

УДК 517.938.5

Моделирование вырожденных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками

А. А. Кузнецова¹

Интегрируемыми бильярдными книжками реализуются примеры вырожденных (не морсовских) мультиседловых особенностей (атомов) кратности 3 и сложности 1.

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярдная книжка, слоение Лиувилля, софокусные квадрики, вырожденные особенности, 3-атомы.

Examples of degenerate (non Morse type) multi-saddle singularities (atoms) of complexity 1 and multiplicity 3 are realized by integrable billiard books.

Key words: integrable system, billiard book, Liouville's foliation, confocal quadrics, degenerate exception, 3-atom.

1. Введение

Известна интегрируемость бильярда в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик семейства $(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda)$ для $0 < b < a$. В.В.Ведюшкина ввела новый важный класс интегрируемых бильярдных книжек, получающихся из плоских бильярдных склейками вдоль граничных ребер, с указанием перестановок, диктующих правила перехода бильярдного шара с одного листа бильярда на другой [1, 2]. Такие столы-комплексы можно понимать и как плоские многослойные бильярды. Слоения Лиувилля систем на них классифицируются инвариантами Фоменко-Цишанга, т.е. графами-молекулами с особенностями-атомами в вершинах и числовыми метками, задающими склейки граничных 2-торов этих особенностей друг с другом.

В программной работе [3] А.Т.Фоменко сформулировал гипотезу о моделировании любых невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы подходящими бильярдами. В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой удалось доказать, что произвольные невырожденные особенности слоения Лиувилля, называемые также боттовскими 3-атомами [4, 5], и любая база слоения Лиувилля [6], классифицирующим инвариантом которой является молекула (инвариант Фоменко) — граф с вершинами-атомами без меток, реализуются алгоритмически задаваемыми бильярдными книжками, см. [1, 2] и [7] соответственно. Также подходящими бильярдами реализуются произвольные значения числовых меток [8-10] и разнообразные классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии [11, 12] и инвариантов Фоменко-Цишанга — молекул с числовыми метками [13, 14, 15, 2]. Обзор недавних результатов и открытых задач по топологии интегрируемых бильярдных систем и гипотезе Фоменко сделан, например, в работах [3, 16].

Оказывается, гипотеза Фоменко справедлива и для некоторых гамильтоновых систем, чей интеграл не является боттовским на уровне энергии Q^3 , т.е. имеет вырожденные особенности. В работе И.М.Никонова [17] были найдены формулы, выражающие количество вырожденных атомов с одной особой точкой. Выяснилось, что таких атомов кратности 3 ровно пять штук, три из которых ориентируемы (далее они обозначаются $B_{3,1}, B_{3,2}, B_{3,3}$), а два атома неориентируемы, см. рис. 1.

В данной работе мы покажем, как реализовать бильярдными книжками бифуркации слоений Лиувилля, 2-база которых содержит ориентируемые неморсовские мультиседла.

Автор благодарит А.Т.Фоменко и В.В.Ведюшкину за постановку задачи, ценные комментарии и обсуждения.

¹Кузнецова Анастасия Андреевна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anastasiakuznecova0143@gmail.com.

Kuznetsova Anastasia Andreevna — Undergraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

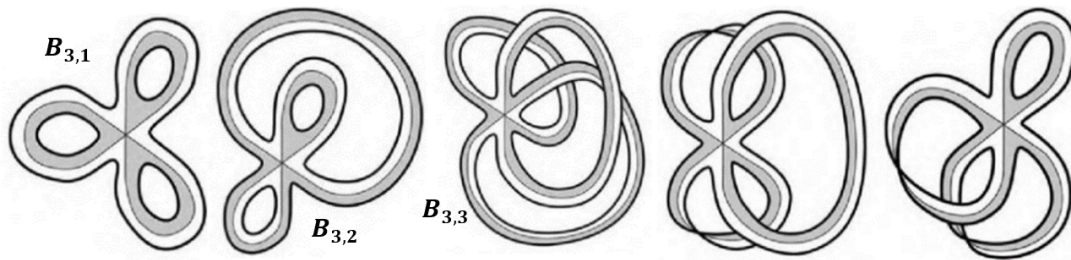


Рис. 1: Вырожденные атомы степени три с одной вершиной.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 21-11-00355 в МГУ имени М.В.Ломоносова.

2. Простейшие билиарды и билиардные книжки

Определение 1. Семейством софокусных квадрик называется множество кривых на плоскости \mathbb{R}^2 с евклидовыми координатами (x, y) , описываемых уравнением:

$$x^2(b - \lambda) + y^2(a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda),$$

где $a > b > 0$ - параметры этого семейства, а число $\lambda \in (-\infty, a]$ - параметр кривой из этого семейства или параметр квадрики.

