. Потребуем чтобы в их прообразе соответствующие им перестановки коммутировали. Здесь под перестановкой в прообразе гладкой граничной дуги понимается перестановка, состоящая из объединения циклических перестановок всех корешков, проецирующихся на данную дугу.

Тогда движение на полученном комплексе определяется так. Материальная точка двигаясь по листу i после удара о границу переходит на лист с номером $\sigma(i)$, где σ – перестановка, приписанная данной границе. Условие коммутирования обеспечивает корректность отражения при попадании в угол. В этом случае номер листа определяется по композиции перестановок, приписанных данному углу.

Законы отражения-преломления, проницаемые и непроницаемые ребра.

1. *Закон отражения-преломления* зависит, вообще говоря, от параметра h и от ребра склейки r на границе биллиардного листа в состоянии $X(h)$. Поэтому будем записывать его как $Z(h,r)$. Это означает задание некоторой циклической перестановки из группы перестановок $S(n)$, где n – число листов, сходящихся на ребре r. Тогда $Z(h) = \{Z(h,r)\}$ – набор законов

отражения-преломления в состоянии $X(h)$. Будем считать, что $Z(h)$ является кусочно-постоянной функцией от h. Пусть, для простоты, функция $Z(h)$ имеет лишь конечное число точек разрыва-скачков на интервале от 0 до бесконечности, см. рис.2. Если параметр h меняется внутри интервала регулярности функции $Z(h)$, то законы отражения-преломления на всех ребрах состояния $X(h)$ остаются неизменными. Закон $Z(h)$ на каком-то ребре может измениться только когда параметр h проходит через критическое значение (это — точка скачка).

2. Может случиться, что для некоторого критического h какое-то ребро r в комплексе-носителе становится *"проницаемым" ("прозрачная стенка биллиарда"),* то есть с ростом энергии биллиардный шар теперь проходит через него, а не отражается внутрь того же листа, с которого он пришел на ребро r.
3. Будем считать, что в интегрируемом биллиарде ребра-корешки комплекса-состояни $X(h)$ при изменении h могут гладко меняться в классе софокусных квадрик. Такая операция может быть интерпретирована как *раздвигание стенок биллиарда.* При критических значениях параметра h они могут сливаться (склеиваться) с другими ребрами, вырождаться, превращаться в отрезки фокусных прямых. То есть ребра-корешки и свободные границы (непроницаемые ребра) в $X(h)$ являются гладкими функциями от h.
4. Поясним предыдущий пункт. Пусть регулярное значение h меняется в интервале D_i между двумя соседними критическими значениями, см. рис. 2, то есть топология состояния $X(h)$ пока не меняется. Будем считать, что границы склеиваемых листов *гладко меняются в классе софокусных квадрик.* Это условие естественно, так как в теории интегрируемых биллиардов это задает эквивалентные биллиарды [8]. Напомним, что деформация биллиарда в его классе эквивалентности не меняет топологию слоения Лиувилля его изоэнергетической 3-поверхности (см. [9]). Другими словами, *происходит переход к лиувиллево эквивалентной динамической системе.* При этом здесь (в регулярном случае) предполагается, что граничные дуги листов не ложатся на фокальную прямую.

Опишем подробнее эволюцию комплексов-состояний $X(h)$ внутри неизменного носителя X.

Перестройки состояний биллиарда: склейки корешков.

1. *Операция склейки листов биллиарда при критическом значении h.* При этой операции происходит склейка листов вдоль границ, которые являются одной и той же дугой одной и той же квадрики. В частности, мы можем склеивать не только корешки, но и свободные границы. Поскольку *несколько корешков склеились теперь в один корешок,* то на нем появляется новый цикл-перестановка.
2. *В момент скачка мы разрешаем биллиардам, ограниченным софокусными квадриками, менять свой класс эквивалентности.* А именно, пусть сегмент границы какого-то листа при критическом значении h лег на фокальную прямую. В этом случае до задания новых перестановок (см.

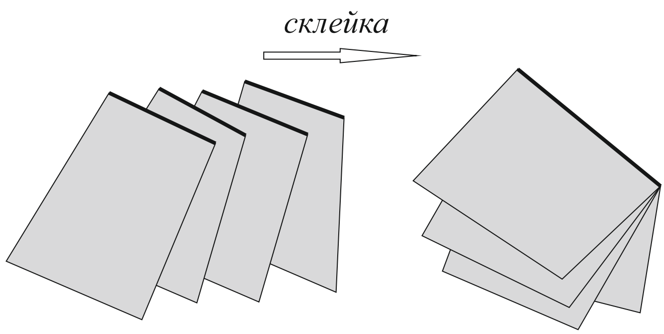

Рис. 3. Склейки исходного биллиардного стола.

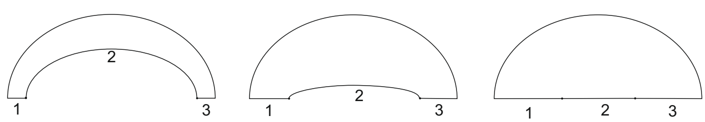

Рис. 4. Объединение сегментов 1,2, 3 при скачке. В результате эволюции биллиарда сегменты 1 и 3 перешли в отрезки фокальной прямой с концами в фокусах, а сегмент 2 превратился в отрезок между фокусами.

операции выше) необходимо объединить сегменты каждого плоского листа, если между ними образовался развернутый угол (180 градусов) или же сегмент "сложился пополам" (см. пример на рис. 1). Для этого необходимо сделать разрез на листе, но не раздвигать берега разреза, а объявить разрез новым ребром (сохраняя на нём перестановку и закон движения).

Такая техническая тонкость возникает в связи с тем, что у правил склейки биллиардов есть ряд ограничений. В частности, склейка всегда происходит по сегментам границы (сегмент – это либо окружность, либо дуга квадрики от одного прямого угла до другого). Но так как мы разрешаем биллиардам в момент скачка менять свой тип, то скачком угол в 90 градусов может стать равным 180. В этот момент дуга квадрики перестаёт быть сегментом и её необходимо объединить с какими-то другими дугами, которые мы и добавляем (см. подробнее рис. 4).

3. *Операция объединения корешков в граничных точках.* Разрешается склеивать в граничных точках корешки одного состояния $X(h)$ в том случае, когда (при скачке) они легли на одну граничную гладкую дугу, то есть когда угол между ними стал развернутым (180 градусов). Приведем

пример. Рассмотрим биллиард, ограниченный двумя эллипсами и двумя отрезками фокальной прямой. Пусть меньший эллипс при скачке лег на фокальную прямую. Тогда разрешается объединить этот меньший выродившийся эллипс, а именно, – отрезок между фокусами – с отрезками фокальной прямой в единый сегмент, см. рис. 4.

4. Все такие последовательные преобразования $\{Z(h,r)\}$, склейки корешков назовем *скачками или перестройками состояния* $X(h)$ *при критических значениях* h. Следовательно, стартуя с начального состояния, мы наблюдаем деформации-скачки подкомплексов $X(h)$ внутри неизменного (“неподвижного”) носителя эволюционного биллиарда.

Итог: определение эволюционного интегрируемого биллиарда.

Определение 3 (А.Т.Фоменко).

а) Описанный выше комплекс X назовем *носителем эволюционного биллиарда.* Мы считаем его неизменным, “неподвижным”.

б) Семейство разрастающихся подкомплексов $X(h)$, “живущих внутри” носителя X, назовем *состояниями эволюционного биллиарда,* зависящими от h. Отметим, что носитель X совпадает с последним (“максимальным”) состоянием X_N. Подчеркнём, что носитель X рассматривается как топологический комплекс, на ребрах которого никакие перестановки не указаны.

в) *Непроницаемые* ребра состояний $X(h)$ могут становиться *проницаемыми,* но не наоборот. Ребра могут склеиваться. Граничные окружности могут стягиваться в точки.

г) Интегрируемую систему с двумя степенями свободы, задаваемую динамикой биллиардного шара на меняющихся состояниях $X(h)$ назовем *эволюционным биллиардом (эволюционной биллиардной системой).*

Замечание 5. Поиск связного эволюционного биллиарда, который естественным образом (в указанном смысле) реализует конкретную гамильтонову интегрируемую систему может быть непростым. Казалось бы, можно поступить тривиальным способом. Рассмотрим последовательные изоэнергетические 3-многообразия Q_1, Q_2, ... несущие на себе данную интегрируемую систему на соответствующих последовательных уровнях энергии h_1, h_2, ... Предположим, что соответствующие слоения Лиувилля на Q_i реализуются биллиардами A_i. Чтобы сделать эволюционный биллиард, надо чтобы состояние X_i было бы биллиардом A_i. Но если A_i не включает в себя A_{i-1} то этого по нашим правилам сделать невозможно. Иначе говоря их “вульгарная” склейка сразу приведёт к тому, что появится новое состояние X, отличное от состояний X_i и $X_{i-1.}$ В этом состоянии биллиардный шар в некоторый момент начнет перемещаться с одного биллиарда на соседний, с ним склеенный, то есть система начнет “перемешиваться”. Но в таком случае меняется топология изоэнергетических 3-многообразий и слоений Лиувилля на них. Следовательно, изначальная интегрируемая система заменяется на какую-то другую. То есть такая попытка реализовать биллиардами исходную систему сразу на всех ее изоэнергетических многообразиях кончается неудачей.

2.3. Фазовые 4-комплексы эволюционного биллиардного стола, отвечающие регулярным зонам энергии. Пусть h - регулярное значение энергии из какого-то интервале D_i. Соответствующий комплекс-состояние обозначим через $X(D_i)$.

Определение 4. Точкой *фазового комплекса* $TX(D_i)$ является пара: (x, v), где x — точка биллиардного стола $X(D_i)$, а v — вектор скорости материальной частицы в точке x. Когда точка x оказывается на границе листа L_i, соседствующего с листом L_k, то склейка соответствующих пар (x, v) и (x, w) происходит по закону отражения-преломления $Z(h, r)$, действующего на данном ребре склейки r.

