

Обнаружен класс силовых эволюционных бильярдных систем, реализующих, важные интегрируемые гамильтоновы системы сразу на всех регулярных изоэнергетических 3-поверхностях, т.е. в соответствующем смысле -- сразу на всем фазовом 4-пространстве. Доказано, что известные случаи Эйлера и случая Лагранжа бильярдно эквивалентны, хотя обладают интегралами разных степеней - квадратичным и линейным. Ранее бильярдную реализацию систем механики удавалось проводить лишь по отдельности в разных зонах энергии.

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярд, бильярдная книжка, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга, эволюционные силовые бильярды, динамика твердого тела.

В работах [1-3,12] с помощью бильярдных систем были реализованы многие интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы на изоэнергетических 3-поверхностях. Для каждой такой 3-поверхности, т.е. для разных уровней энергии, подбирались свои бильярды. У топологических бильярдных систем, введенных В.В.Ведюшкиной, энергия материальной точки (бильярдного шара) является всего лишь масштабным параметром, изменение которого не меняет топологию изоэнергетической 3-поверхности. Неоднократно возникал вопрос: можно ли обнаружить новый класс бильярдных систем, реализующих гамильтонову систему "не по частям", а сразу на всем фазовом 4-многообразии M^4 , т.е. на сразу на всех последовательных изоэнергетических 3-поверхностях. Ответ положительный. А.Т.Фоменко обнаружил новый класс бильярдных систем - *силовые* (или *эволюционные*). Здесь с изменением скорости шара (силы удара о стенку-границу) может меняться как топология бильярдного стола, так и закон отражения шара. Следующие определения введены А.Т.Фоменко.

1. *Носителем* силового бильярда назовем конечный связный двумерный локально-плоский (т.е. с локально-евклидовой метрикой внутри 2-клеток) клеточный комплекс X , содержащий вершины, ребра и 2-области-листы L_i , гомеоморфные замкнутым односвязным областям R^2 . Углы между ребрами равны 90 градусов. Гладкие дуги границы (дуги) листов с общим ребром (корешком) склеены посредством изометрии дуг. Важным для приложений классом являются бильярдные книжки (см. [6,7,10,12]).

2. Для каждого значения параметра-энергии $H=h \geq 0$ рассмотрим в носителе X замкнутый подкомплекс $X(h)$, не обязательно связный. Назовем его *состоянием* силового бильярда, отвечающим h . Считаем, что X - это объединение всех $X(h)$ и при $h_1 < h_2$ имеем: $X(h_1)$ содержится в $X(h_2)$, т.е. с ростом h состояние $X(h)$ "разрастается". Некоторые стенки-ребра бильярда, бывшие ранее непроницаемыми для шара, могут стать проницаемыми. Назовем конечное число значений $h=1,2,\dots,N$ - *особыми* (или *сингулярными*), остальные значения - *регулярными*.

3. Ребрами-корешками $X(h)$ являются дуги софокусных квадрик или отрезки фокусных прямых. Границами $X(h)$ могут быть окружности, вырождающиеся в точки при сингулярных h . Носитель X и состояния $X(h)$ можно иногда изображать посредством гомеоморфизма (не обязательно изометрии) в R^3 как двумерную "модель", см. рис. 1.

4. Закон отражения-преломления на ребре-корешке r в состоянии $X(h)$ обозначим через $Z(h,r)$. Это - некоторая циклическая перестановка из группы перестановок $S(n)$, где n - число листов,

сходящихся на ребре r . Пусть $Z(h)=\{Z(h,r)\}$ - набор таких законов. Считаем, что $Z(h)$ - кусочно-постоянная функция и может меняться только в точках сингулярности $h=1,\dots,N$. Если при таких h какое-то ребро r станет "проницаемым" ("прозрачным"), то теперь бильярдный шар проходит сквозь него.