Замечание 1. Кривая из семейства софокусных квадрик является эллипсом при $\lambda \in (-\infty, b)$, гиперболой при $\lambda \in (b, a)$, вертикальной прямой при $\lambda = a$ и горизонтальной (фокальной) прямой при $\lambda = b$. Фокусы всех невырожденных квадрик совпадают и, при условии $a > b > 0$, находятся в паре точек горизонтальной прямой Ox .

Определение 2. Эллиптические координаты - это двумерная ортогональная система координат, в которой координатными линиями являются софокусные эллипсы и гиперболы. В случае семейства софокусных квадрик рассматриваются эллиптические координаты (λ_1, λ_2) , где $\lambda_1 \in (-\infty, b)$, $\lambda_2 \in (b, a)$.

Определение 3. Рассмотрим компактное подмножество плоскости $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкой замкнутой кривой, такое, что его граница является объединением дуг из семейства софокусных квадрик, а углы излома внутри области равны $\frac{\pi}{2}$. На множестве таких областей введем естественную эквивалентность. Две такие области Ω_1 и Ω_2 эквивалентны, если:

- области Ω_1 и Ω_2 ограничены дугами квадрик из одного софокусного семейства;
- границу Ω_1 можно перевести в границу Ω_2 непрерывной деформацией каждой граничной дуги квадрики в классе софокусных квадрик так, чтобы эллиптический тип квадрик не менялся на гиперболический, и наоборот;
- область Ω_1 можно получить из Ω_2 симметрией относительно осей координат $x = 0, y = 0$.

Полученный класс эквивалентности назовем *простейшим билиардом*. Классификация столов и слоений Лиувилля простейших билиардов была выполнена В.В.Ведюшкиной [18,19], В.Драговичем и М.Раднович [20]. Как оказалось, все они принадлежат одному из конечного количества классов.

Например, простейший билиард A'_0 (см.рис.2) является плоской областью, граница которой образована гиперболой, эллипсом, фокальной прямой и вертикальной осью OY . В дальнейшем этот билиард будет для нас основным "элементом", из нескольких копий которого мы будем конструировать нужные билиардные книжки.

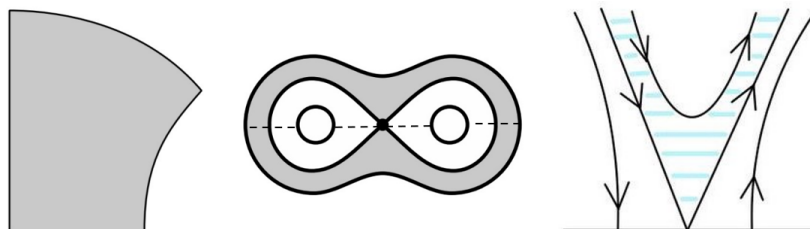


Рис. 2: (а) область A'_0 (б) простейший седловой невырожденный 2-атом В (в) полукрест.

Обозначим через Ω какой-либо простейший плоский бильярд, например, описанный выше бильярд A'_0 .

Определение 4. Определим *бильярдное движение по простейшему бильярду Ω* , как равномерное движение материальной точки без трения по отрезкам прямых с абсолютно упругим отражением на границе области.

Теперь мы вкратце и наглядно опишем понятие бильярдной книжки. Более подробное описание см. в работах [1, 2].

Определение 5. Фиксируем простейший бильярд Ω и число $n \in \mathbb{N}$. Каждой дуге границы Ω , являющейся связной частью квадрики, припишем произвольную перестановку порядка n со следующими условиями:

1. если две дуги из границы имеют общую точку, то есть являются соседними, то перестановки σ_1 и σ_2 , приписанные им, коммутируют;
2. к невыпуклым дугам границы всегда приписаны тождественные перестановки.

Тройка $\nu = (\Omega, n, \Sigma)$, где Ω - простейший бильярд, n - число листов, Σ - набор перестановок, задает *склейку* нескольких экземпляров Ω .

Замечание 2. Простейшие бильярды Ω не обязаны быть одинаковыми, но мы в нашей работе будем склеивать копии одного и того же бильярдного стола.