Таким образом, эволюционный (силовой) биллиард с носителем X задается набором данных: $((D_i),\ \{Z(r,h), \text{склейки}\},\ N)$, где целое число N определяет разбиение вещественной полуоси значений $H = h$ от нуля до бесконечности, задаваемое числами $0, 1, 2, 3,\ \dots\ N$. Повторим, что функция $Z(r, h)$ постоянна на каждом открытом интервале $(i, i+1)$. Точки 1, 2, ..., задают скачки функции отражения-преломления, т.е. это — критические значения параметра h, см. рис.2. Общее число интервалов постоянства функции $Z(r, h)$ равно $N + 1$. Конечные интервалы регулярности этой функции обозначим через D_i, то есть $D_1,\ \dots\ , D_N$. Последний, уже бесконечный интервал регулярности, обозначим через D_∞.

Отметим, что ноль мы не считаем критическим значением, так как скорость v материальной точки всегда отлична от нуля.

2.4. Регулярные изоэнергетические 3-поверхности эволюционного (силового) биллиарда.

Определение 5. *Регулярной изоэнергетической 3-поверхностью* (комплексом) Q_h назовем подмножество в четырехмерном фазовом комплексе $TX(D_i)$, задаваемое уравнением: $H = h$, то есть — “уровень постоянной энергии”.

В случае интегрируемых биллиардных книжек 3-поверхности постоянной энергии, отвечающие регулярным значениям h, являются топологическими 3-многообрази (теорема Ведюшкиной-Харчевой см. [10]). Ниже мы обсудим сингулярные поверхности Q_h, т.е. отвечающие критическим значениям h. В общем случае, это уже не многообразие, а некоторый клеточный комплекс с особенностями.

Формально это определение совпадает с классическим понятием изоэнергетической поверхности для систем с двумя степенями свободы, не обязательно интегрируемых. В том числе и для двумерных топологических биллиардов и биллиардных книжек. Для силового биллиарда каждому интервалу D_i, D_∞ (где $i = 1,\ 2\ \dots,\ N$) отвечает, вообще говоря, своя изоэнергетическая поверхность Q_h. Следовательно, число таких поверхностей равно $N + 1$. Обозначим их через $Q_1, Q_2, \dots, Q_N, Q_\infty$ (см. рис. 2). Конечно, некоторые из них могут быть гомеоморфны.

Напомним, что для классических топологических биллиардов и биллиардных книжек изоэнергетическая 3-поверхность всегда одна.

В качестве важного примера биллиардных столов будем рассматривать столы интегрируемых топологических биллиардов и биллиардных книжек, с точностью до естественных эквивалентностей, см. статью В.В.Ведюшкиной [8].

Наглядный комментарий. Идея эволюционного (силового) биллиарда является новой, так как учитывает энергию материальной точки. Качественные изменения динамической системы при изменении энергии частицы изучаются, например, в физике, квантовой механике. При увеличении энергии электроны, вращающиеся вокруг ядра атома, "перескакивают" с одного энергетического уровня на другой. Тем самым, "накачка" энергии приводит к бифуркациям системы. Оказывается, нечто подобное обнаруживается и в математических биллиардах. Стенки биллиардных столов становятся "чувствительными" к силе удара материальной точки. Другими словами, в эволюционном биллиарде стенки реагируют (каждая по-своему) на энергию точки, ударяющейся о стенку. При критических значениях энергии стенки меняют свои свойства и движение материальной точки изменяется в соответствии с новым законом отражения-преломления.

2.5. Сингулярные изоэнергетические 3-поверхности эволюционного (силового) биллиарда. Теперь разберемся, как устроены "сингулярные" изоэнергетические 3-поверхности эволюционного биллиарда. Они условно изображены на рис. 2 как 3-поверхности $K_1,\ K_2,\ \ldots\ ,\ K_N$. Они соответствуют сингулярным значениям энергии $h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ N$.

Пусть $h = i$ – сингулярное значение энергии. Обозначим через $X(i-\varepsilon)$ – левый биллиардный стол, а через $X(i+\varepsilon)$ – правый биллиардный стол. Рассмотрим какое-нибудь ребро-корешок r на левом 2-столе $X(i-\varepsilon)$, на котором сейчас поменяется закон отражения, а также произойдут склейки. Сингулярный комплекс X_i устроен так. Возьмем комплекс $X(i-\varepsilon)$, и приклеим к корешку r те листы, которые должны быть подклеены к этому корешку после данного скачка, т.е. в комплексе $X(i+\varepsilon)$.

Рассмотрим два "соседних" регулярных 3-многообразия: Q_i (назовем его левым) и Q_{i+1} (назовем его правым), соответствующих столам $X(i-\varepsilon)$ и $X(i+\varepsilon)$. Определим "заключенную между ними" сингулярную 3-поверхность K_i, см. рис. 2. Оснастим каждую точку листа комплекса X_i вектором скорости длины $h = i$. Сначала отождествим по стандартному закону отражения вектора скорости на тех корешках, закон отражения на которых не меняется. Теперь рассмотрим корешок, на котором поменялся закон отражения. В каждой его точке мы отождествим все вектора скорости с одинаковым направлением в том случае, если они отождествлялись либо в Q_i либо в Q_{i+1}. Это приводит к тому, что конструируемая нами 3-поверхность K_i является компактной, однако в ней появляются особенности, отвечающие этим корешкам. Эта 3-поверхность уже, вообще говоря, не является 3-многообразием. Окрестность любой точки корешка, оснащенной вектором скорости, в 3-поверхности K_i уже не гомеоморфна трехмерному диску. По сути поверхность K_i получается из поверхности Q_i отождествлением пар (x, v) (точка-вектор) с теми парами (x, w), которые должны быть отождествлены в Q_{i+1}. В каждом случае неоднозначности это приведет к отождествлению трех пар точка-вектор (одна входящая на корешок и две исходящих), а не двух, как происходит на корешках в регулярном случае. Именно этот эффект и приводит к возникновению особенности.

Как устроена сингулярная 3-поверхность? Это – не топологическое многообразие, это клеточный комплекс. Он является стратифицированным 3-многообразием.

Его страты – гладкие многообразия. Согласно гипотезе А.Т.Фоменко, он является полу-алгебраическим многообразием.

Мы описали топологию сингулярной 3-поверхности K_i, “зажатой” между двумя «соседними» топологическими 3-многообразиями Q_i и Q_{i+1}. Отметим, что здесь имеется аналогия с гладкими гамильтоновыми интегрируемыми системами с двумя степенями свободы. Там сингулярные изоэнергетические 3-поверхности тоже «зажаты» между двумя “соседними” регулярными 3-поверхностями постоянной энергии. Для гладких систем сингулярность 3-поверхности означает, вообще говоря, что она уже не является гладким многообразием, на ней $grad(H)$ вырождается в некоторых точках. Причем характер вырождения может быть довольно разнообразен. Зависит от конкретного вида гамильтониана H.

В случае силового биллиарда картина похожа. Мы ее полностью описали. Таким образом в “дискретном случае” возможностей вырождения меньше, чем в гладком случае. Для силового биллиарда их “конечное число”, а для гладких систем – их “бесконечное число”.

2.6. Биллиардные потоки на сингулярных изоэнергетических 3-поверхностях эволюционного биллиарда. Распад-деление биллиардного шара на два шара на сингулярных биллиардных 2-столах. Теперь можно разобраться с тем – какой “двузначный поток” порождают на сингулярной 3-поверхности K_i “сближающиеся” биллиардные потоки на 3-многообразиях Q_i и Q_{i+1}, когда они “стремятся” (слева и справа по h) к зажатой между ними 3-поверхности K_i. Грубо говоря, каждый из этих потоков порождает поток на сингулярной 3-поверхности K_i. Эти предельные потоки различны. На корешках, на которых

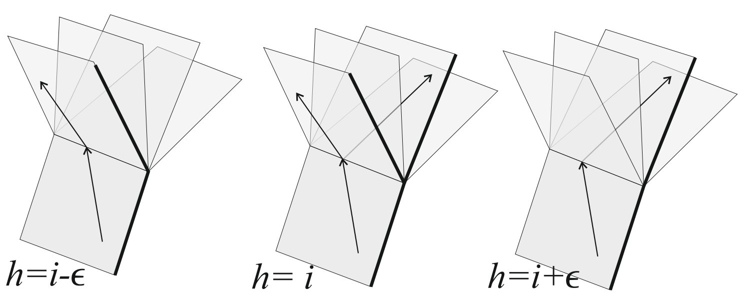

Рис. 5. В момент скачка $h = i$ не определено движение после отражения о корешок на котором меняется перестановка. В этот момент шар как-будто “делится пополам”.

закон отражения меняется после скачка, невозможно корректно определить траекторию шара после отражения/преломления (см. рис. 5). Отметим, что мы знаем, как ведет себя шар на левом $X(i-\varepsilon)$ и правом $X(i+\varepsilon)$ биллиардных столах. При достижении данного корешка шар до и после скачка переходит на разные листы (на правом и на левом столах). Неформально говоря, на сингулярном комплексе $X(i)$ после пересечения этого корешка траектория шара “раздваивается”. Т.е. шар идёт как бы по двум листам одновременно, см. рис.

5. Иными словами, можно считать, что шар, ударившись о такой корешок, "раскалывается" на два, и каждый из этих шаров "начинает жить собственной жизнью".

Итак, когда значение энергии h становится равным i, на сингулярном 2-столе возникает распад (деление) биллиардного шара на два шара. Каждый из них движется "по своему" листу. Иными словами, сближающиеся биллиардные потоки на трехмерных изоэнергетических поверхностях "садятся" в пределе на сингулярную 3-поверхность K_i, порождают на ней "ветвящийся поток". Ветвление индуцируется делением (распадом) шара на два в момент удара о корешок r. Отметим, что эта ситуация происходит только на тех корешках-склейках силового биллиарда, на которых меняется закон отражения при скачке. "Элементарная частица" при этом распадается на две. В этом отличие от гладкого случая (и в то же время аналогия). В гладком случае на сингулярной изоэнергетической 3-поверхности возникает гамильтонов поток с особенностями, диктуемыми особенностями 3-поверхности. Этот поток однозначен, в том смысле, что в каждой фазовой точке 3-поверхности "сидит" один вектор. А для эволюционных биллиардов поток на сингулярной 3-поверхности тоже особый, но тут он становится ветвящимся. Один набор его "ветвей" приходит "справа", а второй набор "ветвей" приходит "слева". Поэтому здесь в каждой сингулярной фазовой точке "сидят" два вектора.