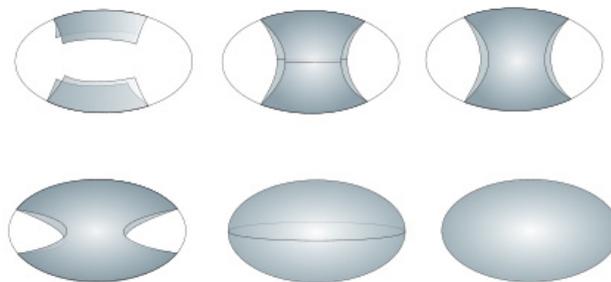


Рис. 1

5. Считаем, что ребра-корешки состояния $X(h)$ могут гладко меняться в классе софокусных квадрик. Как известно из теории интегрируемых бильярдных [14], это задает эквивалентные бильярды [8,9]. При критических h ребра могут склеиваться с другими ребрами, вырождаться, превращаться в отрезки фокусных прямых. Склейка листов вдоль границ происходит вдоль дуги одной и той же квадрики. На "новом корешке" появляется новый цикл-перестановка. В момент скачка мы разрешаем бильярдам менять свой класс эквивалентности. Например, сегмент границы при критическом h может лечь на фокальную прямую или "сложиться пополам". Скачком угол в 90 градусов может стать равным 180. Разрешается склеивать в граничных точках корешки одного состояния $X(h)$, если они легли на одну граничную дугу, т.е. когда угол между ними стал 180. Граничные окружности могут стягиваться в точки.

6. Итак, носитель X мы считаем неизменным, "неподвижным". В нем "разрастаются" состояния $X(h)$, причем X совпадает с последним состоянием $X(N)$. Интегрируемую систему с двумя степенями свободы, задаваемую динамикой бильярдного шара на меняющихся состояниях $X(h)$ назовем *силовым (эволюционным) бильярдом*.

Пусть h - регулярное значение энергии из какого-то интервала $D_i=(i,i+1)$. Соответствующий бильярд-состояние обозначим через $X(D_i)$.

Определение 7. Точкой фазового комплекса $TX(D_i)$ является пара (x, v) , где x — точка бильярдного стола $X(D_i)$, а v — вектор скорости материальной частицы в точке x . Когда точка x оказывается на границе листа L_i ; соседствующего с листом L_k , то склейка соответствующих пар (x,v) и (x,w) происходит по закону отражения-преломления $Z(h,r)$, действующего на данном ребре r .

Определение 8. Регулярной изоэнергетической 3-поверхностью Q_h назовем подмножество в четырехмерном фазовом комплексе $TX(D_i)$, задаваемое уравнением: $H = h$; то есть "уровень постоянной энергии". Для интегрируемых бильярдных книжек регулярные Q_h являются топологическими 3-многообразиями [10].

Рассмотрим знаменитый случай Эйлера (1750) в динамике тяжелого твердого тела, закрепленного в центре масс. Эта система описывается уравнениями на алгебре Ли группы движений R^3 (см. [16]) и интегрируется при помощи квадратичного интеграла. Фиксируем симплектический лист M_g^4 - совместную 4-поверхность уровня геометрического интеграла $(f_1=1)$ и интеграла площадей $f_2=g$. Изоэнергетическая 3-поверхность Q в M_g^4 задается парой (g, h) , где $H=h$ - энергия.

Построим силовой билиард, соответствующий данному M^4_g . Начальным (стартовым) состоянием является несвязный билиард, не имеющий общих точек с фокальной прямой. Он гомеоморфен двум дискам, см. рис.1. Затем он превращается в кольцо. Потом кольцо превращается в сферу (эллипсоид), см. рис.1. Опишем подробнее с указанием траекторий билиардного шара и склейкой корешков, см.рис.2

Справа показана бифуркационная диаграмма случая Эйлера на плоскости (g, h) и указаны регулярные изоэнергетические Q^3 внутри каждой камеры. Построенный силовой билиард включает в себя два скачка между тремя меняющимися билиардными столами.