Определение 6. Фиксируем склейку ν . Возьмем несвязное объединение $n(\nu)$ простейших бильярдных областей - *листов $\Omega(\nu)$* , то есть $\coprod_{i=1}^{n(\nu)} \Omega_i(\nu)$ и профакторизуем по следующему отношению эквивалентности, зависящему от склейки: дуги границ $\Omega_i(\nu)$ и $\Omega_j(\nu)$ будем считать эквивалентными, если они отвечают одной и той же дуге простейшей бильярдной области и ей приписана перестановка $\sigma(\nu)$, у которой после разложения ее в произведение независимых циклов i -ый и j -ый элементы находятся в одном цикле. Получившееся топологическое пространство $\Omega(\nu) := (\coprod_{i=1}^{n(\nu)} \Omega_i(\nu)) / \sim$ - это и есть *бильярдная книжка*, отвечающая склейке ν .

Определение 7. Определим *бильярдное движение по книжке*, отвечающей склейке ν , как движение без трения материальной точки по книжке такое, что:

- внутри всех листов, из которых состоит бильярдная книжка, материальная точка движется по отрезкам прямых без трения;
- на границе области материальная точка абсолютно упруго отражается, переходя на другой лист по перестановке $\sigma(\nu)$, приписанной к дуге, от которой она отражается;
- в вершине угла, которая является общей точкой двух дуг с приписанными перестановками σ_1 и σ_2 , материальная точка переходит с листа i на лист $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i)$ и движется в обратном направлении.

Известно, что бильярд в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик одного и того же семейства, интегрируем. Гамильтонианом (энергией) системы является квадрат модуля вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$: мы рассматриваем движение (без трения) материальной частицы по области с плоской метрикой, где отражение от границы является абсолютно упругим. Дополнительный первый интеграл Λ бильярдной системы имеет вид (3). Его значение в точке (x, y, v_x, v_y) фазового пространства равно параметру λ каустики траектории, проходящей через данную точку в данном направлении, как квадрики из семейства (1).

$$|v|^2 = v_x^2 + v_y^2 \tag{1}$$

$$\Lambda = \frac{-(xv_y - yv_x)^2 + v_x^2 b + v_y^2 a}{v_x^2 + v_y^2} \tag{2}$$

3. Понятия 2-атомов, 3-атомов и полукрестов

Рассмотрим гладкое многообразие X^n и на нем гладкую функцию $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 8. Точка $x \in X^n$ для функции f называется *критической*, если все частные производные равны 0 в этой точке. Иначе это - *регулярная* точка.

Определение 9. Критическая точка для функции f называется *невырожденной*, если определитель матрицы вторых частных производных в ней отличен от нуля.

Определение 10. Уровень $f = c$ называется *критическим*, если на нем есть хотя бы одна критическая точка.

Определение 11. Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, и их конечное количество.

Пусть f — функция Морса на компактном гладком многообразии X^n . Рассмотрим произвольную поверхность уровня $f^{-1}(a)$ и ее компоненты связности, которые назовем *слоями*. На данном многообразии возникает структура слоения с особенностями. Объявляя каждый слой одной точкой и вводя естественную фактор-топологию в пространство Γ слоев, получаем фактор-пространство, которое можно рассматривать как базу этого слоения. Пространство Γ является графом.

Определение 12. Граф Γ называется *графом Роба* для функции Морса f на многообразии X^n . *Вершиной графа Роба* назовем точку, отвечающую особому слою функции f , т.е. связной компоненте уровня, содержащей критическую точку функции. Вершина графа Роба называется *концевой*, если она является концом ровно одного ребра графа. Все остальные вершины называются *внутренними*.

Рассмотрим теперь двумерный случай и пусть X^2 и Y^2 - гладкие двумерные связные поверхности. Пусть f и g - функции Морса на 2-поверхностях X^2 и Y^2 соответственно.

Определение 13. Функции Морса f и g на поверхностях X^2 и Y^2 будем называть *послойно эквивалентными*, если существует диффеоморфизм

$$\lambda : X^2 \rightarrow Y^2, \quad (3)$$

переводящий связные компоненты линий уровня функции f в связные компоненты линий уровня функции g .

Определение 14. *Атом* - это окрестность X^2 критического слоя, задаваемая неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε , расслоенная на линии уровня функции f и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности. Если критическое значение - локальный минимум или локальный максимум, то это будет *атом А*. Если критическое значение - седловое, то соответствующий атом - *седловой*. Атом называется *ориентируемым* или *неориентируемым* в зависимости от того, является ли поверхность X^2 ориентируемой или неориентируемой.

Определение 15. *Седловой атом с одной вершиной* - это пара (X^2, K) , где X^2 - компактная связная двумерная поверхность с краем, а K - вложенный в нее граф, у которого имеется одна вершина и n ребер ($n > 2$), удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) каждая из компонент связности $X^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $I \times S$, где I - полуинтервал, а S - окружность;
- 2) каждое кольцо можно покрасить в один из двух цветов так, чтобы к каждому ребру графа K в поверхности X^2 примыкали кольца разных цветов.