§ 3. Интегрируемые биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

Зафиксируем *семейство софокусных квадрик* соотношением

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (b-\lambda)(a-\lambda).$$

Здесь a, b — фиксированные параметры семейства, которые в частности фиксируют расстояние между фокусами. Если $a > b > 0$, то данное соотношение описывает семейство софокусных эллипсов и гипербол, в которые включены фокальная прямая $y = 0$ и предельная гипербола $x = 0$. Под *элементарным биллиардом* понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик и не содержит углов $3\pi/2$. Отметим, что софокусные квадрики всегда пересекаются под прямым углом. Запрет углов $3\pi/2$ позволяет корректно определить биллиардное движение после попадания материальной точки в угол. А именно, после отражения точка продолжает движение в противоположном направлении по тому же отрезку, по которому попала в угол.

Пусть семейство софокусных квадрик состоит из эллипсов и гипербол. Имеет смысл расширить множество элементарных биллиардов, включив в него накрытия над областью, ограниченной двумя эллипсами, а также части этих накрытий. На множестве элементарных биллиардов можно ввести естественное отношение эквивалентности, которое сохраняет слоение Лиувилля. Нестрого говоря, *два биллиарда называются эквивалентными,* если один получается из другого изометрией плоскости или же изменением параметров границ так, чтобы изменяемые дуги границ во время деформации не меняли бы своего типа (подробнее см. [8]). Определение запрещает сегменту изменяемой границы менять свой тип, то есть сегменты во время деформации остаются либо эллиптическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(-\infty,\ b)$), либо гиперболическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(b,\ a]$), либо все время лежат на фокальной прямой (во все время деформации параметр остается равным b). При этом повторим, что мы предполагаем что все эллипсы и гиперболы принадлежат одному семейству софокусных квадрик с параметрами a и b.

§ 4. Случай Эйлера

Перейдем к конкретным примерам эволюционных биллиардов, реализующих важные интегрируемые системы геометрии, механики, математической физики. В качестве первого примера рассмотрим знаменитый случай Эйлера в динамике тяжелого твердого тела. Покажем, как можно реализовать эволюционным биллиардом случай Эйлера сразу на всем фазовом многообразии M^4, т.е. на всех регулярных изоэнергетических 3-поверхностях.

Эта система описывается на шестимерной алгебре Ли $e(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства. В естественных координатах

$$S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3$$

на дуальном пространстве $e(3)^*$ скобка Пуассона принимает вид

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = 0,$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, и $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$.

Гамильтонова система на $e(3)^*$ описывается так называемыми уравнениями Эйлера:

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\}$$

где H — гамильтониан.

Фиксируем симплектический лист, т.е. четырехмерную поверхность уровня двух интегралов данных уравнений: f_1 (геометрический интеграл) и f_2 (интеграл площадей)

$$M^4_{c,g} = \left\{ f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c, f_2 = S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3 = g \right\}.$$

Для почти всех значений c и g, совместная поверхность уровня функций является гладким подмногообразием в $\mathrm{e}(3)^*$, на котором скобка Пуассона невырождена, что приводит к тому, что на этом подмногообразии существует симплектическая структура. В дальнейшем полагаем, что c и g — регулярные значения.

Случай Эйлера (1750) описывает динамику тяжелого твердого тела, закрепленного в центре масс. Гамильтониан и дополнительный интеграл имеют вид:

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3}, \quad K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Будем считать, что $f_1 = 1$. Тогда различные 3-поверхности Q^3 задаются параметрами g и h. Рассмотрим бифуркационную диаграмму пары интегралов f_2 и H. В результате на плоскости $R^2(g,h)$ появятся кривые, разбивающие плоскость таким образом, что для всех точек (g,h) из одной области топологический тип соответствующих изоэнергетических поверхностей

$$Q^3 = \{f_1 = 1,\ f_2 = g,\ H = h\}$$

будет одним и тем же. Рассмотрим отображение

$$F = f_2 \times H : S^2 \times R^3 \to R^2(g,h),$$

заданное формулой $F(P) = (f_2(P), H(P)) \in R^2(g,h)$. Для случая Эйлера бифуркационная диаграмма (f_2, H) была вычислена А.В.Болсиновым и А.Т.Фоменко [16] (т. II) и приведена на рис. 6. Для каждой из получившихся камер ранее был найден интегрируемый биллиард, лиувиллево эквивалентный системе Эйлера (см. [2]). На рис. 6 приведены эти пять биллиардов, а также инварианты Фоменко-Цишанга, описывающих их слоения Лиувилля. При этом для каждой изоэнергетической поверхности был обнаружен свой биллиард. Как было сказано во введении, давно обсуждался вопрос, можно ли реализовать биллиардами гамильтонову систему сразу, целиком на M^4, одновременно на всех её регулярных изоэнергетических поверхностях. Оказалось, что эволюционные биллиарды позволяют это сделать.

Покажем как добиться этого для случая Эйлера.

4.1. Построение эволюционного биллиарда. Фиксируем на бифуркационной диаграмме прямую $g = const \neq 0$ (см. рис.7). Этой прямой будет соответствовать симплектический лист M^4_g, состоящий из трех кусков, каждый из которых соответствует своему типу изоэнергетической поверхности. Обозначим через h_0, h_1 и h_2 критические значения H, при которых меняется тип изоэнергетической поверхности. При $H \in (h_0, h_1)$ изоэнергетические поверхности гомеоморфны несвязному объединению двух сфер S^3, при $H \in (h_1, h_2)$ изоэнергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению $S^1 \times S^2$, при $H \in (h_2, \infty)$ изоэнергетическая поверхность гомеоморфна проективному пространству RP^3.

Замечание 6. На всех последующих рисунках эволюционных биллиардов стрелками на листах биллиарда изображены траектории биллиардного шара.

Построим эволюционный биллиард, соответствующий данному симплектическому листу M^4_g. Оказывается, три из четырех биллиардов, показанных на рисунке 6 являются тремя состояниями эволюционного биллиарда. Начальным (стартовым) биллиардом является несвязный биллиард, не имеющий общий точек с фокальной прямой. Он гомеоморфен двум дискам. При эволюции биллиарда он превратится в кольцо. На рис. 6 изображены два кольца, любое из них нам подходит. Наконец, на заключительном этапе эволюции кольцо превращается в сферу (эллипсоид). Получившийся силовой биллиард показан на рис.1. Сейчас мы опишем этот процесс подробнее с указанием траекторий биллиардного шара, склейкой и распадом корешков. Эта более подробная эволюция начального биллиарда показана на рис. 7 (при движении снизу вверх).

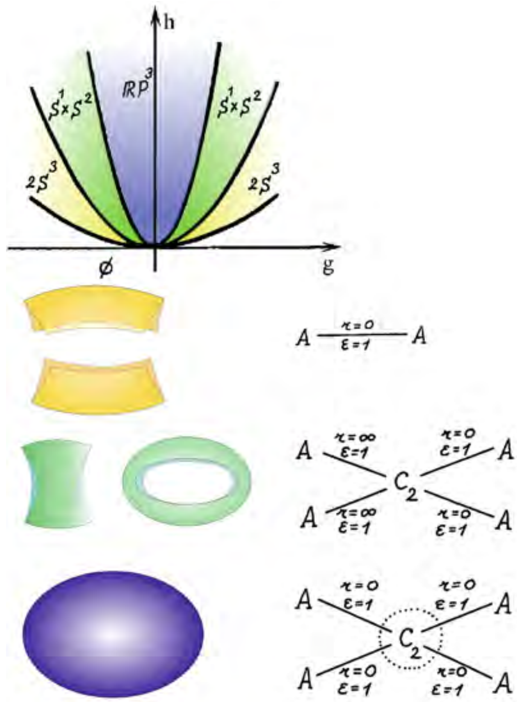

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма (f_2, H) для случая Эйлера и биллиарды, реализующие систему для разных уровней энергии.

Рассмотрим два склеенных по границе диска, ограниченных одним и тем же эллипсом. Получим поверхность E, гомеоморфную эллипсоиду. Фиксируем гиперболу m с параметром $\lambda_m > b$ и эллипс e с параметром $\lambda_e < b$. Рассмотрим области на поверхности E высекаемые фиксированными выше эллипсом e и гиперболой m. Выберем из этих областей две области, не имеющих общих точек с фокальной прямой (см. рис. 7). Каждая из них гомеоморфна диску. Начальный комплекс X при $H \in (h_0, h_1)$ эволюционного биллиарда состоит из этой пары областей.

При увеличении параметра H будем менять границы биллиарда, оставаясь в классе софокусных квадрик. Устремим параметр λ_e граничного эллипса e к b, так чтобы при $H = h_1$ параметр λ_e принял значение b. В этот момент происходит перестройка состояния биллиарда. При этом мы склеим горизонтальные границы двух биллиардных столов в кольцо (см. рис. 7). Это кольцо является подмножеством поверхности E, высекаемым из неё двумя ветвями гиперболы m с параметром λ_m.

При $H \in (h_1, h_2)$ будем уменьшать параметр λ_m гиперболы m до значения b. При $H = h_2$ получим следующий скачок. При этом в комплексе эволюционного биллиарда граничные гиперболы легли на фокальную прямую. Углы между их дугами и отрезками фокальной прямой (вдоль которых была склейка на предыдущем скачке) стали развернутыми. Поэтому при скачке, во-первых, мы