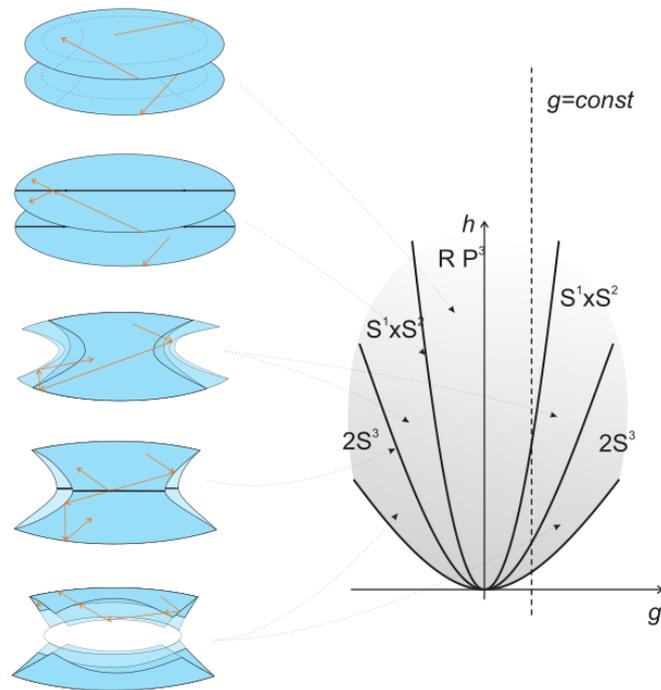


Рис. 2

Теорема 1. Построенный силовой билиард, носитель которого гомеоморфен эллипсоиду, реализует (в смысле Лиувиллевой эквивалентности) интегрируемый случай Эйлера сразу на всем фазовом многообразии M^4_g , т.е. на всех его регулярных изоэнергетических 3-поверхностях для всех регулярных значений g и h . Стенки билиарда меняются в классе софокусных квадрик, что обеспечивает интегрируемость системы в каждый момент эволюции.

Случай Лагранжа, допускающий линейный интеграл, описывает движение осесимметричного тяжелого твердого тела с закрепленной точкой на оси симметрии. В зависимости от значений параметров, существует 4 типа бифуркационных диаграмм, см. [16]. Оказалось, что здесь есть ровно 5 различных типов симплектических 4-листов. Для всех них мы обнаружили силовые билиарды. На рис.3 показан один из них.

Теорема 2. Интегрируемый случай Лагранжа на своем каждом регулярном симплектическом 4-листе M^4_g реализуется (в смысле Лиувиллевой эквивалентности) одним из построенных нами пяти силовых билиардов, у которых состояния ограничены концентрическими окружностями. Стенки состояний меняются в классе концентрических окружностей, что обеспечивает интегрируемость системы в каждый момент эволюции.

Теорема 3. Рассмотрим силовой билиард, моделирующий случай Эйлера. Каждый из билиардов-состояний ограничен дугами софокусных эллипсов и гипербол. Устремляя фокусы

друг к другу, деформируем границы этого биллиарда: семейство софокусных эллипсов и гипербол переходит в семейство концентрических окружностей и прямых, проходящих через общий центр. Тогда этот биллиард (для случая Эйлера) перейдет в новый силовой биллиард, полный набор лиувиллевых слоений которого совпадает с полным набором лиувиллевых слоений случая Лагранжа (для всех его трех типов изоэнергетических 3-поверхностей). Такие системы мы называем "биллиардно эквивалентными".