Определение 16. Если в вершине атома сходятся ровно 4 ребра графа K , то атом называется *невырожденным*. Будем говорить, что такая вершина *имеет кратность 2* (в ней пересекаются два отрезка). Если количество сходящихся ребер больше двух, то атом является *вырожденным*. Кратностью его вершины называют количество пересекающихся отрезков, и оно не меньше трёх.

Подробнее 3-атомах и их связи с 2-атомами см. теорему А.Т.Фоменко, см. работы [4, 5, 13], а также книгу А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко [14]. Согласно ней, 3-атом является расслоением Зейферта со слоем окружность и базой, являющейся расслоенным двумерным многообразием, возможно имеющим границу. При этом особые слои расслоения могут иметь только тип (2,1) в случае боттовских (т.е. невырожденных) интегралов. За исключением ряда случаев (например, атомов A^* , получаемых факторизацией $(B \times S^1)/\mathbb{Z}_2$ произведения 2-атома B и окружности), слоение на данной базе образует седловой морсовский 2-атом.

Определение 17. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие (с краем или без края), разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои), называется *многообразием Зейферта*, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Для особого слоя типа (n, k) таких что $\text{НОД}(k, n) = 1$,

напомним, такая окрестность получается из прямого произведения диска D^2 на отрезок I склейкой по граничным дискам $D^2 \times \{0\}$ и $D^2 \times \{1\}$ с поворотом вокруг оси симметрии на рациональный угол $2\pi k/n$. Многообразие Зейферта с заданной на нем структурой слоев называется *расслоением Зейферта*.

Определение 18. Пусть Q - многообразие Зейферта. Пусть две точки на нем эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном слое. Фактор-пространство многообразия Q по этому отношению эквивалентности назовем *базой расслоения Зейферта*.

Определение 19. *Половина креста (полукрест)* - это прообраз ε -окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой окрестности точки $(0,0)$ вместе со структурой слоения, пересеченный с верхней полуплоскостью $x \geq 0$, см. рис. 2в.

4. Обобщенная гипотеза Фоменко и теорема о реализации вырожденных атомов подходящими бильярдами.

Гипотеза А (Фоменко). *Любые бифуркации двумерных торов Лиувилля в изоэнергетическом многообразии любой интегрируемой невырожденной системы с двумя степенями свободы моделируются при помощи интегрируемых бильярдных систем.*

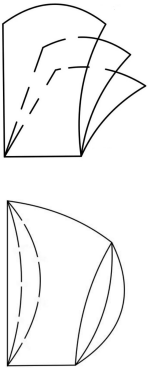
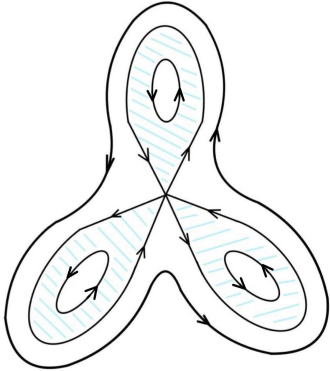
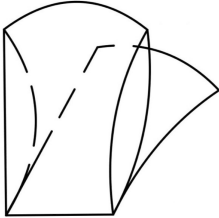
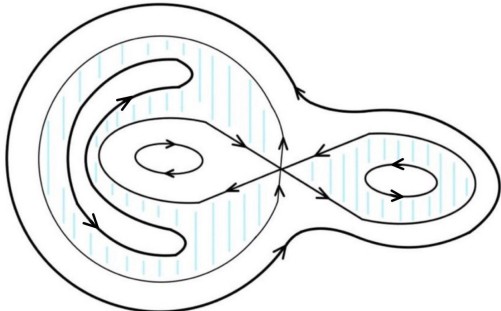
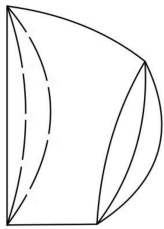
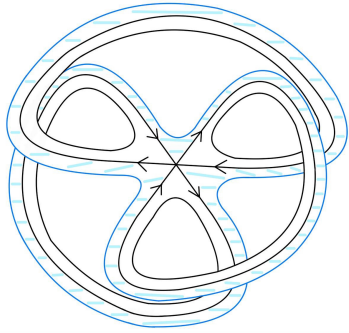
Теорема (Ведюшкина-Харчева, [1,2]). *Гипотеза Фоменко А верна, а именно, для любого ориентируемого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится бильярдная книжка, склеенная из простейших бильярдных систем A'_0 , такая, что слоение Лиувилля прообразовывает окрестности особого значения интеграла $\lambda = b$ ее интеграла Λ (в случае атома A - в окрестности особого значения $\lambda = 0$) ее изоэнергетической поверхности Q^3 послойно гомеоморфно данному атому.*