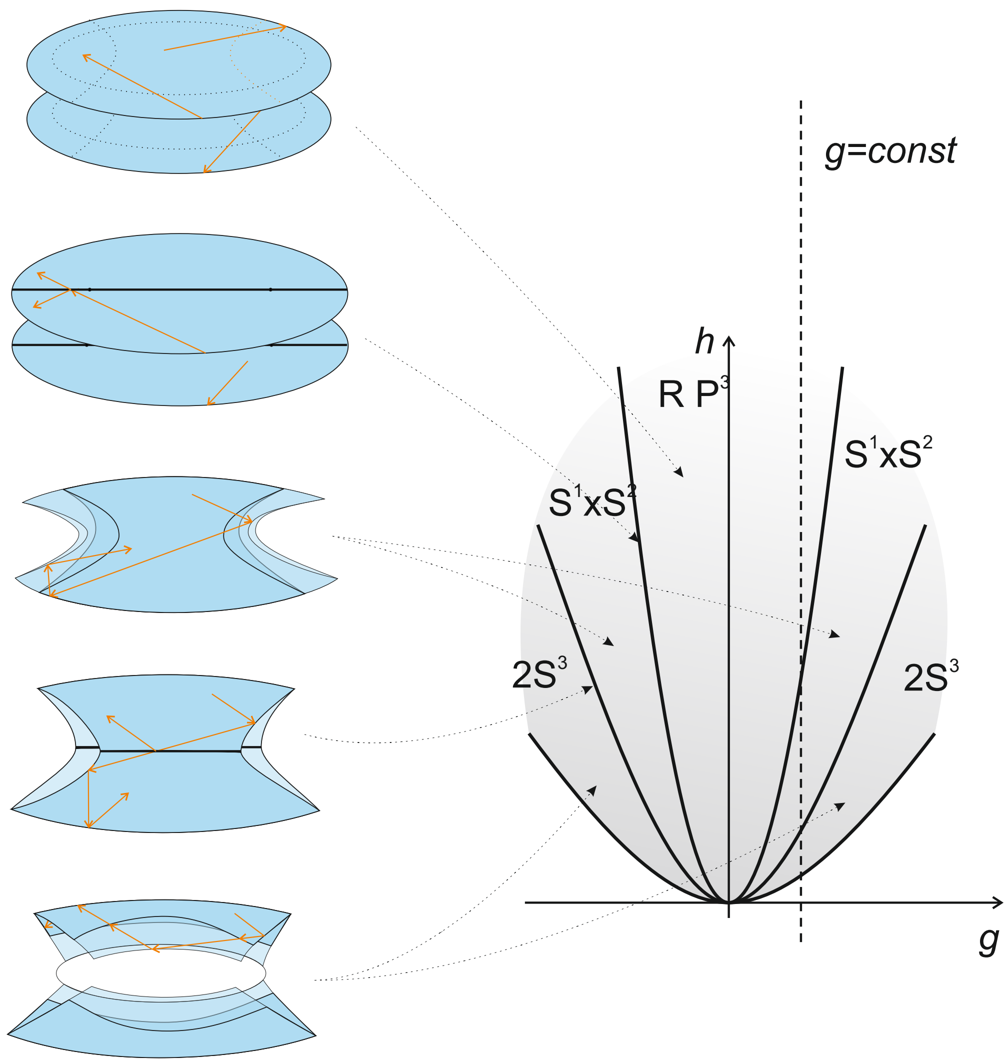

Рис. 7. Эволюционный биллиард, соответствующий данному симплектическому листу M_g^4 для случая Эйлера.

разрежем склеенные ранее сегменты. Затем объединим сегменты, имеющие общие граничные точки в один. И наконец, склеим все биллиардные столы в один стол, гомеоморфный поверхности E (см. также рис. 1)

Построенный эволюционный биллиард включает в себя два скачка (две перестройки) между тремя меняющимися биллиардными столами.

Теорема 1. *Построенный выше эволюционный биллиард, носитель которого гомеоморфен эллипсоиду, реализует (в смысле лиувиллевой эквивалент-*

ности) интегрируемый случай Эйлера сразу на всем фазовом симплектическом многообразии M^4_g, т.е. на всех его регулярных изоэнергетических 3-поверхностях для всех регулярных значений обоих параметров g и h. Отметим, что эволюция стенок биллиарда происходит в классе софокусных квадрик, что обеспечивает интегрируемость системы в каждый момент её эволюции.

Доказательство. Воспользуемся теоремой А.Т.Фоменко и Х.Цишанга о инварианте лиувиллевой эквивалентности. Для этого необходимо для всех построенных биллиардов вычислить инварианты Фоменко-Цишанга и проверить, что они совпадают с инвариантами, кодирующими слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях случая Эйлера. Для этого необходимо сначала описать бифуркации торов Лиувилля, вычислить грубую молекулу – граф Риба, в вершинах которого расположены коды бифуркаций (так называемые атомы). Затем необходимо указать — как бифуркации склеены между собой по граничным торам Лиувилля. Для этого по правилам, указанным в [16], необходимо выбрать допустимые базисы из циклов λ, μ в группе гомологий граничных торов и вычислить матрицы перехода от одного допустимого базиса к другому вдоль ребра молекулы, соединяющего две выбранные бифуркации. Из этих матриц склейки необходимо извлечь метки r, ε (которые ставятся на ребрах) и n, которые ставятся на так называемых "семьях". Для случая Эйлера эти инварианты были вычислены А.В.Болсиновым и А.Т.Фоменко [16], а для перечисленных выше трех типов биллиардов В.В.Ведюшкиной [9]. Сравнивая эти инварианты (см. рис. 6), получаем, что они одинаковые. Это означает, по теореме Фоменко-Цишанга, что эти системы лиувиллево эквивалентны.

Рассмотрим стандартный трехосный эллипсоид в $\mathbb{R}^3$. Согласно теореме Якоби–Шаля касательные к геодезической на эллипсоиде касаются фиксированного гиперболоида, конфокального с данным эллипсоидом. Рассмотрим геодезический биллиард в области, высекаемой на эллипсоиде конфокальными однополостными и двуполостными гиперболоидами. Материальная точка геодезического биллиарда движется в этой области по отрезкам геодезических и отражается от границ по стандартному закону. Эти биллиарды интегрируемы (см. книгу В.В.Козлова и Д.В.Трещёва), поскольку касательные к траектории точки также касаются некоторого фиксированного гиперболоида (однополостного или двуполостного). Слоения Лиувилля таких биллиардов с точностью до лиувиллевой эквивалентности были изучены Г.В.Белозеровым [11]. В частности, он вычислил инварианты Фоменко–Цишанга для всех таких биллиардов и дал полную классификацию двумерных областей на эллипсоиде, являющихся интегрируемыми биллиардными столами. Выделим из них три биллиарда.

Первый биллиард, представляет собой две области гомеоморфные дискам. Эти области одновременно высекаются на эллипсоиде конфокальными гиперболоидами — одним однополостным и одним двуполостным. При этом эти два диска пересекаются со средней полуосью эллипсоида (см. рис. 1).

Второй биллиард на эллипсоиде ограничен однополостным гиперболоидом.

Третий – представляет собой весь эллипсоиде.

Как было показано Г.В.Белозеровым [11], каждый из этих биллиардов лиувиллево эквивалентен случаю Эйлера на соответствующей изоэнергетической поверхности. А именно, первый биллиард реализует слоение Лиувилля случая Эйлера на несвязном объединении двух трехмерных сфер S^3. Второй — на прямом произведении $S^1 \times S^2$, а третий — на проективном пространстве $\mathbb{R}P^3$.

Сконструируем из этих трех биллиардов один эволюционный биллиард (см. рис. 1). За начальный биллиард возьмем первый описанный выше биллиард, гомеоморфный двум дискам. При эволюции два листа первого биллиарда расширяются, постепенно заполняя кольцо, высекаемое однополостным гиперболоидом. В момент скачка они склеиваются в кольцо, являющееся вторым биллиардом. Затем это кольцо продолжает расширяться на эллипсоиде, постепенно заполняя его целиком. В момент последнего скачка оно превращается в полный двумерный эллипсоид (см. рис. 1). Повторим, что при этой эволюции границы (стенки) биллиарда деформируются в классе конфокальных квадрик.

Теорема 2. *Построенный геодезический эволюционный биллиард на двумерном эллипсоиде реализует (в смысле лиувиллевой эквивалентности) интегрируемый случай Эйлера сразу на всем фазовом симплектическом многообразии M^4_g, т.е. на всех его регулярных изоэнергетических 3-поверхностях для всех регулярных значений обоих параметров g и h. Отметим, что эволюция стенок биллиарда происходит в классе дуг, высекаемых конфокальными гиперболоидами на эллипсоиде. Это обеспечивает интегрируемость системы в каждый момент её эволюции. Носителем этого эволюционного биллиарда является эллипсоид.*

Доказательство. Как было сказано выше, согласно теореме Г.В.Белозерова [11], вне скачков каждый биллиардный стол – состояние – послойно моделирует систему на одной из изоэнергетических поверхностей случая Эйлера. Этот факт был также доказан путем сравнения соответствующих инвариантов Фоменко–Цишанга. При описанной выше эволюции биллиарда изоэнергетические поверхности меняют свой тип в том же порядке, в котором меняет свой тип изоэнергетическая поверхность Q^3 в симплектическом листе M^4_g случая Эйлера.

Замечание 7. Напомним, что согласно теореме А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко случай Эйлера лиувиллево (и даже непрерывно траекторно) эквивалентен задаче Якоби, т.е. геодезическому потоке на двумерном эллипсоиде (см. [16]). В случае эволюционного биллиарда снова всплывает трехосный эллипсоид.

Замечание 8. Замечательный факт состоит в том, что построенный нами эволюционный биллиард на самом деле реализуется на одной двумерной поверхности – носителе, гомеоморфной эллипсоиду.

Другими словами, изменения и перестройки указанных состояний эволюционного биллиарда "живут" на одном и том же эллипсоиде – носителе (см. рис. 1,7).

§ 5. Случай Лагранжа

Случай Лагранжа описывает движение осесимметричного тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, лежащей на оси симметрии. Интегралы имеют вид (здесь A и B параметры волчка):

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{2B} + aR_3, \quad K = S_3.$$

А.В.Болсинов и А.Т.Фоменко показали, что в зависимости от параметров системы существует четыре типа бифуркационных диаграмм [16]. Все они показаны на рис. 8.

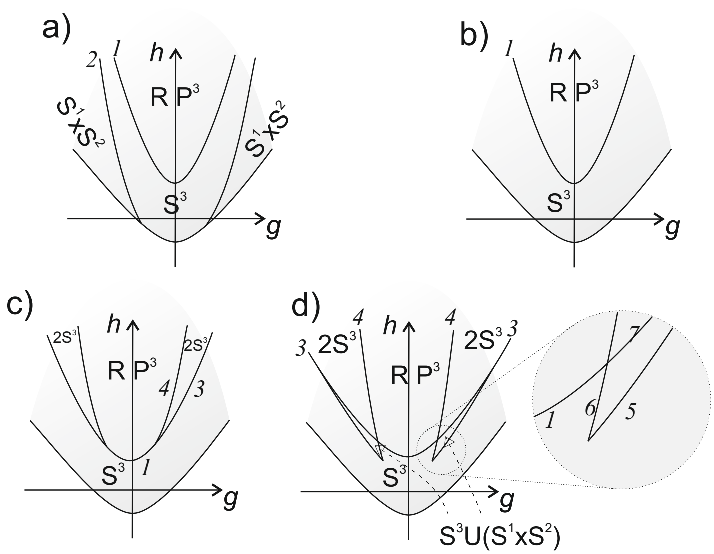

Рис. 8. Типы бифуркационных диаграмм случая Лагранжа.