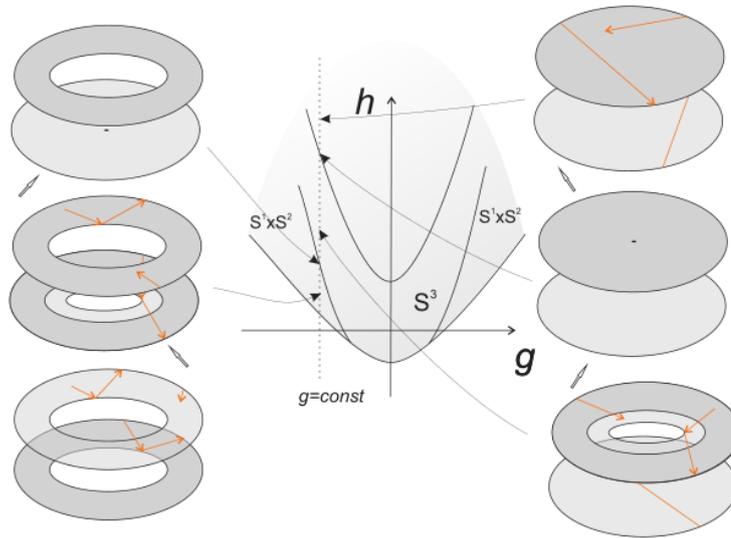


Рис. 3

Обнаруженное "превращение" случая Эйлера в случай Лагранжа не переводит симплектический лист случая Эйлера в какой-либо из 5 типов симплектических листов случая Лагранжа. Оно устроено сложнее. Именно это не позволяло ранее заметить превращение этих систем друг в друга. Тем не менее, оказалось, что полный набор лиувиллевых слоений случая Эйлера превращается в полный набор лиувиллевых слоений случая Лагранжа. Сначала потребовалось обнаружить в случае Эйлера "скрытые софокусные квадратики", а в случае Лагранжа – "скрытые концентрические окружности". В итоге, деформация софокусных квадратиков в окружности (при слиянии фокусов) и "превращает" случай Эйлера в случай Лагранжа.

Также мы обнаружили силовые биллиарды, реализующие интегрируемый случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского на части фазовых симплектических 4-многообразий.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00775-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.В.Фокичева, А.Т.Фоменко, Studies in Systems, Decision and Control, Advances in Dynamical Systems and Control , 69, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer International Publishing, 2016, 13–32
2. В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, Изв. РАН. Серия матем., 81:4, 2017, 20-67
- 3 В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, ДАН. Серия матем., 2019, 486:2, 15-19.
4. А.Т. Fomenko, V.V. Vedyushkina, Russ. J. Math. Phys, 26:3, 2019, 320-333
5. С.Е. Пустовойтов, Фунд. прикл. мат., 22:6, 2019, 201-225
6. В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, Матем. сб., 209:12, 2018, 17-56
7. В.В. Ведюшкина, Матем. сб., 211:2, 2020, 3--30
8. В.В.Фокичева, Матем. сб., 206:10, 2015, 127--176
9. В.В. Ведюшкина, Матем. сб., 210:3, 2019, 17—74

10. И.С. Харчева, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ, 2020 №4, 12-22
11. Г.В.Белозеров, Матем. сб., 211:11, 2020, 3—40
12. В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, Изв. РАН. Серия матем., 83:6, 2019, 63-103
13. Дж.Д. Биркгоф, “Динамические системы”, Ижевск, Изд. дом “Удмуртский университет
14. В.В.Козлов, Д.В.Трещёв, “Генетическое введение в динамику систем с ударами”, М.: Изд-во МГУ, 1991
15. С.В.Матвеев, А.Т.Фоменко, “Алгоритические и компьютерные методы в трехмерной топологии”, М.:Наука, 1998
16. А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация”, Ижевск, Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999, т.1, 444с

Force evolutionary billiards and case billiard equivalence
Euler and the Lagrange case.

© 2020 Academician of the RAS A. T. Fomenko¹, V. V. Vedyushkina²
^{1,2} *Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Received November, 2020

A class of force evolutionary billiards is discovered that, it turns out, realize important integrable Hamiltonian systems on all regular isoenergy 3-surfaces at once, i.e. over the entire phase 4-space. It is proved that the well-known Euler and Lagrange cases are billiard equivalent, although they have integrals of different degrees - quadratic and linear.

Keywords: integrable system, billiard, billiard book, Liouville equivalence, Fomenko – Zieschang invariant, evolutionary force billiards, rigid body dynamics.