Отметим, что несмотря на то, что в каждом случае бифуркационной диаграммы есть свои типы регулярных симплектических листов, всего в случае Лагранжа обнаруживается ровно пять различных типов симплектических листов.

5.1. Топологические биллиарды, соответствующие камерам бифуркационных диаграмм случая Лагранжа. Все такие биллиарды ограничены дугами концентрических окружностей.

- Для реализации системы Лагранжа на трехмерной сфере S^3 возьмем топологический биллиард, склеенный из диска, ограниченного окружностью и кольца, ограниченного этой же окружностью и окружностью меньшего радиуса.
- Для реализации системы Лагранжа на прямом произведении $S^1 \times S^2$ рассмотрим два кольца, склеенных вдоль общей окружности большего радиуса.
- Для реализации системы на проективном пространстве RP^3 рассмотрим два склеенных друг с другом диска. На рисунке 9 один из этих дисков разбит на меньший диск и кольцо.

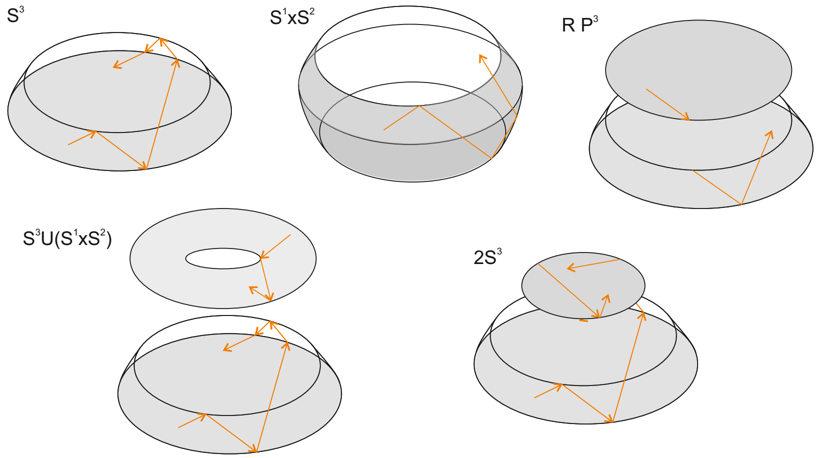

Рис. 9. Топологические биллиарды, соответствующие камерам бифуркационных диаграмм случая Лагранжа

- Для реализации системы на несвязной сумме $S^3 \cup (S^1 \times S^2)$ рассмотрим биллиард, построенный для реализации S^3 и кольцо, так что радиус его большей граничной окружности не превосходит радиус меньшей окружности кольца, взятого для реализации S^3 (см. рис. 9).
- Для реализации системы Лагранжа на несвязной сумме $2S^3$ рассмотрим биллиард, построенный для реализации S^3 и диск, радиус граничной окружности которого не превосходит радиус меньшей окружности кольца, взятого для реализации другого экземпляра S^3 (см. рис. 9).

5.2. Классификация перестроек топологических состояний–биллиардов при переходах между камерами бифуркационных диаграмм.

Предложение 1. *Эволюции гамильтоновых систем случая Лагранжа при переходах через дуги бифуркационных диаграмм могут быть реализованы следующими семью перестройками соответствующих состояний–биллиардов (см. рис. 10).*

1. *При перестройке $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ внутренняя окружность кольца, приклеенного к диску, сжимается в точку. В результате получается гомеоморфный сфере биллиард, склеенный из двух дисков.*
2. *При перестройке $S^1 \times S^2 \to S^3$ внутренняя окружность одного из колец сжимается в точку. Получается диск.*
3. *При перестройке $S^3 \to 2S^3$ из выделенной точки рождается маленький диск, радиус граничной окружности которого не превышает меньший радиус кольца. Двумерная поверхность становится гомеоморфной несвязному объединению двух дисков.*
4. *При перестройке $2S^3 \to \mathbb{R}P^3$ граничная окружность диска склеивается с граничной окружностью кольца, приклеенного к большему диску. Полученный биллиард, очевидно, представляет собой два склеенных по границе диска, т.е. гомеоморфен сфере.*

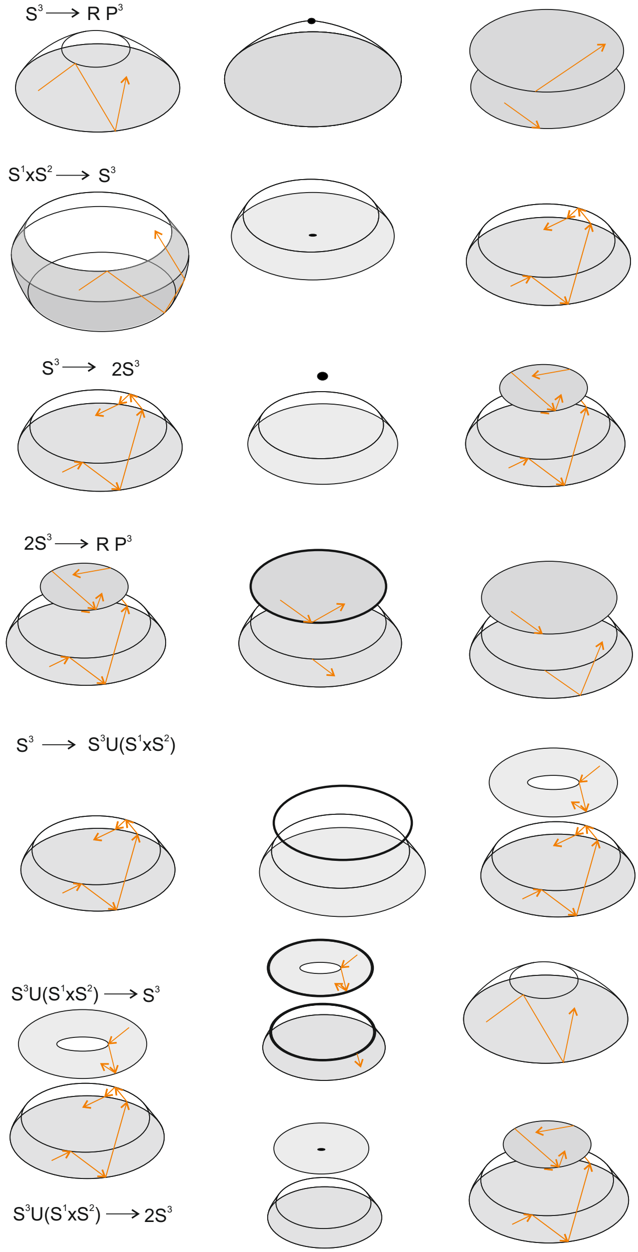

Рис. 10. Перестройка топологических биллиардов при переходах между камерами бифуркационных диаграмм случая Лагранжа.

5. *При перестройке* $S^3 \to S^3 \cup (S^1 \times S^2)$ *новый экземпляр* $S^1 \times S^2$ *появляется из окружности, раздуваясь в кольцо, радиусы граничных окружностей которого не превосходят радиус меньшей окружности кольца, взятого для реализации* S^3.
6. *При перестройке* $S^3 \cup (S^1 \times S^2) \to S^3$ *большая окружность кольца склеивается с меньшей граничной окружностью топологического биллиарда, соответствующего* S^3. *Полученный биллиард гомеоморфен диску.*
7. *При перестройке* $S^3 \cup (S^1 \times S^2) \to 2S^3$ *большая окружность кольца, соответствующего* $S^1 \times S^2$, *стягивается в точку. В результате получается несвязное объединение двух дисков.*

5.3. Эволюционные биллиарды для случая Лагранжа. При анализе бифуркационных диаграмм случая Лагранжа (см. рис. 8) получаем, что все симплектические листы принадлежат к одному из пяти типов. Гамильтонова система на каждом симплектическом листе задаётся с ростом энергии h некоторой цепочкой перестроек её инвариантов, т.е. меченых молекул. При этом моделируется также цепочка перестроек соответствующих изоэнергетических 3-поверхностей.

Построим для каждого типа симплектических листов подходящий эволюционный биллиард.

1. Симплектический лист первого типа задаёт следующую цепочку перестроек $S^1 \times S^2 \to S^3 \to \mathbb{R}P^3$ (такой симплектический лист появляется в бифуркационной диаграмме случая a). Начальный биллиард–состояние — это два кольца, ограниченных двумя концентрическими окружностями и склеенных вдоль окружности большего радиуса. При перестройке $S^1 \times S^2 \to S^3$ внутренняя окружность одного из колец сжимается в точку. При перестройке $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ внутренняя окружность другого кольца сжимается в точку. Биллиард–состояние становится гомеоморфным сфере. Соответствующий эволюционный биллиард обозначим через $Bill_1$ (см. рис. 11).
2. Симплектический лист второго типа задаёт перестройку $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ (такой симплектический лист появляется во всех четырех типах бифуркационных диаграмм, соответствует например $g = 0$). Начальный биллиард–состояние — это кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями и приклеенное вдоль окружности большего радиуса к диску. При перестройке $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ внутренняя окружность этого кольца сжимается в точку. Биллиард–состояние становится гомеоморфным сфере. Соответствующий эволюционный биллиард обозначим через $Bill_2$.
3. Симплектический лист третьего типа задаёт следующую цепочку перестроек $S^3 \to 2S^3 \to \mathbb{R}P^3$ (такой симплектический лист появляется в бифуркационных диаграммах c и d). Начальный биллиард–состояние — это кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями и приклеенное вдоль окружности большего радиуса к диску. При перестройке $S^3 \to 2S^3$ из точки рождается новый диск, ограниченный окружностью небольшого радиуса. В дальнейшем радиус этой окружности увеличивается, пока не совпадет с радиусом меньшей окружности исходного кольца. В момент перестройки $2S^3 \to \mathbb{R}P^3$ два биллиарда склеиваются

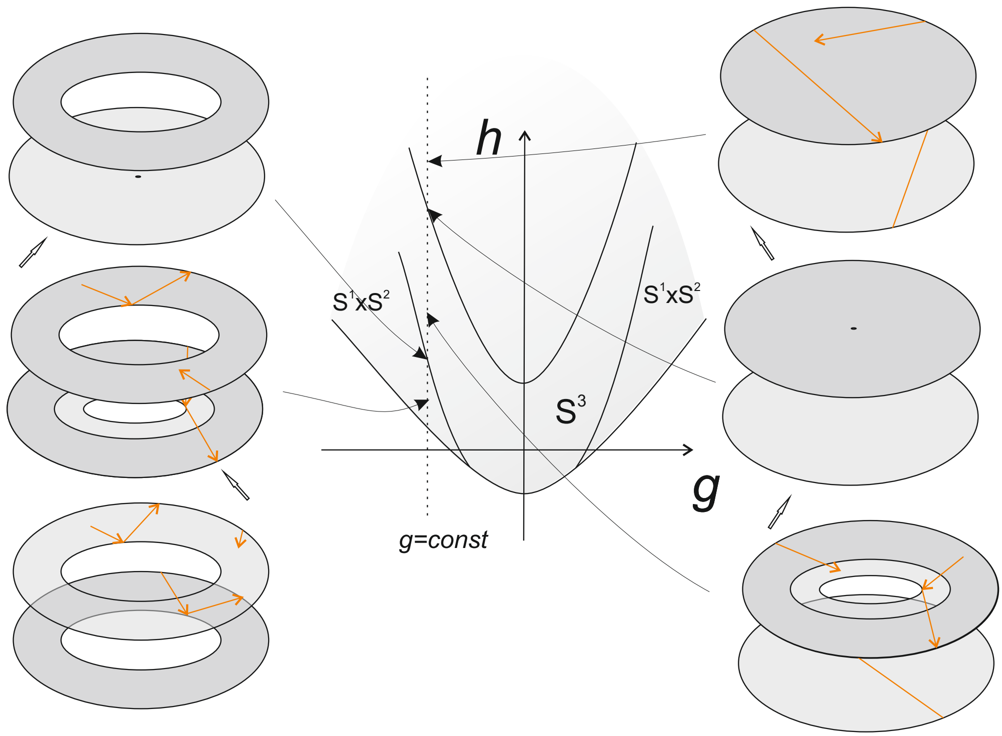

Рис. 11. Эволюционный биллиард $Bill_1$, соответствующий симплектическому листу первого типа для бифуркационной диаграммы типа a

вдоль граничных окружностей (получается сфера). Соответствующий эволюционный биллиард обозначим через $Bill_3$.

4. Симплектический лист четвертого типа задаёт следующую цепочку перестроек $S^3 \to S^3 \cup (S^1 \times S^2) \to 2S^3 \to \mathbb{R}P^3$ (такой симплектический лист появляется только в бифуркационной диаграмме d). Начальный биллиард–состояние — это кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями и приклеенное вдоль окружности большего радиуса к диску. При перестройке $S^3 \to S^3 \cup (S^1 \times S^2)$ из окружности небольшого радиуса (меньшего чем радиус внутренней окружности исходного кольца) рождается новое кольцо, ограниченное окружностями небольшого радиуса. В дальнейшем внутренняя окружность этого кольца стягивается в точку, что соответствует перестройке $S^3 \cup (S^1 \times S^2) \to 2S^3$. Далее граничная окружность полученного диска увеличивается пока не совпадет с граничной окружностью исходного кольца. При перестройке $2S^3 \to \mathbb{R}P^3$ происходит склейка двух дисков (напомним, что в начальном биллиарде к исходному кольцу был уже приклеен диск). На рис. 12 показана сфера, гомеоморфная носителю данного эволюционного биллиарда и его состояния, гомеоморфные меняющимся областям на сфере.

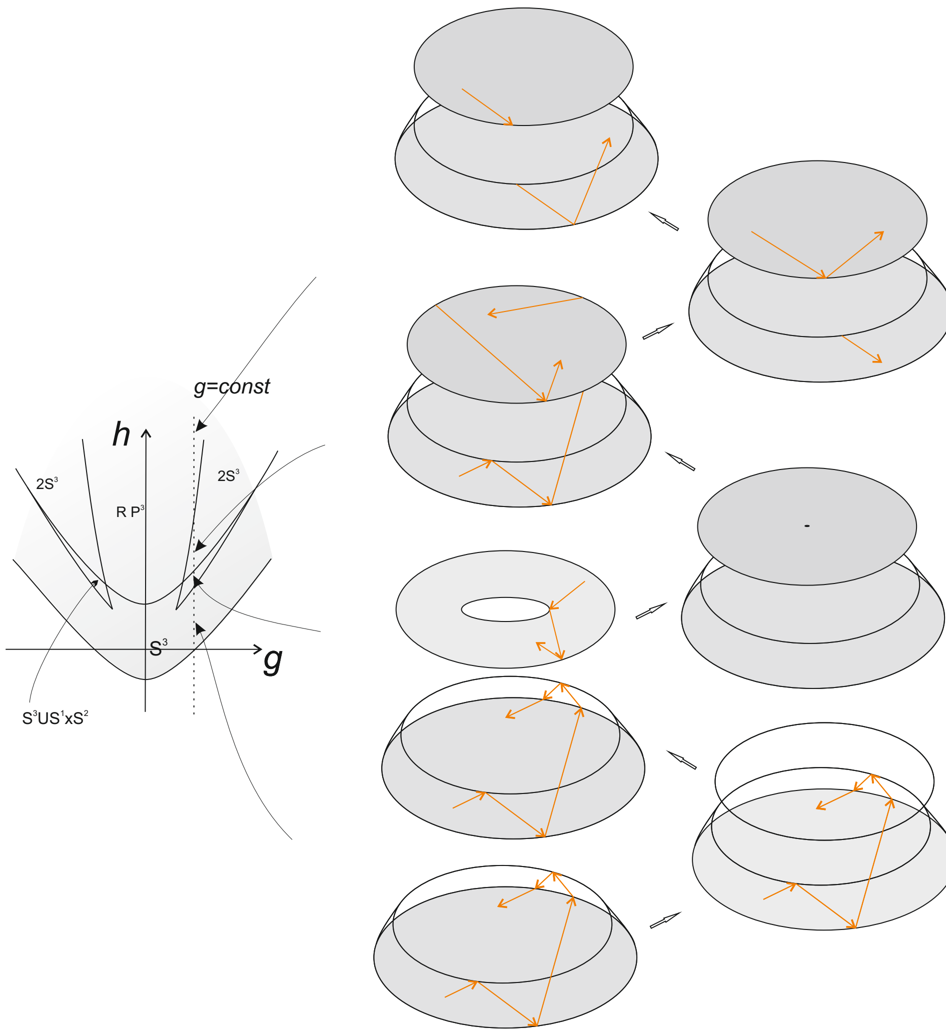

Рис. 12. Эволюционный биллиард $Bill_4$, соответствующий симплектическому листу M_g^4 для бифуркационной диаграммы типа d) случая Лагранжа. Стрелками на листах биллиарда изображены траектории биллиардного шара.

5. Симплектический лист пятого типа задаёт следующую цепочку перестроек $S^3 \to S^3 \cup (S^1 \times S^2) \to S^3 \to RP^3$ (такой симплектический лист появляется только в бифуркационной диаграмме d). Начальный биллиард–состояние — это кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями и приклеенное вдоль окружности большего радиуса к диску. При перестройке $S^3 \to S^3 \cup (S^1 \times S^2)$ из окружности небольшого радиуса (меньшего чем радиус внутренней окружности исходного коль-

ца) рождается новое кольцо, ограниченное окружностями небольшого радиуса.

В дальнейшем большая окружность этого кольца увеличивается, и в момент перестройки $S^3 \cup (S^1 \times S^2) \to S^3$ происходит склейка нового кольца с начальным биллиардом. Перестройка $S^3 \to RP^3$ происходит в результате стягивания граничной окружности в точку. Этот эволюционный биллиард обозначим через $Bill_5$. На рис. 13 состояния биллиарда изображены областями на двумерной сфере.

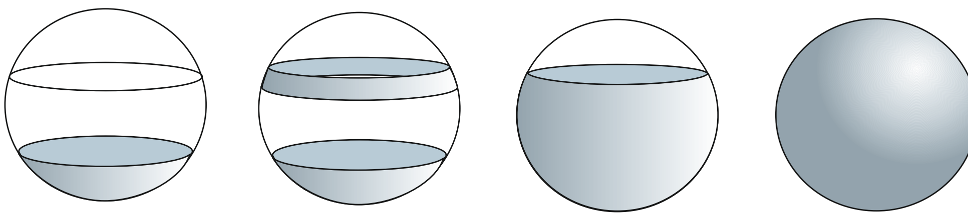

Рис. 13. Состояния биллиарда $Bill_5$ изображены областями на двумерной сфере.

Теорема 3. *Интегрируемый случай Лагранжа на каждом своем регулярном симплектическом 4-листе M^4_g реализуется (в смысле лиувиллевой эквивалентности) одним из описанных выше эволюционных биллиардов $Bill_1$ – $Bill_5$, у которых биллиарды–состояния ограничены концентрическими окружностями. Отметим, что эволюция стенок биллиарда происходит в классе концентрических окружностей, что обеспечивает интегрируемость системы в каждый момент её эволюции.*

Доказательство. Инварианты Фоменко–Цишанга для систем на регулярных изоэнергетических поверхностях биллиардов $Bill_1 - Bill_5$ были вычислены в работе [12]. Полученные инварианты имеют вид $A - A$. Метка r равна нулю в случае, если биллиард гомеоморфен диску, равна $\frac{1}{2}$ в случае если биллиард гомеоморфен сфере и бесконечна в случае когда биллиард гомеоморфен кольцу. Метка $\varepsilon = 1$. Сравнивая полученные инварианты с инвариантами, вычисленными для случаев Лагранжа [16], получаем их совпадение. Это обеспечивает лиувиллеву эквивалентность рассматриваемых систем.

§ 6. Биллиардное преобразование случая Эйлера в случай Лагранжа

В данном параграфе мы предъявим обнаруженный нами факт, показывающий ценность эволюционных биллиардов при моделировании интегрируемых систем. Рассмотрим два известных случая интегрируемости в динамике тяжелого твердого тела. А именно, случай Эйлера и случай Лагранжа. Качественно эти случаи существенно различны. В частности, интеграл случая Эйлера квадратичен, а интеграл случая Лагранжа линеен. Это объясняет существенное отличие в топологии данных систем. Биллиарды позволили обнаружить нетривиальный факт, который “не виден” при классическом подходе к этим системам.

Случай Эйлера “живет” на одном регулярном симплектическом 4-многообразии. Как мы показали, он реализуется описанным выше эволюционным биллиардом. Случай Лагранжа “живет” на пяти регулярных 4-многообразиях (отвечающим различным значениям интеграла площадей g). Как мы показали, на каждом из этих симплектических 4-листов, случай Лагранжа реализуется соответствующим силовым биллиардом. Оказывается, между “силовым биллиардом Эйлера” и пятью “силовыми биллиардами Лагранжа” обнаруживается интересная (“скрытая”) связь.

Рассмотрим эволюционный биллиард, реализующий случай Эйлера. Каждый из топологических биллиардов ограничен дугами софокусных эллипсов и гипербол. Если устремить фокусы друг к другу, то эллипсы перейдут в концентрические окружности, а каждая гипербола перейдёт в пару прямых, проходящих через центр вышеупомянутых окружностей (т.е. в свои асимптоты). Оказывается, что слоения Лиувилля регулярных изоэнергетических поверхностей случая Эйлера перейдут в слоения Лиувилля всех трех типов регулярных изоэнергетических поверхностей случая Лагранжа.

Теорема 4. *Рассмотрим эволюционный (силовой) биллиард, моделирующий случай Эйлера. Устремляя фокусы друг к другу, деформируем границы этого биллиарда: семейство софокусных эллипсов и гипербол переходит в семейство концентрических окружностей и прямых, проходящих через общий центр. Тогда этот биллиард (для случая Эйлера) перейдёт в новый эволюционный биллиард, полный набор лиувиллевых слоений которого совпадает с полным набором лиувиллевых слоений случая Лагранжа. Такие системы мы назовем “биллиардно эквивалентными”.*

Замечание 9. Отметим, что это обнаруженное “превращение” случая Эйлера в случай Лагранжа не переводит симплектический лист случая Эйлера в какой-либо из пяти типов симплектических листов случая Лагранжа. Оно устроено сложнее. А именно, *полный набор лиувиллевых слоений случая Эйлера превращается в полный набор лиувиллевых слоений случая Лагранжа.* При этом порядок и даже количество компонент связности регулярных изоэнергетических поверхностей меняется. В частности, именно это обстоятельство при классическом подходе не позволяло ранее заметить превращение этих систем друг в друга. Как выяснилось, для такого превращения сначала потребовалось обнаружить в случае Эйлера “скрытые софокусные квадрики”, а в случае Лагранжа – “скрытые концентрические окружности”. В итоге, естественная и простая деформация софокусных квадрик в окружности (при слиянии фокусов), оказывается и “превращает” случай Эйлера в случай Лагранжа (в смысле лиувиллевой эквивалентности).

Здесь мы фактически ввели новую операцию над системами, допускающими биллиардную реализацию. Пусть одна система V реализуется биллиардом на семействе софокусных эллипсов (гипербол), а другая система W реализуется биллиардом на семействе концентрических окружностей. Предположим, что при деформации биллиарда, а именно, при слиянии фокусов эллипсов в одну точку, первая система переходит во вторую (в указанном выше смысле).

Определение 6. Будем говорить, что такие интегрируемые гамильтоновы системы V и W "биллиардно эквивалентны".

Доказательство. На рисунке 14 показано как меняются инварианты Фоменко-Цишанга при таком преобразовании силового биллиарда. Почти все они могут быть извлечены из работ [8, 12]. Осталось показать, что гомеоморфный диску биллиард сохраняет свой инвариант при переходе от семейств софокусных эллипсов и гипербол к концентрическим окружностям и прямым через их центр.

Пусть граница плоского биллиарда состоит из дуг концентрических окружностей, с центром в начале координат и быть может, прямых, проходящих через начало координат. Тогда любая траектория биллиарда касается некоторой окружности (быть может нулевого радиуса), с центром в начале координат. За дополнительный интеграл можно взять радиус этой окружности или же ориентированный угол между траекторией и фиксированной окружностью, например границей биллиарда.

Докажем что слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности для биллиарда, изображенного на рисунке 14 справа сверху соответствует инварианту $A - A$, с метками $r = 0$, $\varepsilon = 1$. Здесь в качестве дополнительного интеграла удобно взять радиус окружности, которой касается траектория. Тогда значению интеграла, совпадающего с радиусом большой окружности – выпуклой дуги склейки биллиарда, очевидно соответствует одна окружность. Эта окружность является траекторией, которая проходит по выпуклой дуге биллиарда. Нулевому значению интеграла отвечают траектории, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Такие траектории образуют изоинтегральную поверхность, гомеоморфную кольцу – прямому произведению окружности на отрезок. Здесь окружность — это произвольная траектория, а отрезок — это дуга концентрической окружности, лежащая внутри области и оснащенная векторами скорости (внутрь или наружу). Все остальные изоинтегральные поверхности, как можно легко понять, гомеоморфны двумерным торам. Таким образом, изоэнергетическая поверхность склеена из двух полноторий. Очевидно, что ось каждого полнотория стягивается в точку внутри другого (см. рис. 15), что означает, что метка r в молекуле $A - A$ равна нулю (а метка ε зависит от ориентации и может быть положена равной единице).

Замечание 10. Возникающие в гладких гамильтоновых системах бифуркации типа A описывают стягивание торов на окружность. В нашем случае бифуркацией такого типа является стягивание торов на кольцо. Тем не менее в обоих типах полученных полноторий корректно определены цикл λ, стягивающийся в точку внутри полнотория, и цикл μ – гомотопный произвольной интегральной траектории на кольце.

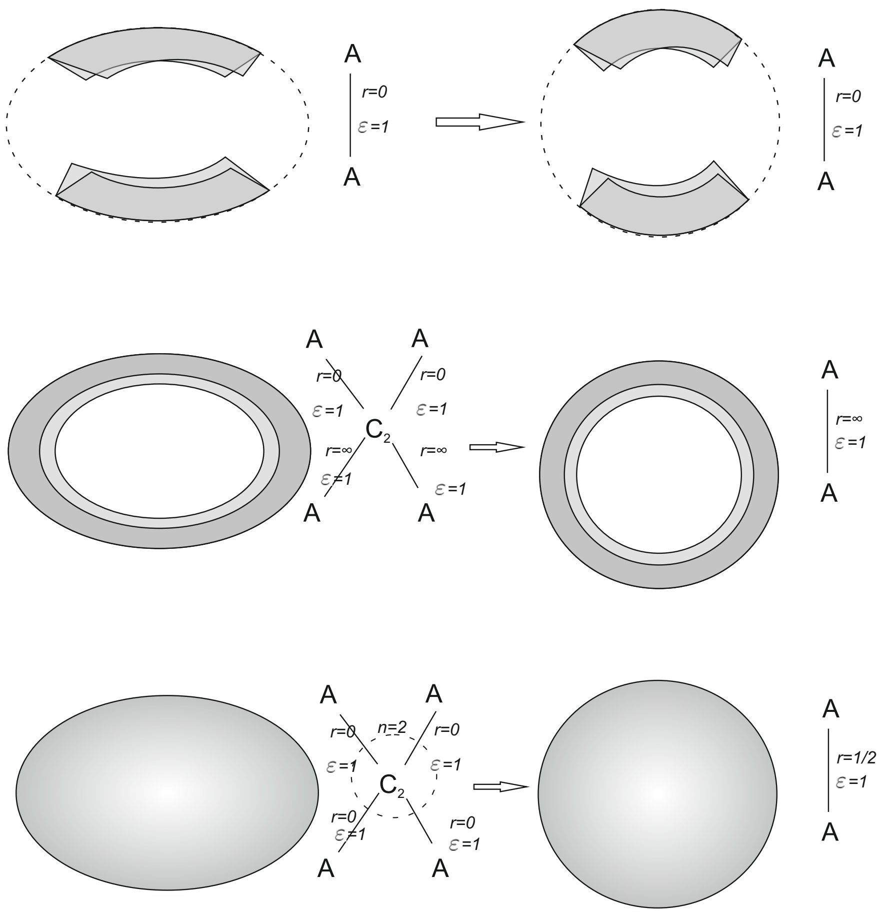

Рис. 14. Преобразование силового биллиарда, моделирующего случай Эйлера, при котором семейство софокусных эллипсов и гипербол переходит в семейство прямых и концентрических окружностей. Рядом с каждым биллиардом изображен соответствующий инвариант Фоменко-Цишанга. Полученные слоения лиувиллево эквивалентны слоениям изоэнергетических поверхностей случая Лагранжа.

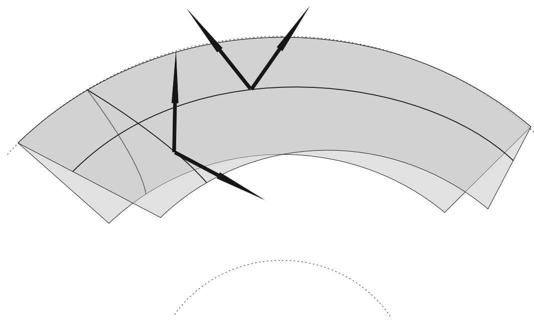

Рис. 15. Циклы на торе Лиувилля – кривые на биллиарде, оснащенные подходящими векторами скорости. В каждом полнотории A один из этих циклов переходит в критическую траекторию (то есть является осевым циклом μ), а другой стягивается в точку (т.е. является однозначно определённым циклом λ).

§ 7. Силовые биллиарды и случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского

Случай Горячева-Чаплыгина описывает движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой и специальными условиями симметрии, указанными ниже.

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{2S_3^2}{A} + a_1R_1 + a_2R_2$$
$$K = S_3\left(S_1^2 + S_2^2\right) - AR_3\left(a_1S_1 + a_2S_2\right)$$

Здесь интеграл K — третьей степени. В этом случае центр масс тела расположен в плоскости симметрии тела, отвечающей первым двум осям инерции тела, то есть в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Здесь скобка Пуассона функций H и K выглядит так:

$$\{H, K\} = (S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3)(a_2S_1 - a_1S_2)$$

Отсюда видно, что функции H и K не находятся в инволюции на всех 4-многообразиях $M^4_{1,g}$ поэтому система интегрируема лишь на одной специальной 4-поверхности $\{f_1 = 1,\ f_2 = 0\}$ то есть на $M^4_{1,0}$. Это — случай так называемой частичной интегрируемости, отвечающий нулевому значению интеграла площадей f_2.

Случай Сретенского описывает движение гиростата в поле силы тяжести.

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{2\left(S_3 + \lambda\right)^2}{A} + a_1R_1 + a_2R_2$$
$$K = (S_3 + 2\lambda)\left(S_1^2 + S_2^2\right) - AR_3\left(a_1S_1 + a_2S_2\right)$$

Этот случай является обобщением случая Горячева–Чаплыгина, который получается из него, когда параметр λ равен нулю. Здесь, как и в случае Горячева–Чаплыгина, система интегрируема лишь на одной 4-поверхности $\{f_1 = 1,\ f_2 = 0\}$.

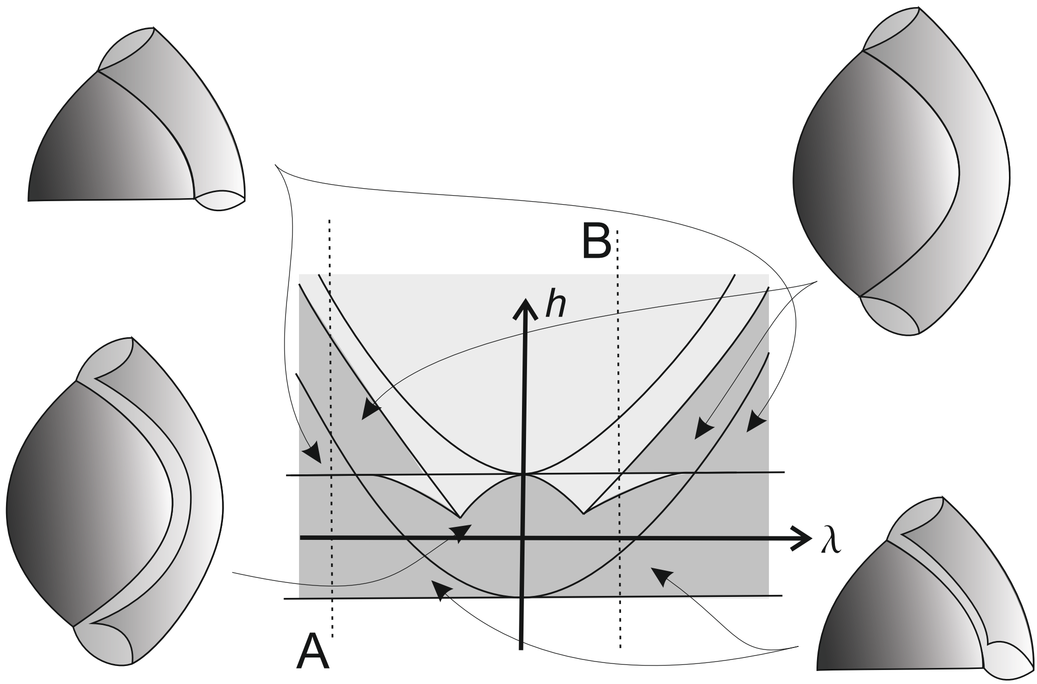

Рис. 16. Бифуркационная диаграмма случая Горячева-Чаплыгина-Сретенского. Более темным изображены типы поверхностей постоянной энергии слоения Лиувилля на которых система может быть промоделирована биллиардами. Через A и B обозначены два симплектических листа, которые соответствуют прямым $\lambda = const$, изображенным на рисунке.

Дополнительный интеграл существует лишь на одной 4-поверхности $\{f_1 = 1,\ f_2 = 0\}$. Поэтому для описания инвариантов этого интегрируемого случая нет необходимости изучать отображение момента $f_2 \times H$. Топологический тип Q^3 и инвариант Фоменко для Q^3 в данном случае зависят от значения параметра λ системы и значения h, определяющего изоэнергетическую 3-поверхность $Q^3_h = \{f_1 = 1,\ f_2 = 0,\ H = h\}$. Поэтому для случая Сретенского бифуркационная диаграмма строится на плоскости $R^2(\lambda,\ h)$. Поясним, что дуги бифуркационной диаграммы разделяют различные типы изоэнергетических поверхностей. На этой же плоскости $R^2(\lambda,\ h)$ также изображаются кривые, разделяющие гомеоморфные изоэнергетические поверхности, но с различными слоениями Лиувилля. На рисунке 16 изображена бифуркационная диаграмма с разделяющими кривыми.

Для некоторых из получившихся камер был найден интегрируемый биллиард, лиувиллево эквивалентный системе Сретенского. Эти камеры на рисунке 16 выделены более темным. Выделим два симплектических листа A и B, лежа-

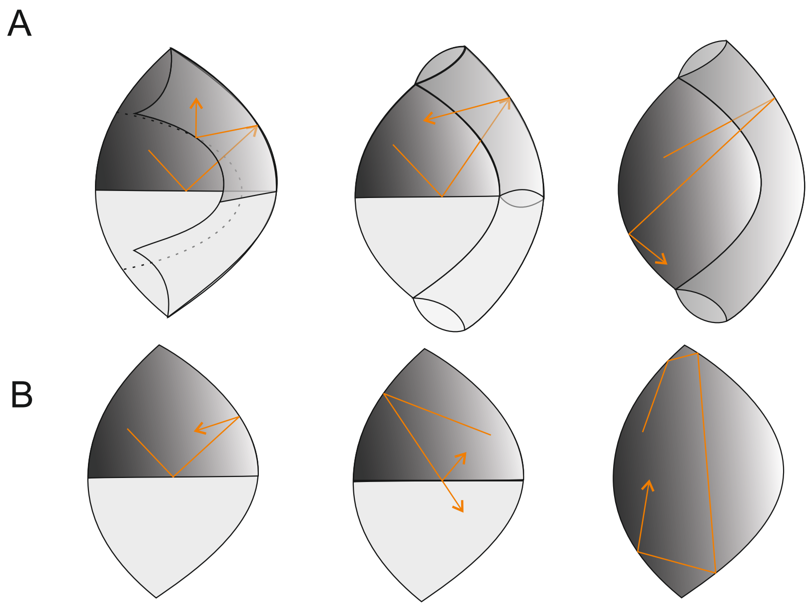

Рис. 17. Эволюция биллиардов для частей симплектических листов A и B. На первом состоянии эволюционного биллиарда A пунктиром обозначена линия склейки между биллиардами A_1 и B.

щих в прообразах пунктирных прямых (также обозначаемых A и B) на рисунке 16. Прямые A и B проходят через области, выделенные на бифуркационной диаграмме темным, т.е. мы можем найти эволюционный биллиард, который частично моделирует слоения Лиувилля на соответствующих симплектических листах.

Опишем подробно построение эволюционных биллиардов A и B.

Объемлющий носитель эволюционного биллиарда A (см. рис. 17 вверху справа) состоит из следующих трех биллиардов. А именно, биллиарда A_1, содержащего один фокус и ограниченного дугой эллипса и дугой гиперболы, и двух конгруэнтных четырехугольных биллиардов класса B_1, ограниченных дугами тех же эллипса и гиперболы, что и биллиард A_1, а также дугой большего эллипса. Начальным состоянием является биллиард, состоящий из трех кусков: одного биллиарда A_1' (т.е. половины биллиарда A_1) и двух биллиардов B_1' (т.е. половин биллиарда B_1). Один из биллиардов B_1' приклеен к биллиарду A_1' вдоль дуги меньшего эллипса (на рис. 17 эта склейка вдоль пунктирной линии), а к другому биллиарду B_1' — вдоль дуги большего эллипса. В момент первого скачка происходит склейка вдоль невыпуклых эллиптических границ биллиардов B_1'. В момент следующего скачка каждый из составляющих биллиардов расширяется, склеиваясь с равным себе биллиардом по другую сторону фокальной прямой (т.е. можно сказать что в начальном комплексе фокальная прямая становится проницаемой стенкой).

Эволюционный биллиард B (см. рис. 17) описывает один скачок – переход от половины биллиарда A_1 к биллиарду A_1. При таком скачке как и в предыдущем случае стенка биллиарда, лежащая на фокальной прямой становится проницаемой.

Теорема 5. *Построенные эволюционные биллиарды A и B (см. рис. 17) реализуют (в смысле лиувиллевой эквивалентности) интегрируемый случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского на части фазовых симплектических многообразий M^4_λ, соответствующих прямым A и B на рис. 16. Подчеркнем, что эволюция стенок биллиарда происходит в классе софокусных квадрик, что обеспечивает интегрируемость системы в каждый момент её эволюции.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из вычисленных инвариантов Фоменко-Цишанга, которые могут быть найдены в работах [16] и [**?**].

Список литературы

[1] V. V. Fokicheva, A. T. Fomenko, *Billiard systems as the models for the rigid body dynamics*, Studies in Systems, Decision and Control, Advances in Dynamical Systems and Control, 69, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer International Publishing, 2016, 13–32

[2] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, *Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы*, Известия РАН. Серия математическая, 81:4(2017), 20–67.

[3] А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, *Понижение степени интегралов гамильтоновых систем с помощью биллиардов*, ДАН, 2019, 486:2, 15–19.

[4] A. T. Fomenko and V. V. Vedyushkina, *Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field*, Russian Journal of mathematical physics, 2019, 26:3, 320–333

[5] Пустовойтов С.Е., *Топологический анализ биллиарда в эллиптическом кольце в потенциальном поле*, Фундаментальная и прикладная математика, том 22, выпуск 6, стр. 201-225, 2019

[6] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56

[7] В. В. Ведюшкина, *Интегрируемые биллиарды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе*. Математический сборник, 211:2 (2020), 3–30.

[8] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

[9] В. В. Ведюшкина, *Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов*, Матем. сб., 210:3 (2019), 17–74

[10] И.С. Харчева, *Изоэнергетические многообразия бильярдных книжек.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 4, 12–22

[11] Г. В. Белозеров, *Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве*, Матем. сб., 211:11 (2020), 3–40

[12] В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко, *Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды*, Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 63–103

[13] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы,* Издательский дом «Удмуртский университет», 1999

[14] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991

[15] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритические и компьютерные метоы в трехмерной топологии,* М.:Наука, 1998.

[16] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация,* Т.1,2, Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999

А.Т. Фоменко (A. T. Fomenko)
акад. РАН, зав. каф. дифференциальной геометрии и
приложений мех.-мат. ф-та МГУ
E-mail: atfomenko@mail.ru

В.В. Ведюшкина (V. V. Veduyshkina)
асс. каф. дифференциальной геометрии и приложений
мех.-мат. ф-та МГУ
E-mail: arinir@yandex.ru