Теорема (Кузнецова). *Гипотеза Фоменко верна и для некоторых вырожденных 2-атомов и 3-атомов. Оказывается, все ориентируемые вырожденные 2-атомы (и соответствующие им 3-атомы) сложности один (то есть атомы с одной вершиной) и кратности 3 реализуются подходящими бильярдными книжками (см. таб.1). Эти бильярды склеены из трех бильярдных листов (простейших бильярдных систем) в соответствии с перестановками, указанными в таблицах 1 и 2.*

	<i>id</i>	(12)(3)	(23)(1)	(13)(2)	(123)	(132)
<i>id</i>	—	—	—	—	—	—
(12)(3)	—	—	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
(23)(1)	—	<i>B</i>	—	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
(13)(2)	—	<i>B</i>	<i>B</i>	—	<i>B</i>	<i>B</i>
(123)	$B_{3,1}$	$B_{3,2}$	$B_{3,2}$	$B_{3,2}$	$B_{3,3}$	$B_{3,2}^{-1}$
(132)	$B_{3,1}$	$B_{3,2}$	$B_{3,2}$	$B_{3,2}$	$B_{3,2}^{-1}$	$B_{3,3}$

Таблица 1: Седловые бифуркации, возникающие в слоении Лиувилля связной книжки, склеенной из трех листов A'_0 по перестановкам на эллиптической дуге (по столбцам) и на фокальном отрезке (по строкам). Прочерком отмечены несвязные книжки и книжки, не имеющие седловых бифуркаций при $\lambda = b$. Остальным книжкам сопоставлен тип атома в их слоении — невырожденного атома B или одного из вырожденных мультиседловых атомов $B_{3,1}, B_{3,2}, B_{3,3}$. Они изображены в таблице [2]. Символом $B_{3,1}^{-1}$ отмечен атом, получаемый из $B_{3,1}$ при изменении знака функции-интеграла.

Напомним, что 2-атом B - это окрестность плоской восьмерки (см. выше рис. 2б) а 3-атом B - это прямое произведение 2-атома B на окружность.

	Стол-комплекс	Перестановки	Вырожденный 2-атом кратности три с одной вершиной
$B_{3,1}$		$B_{(123)}^{id} B_{(132)}^{id} - B_{3,1}$ $B_{(123)}^{(132)} B_{(132)}^{(123)} - B_{3,1}^{-1}$	
$B_{3,2}$		$B_{(123)}^{(12)(3)} B_{(123)}^{(23)(1)}$ $B_{(123)}^{(13)(2)} B_{(132)}^{(12)(3)}$ $B_{(132)}^{(23)(1)} B_{(132)}^{(13)(2)}$	
$B_{3,3}$		$B_{(123)}^{(123)} B_{(132)}^{(132)}$	

Таб. 2: Типы неморсовских 2-атомов сложности 1 и кратности 3 (и соответствующих неботтовских 3-атомов) и перестановки реализующих их бильярдных книжек.

Комментарий. Во втором и третьем столбцах перечислены бильярдные книжки (столы-комплекс, перестановка σ на эллиптической дуге и перестановка ω на фокальном отрезке), которые реализуют соответствующий 3-атом из четвертого столбца в своем слое Лиувилля. Символом B_{ω}^{σ} отмечена книжка с указанными выше перестановками. Можно заметить, что при перенумерации листов некоторые бильярдные книжки совпадают с другими. Таким образом, первый 3-атом реализуется двумя разными бильярдами, а второй и третий - одним бильярдом.

В правом столбце указаны вырожденные 2-атомы. Соответствующие им вырожденные 3-атомы получаются прямым умножением этих 2-атомов на окружность. Отметим, что при изображении атома заштрихована его часть, соответствующая значениям функции, меньшим критического. Атом $B_{3,1}^{-1}$ получается из изображенного атома $B_{3,1}$ при изменении направления роста функции.

Доказательство.

1. Так как бильярдные системы являются кусочно-гладкими, а не гладкими, то мы будем

пользоваться кусочно-гладкими аналогами теоремы Лиувилля. Поэтому мы будем действовать согласно методу В.В.Ведюшкиной [4] для определения топологии каждого слоя интеграла Λ .

Рассмотрим ячейки, отмеченные в таблице прочерками. Если обе перестановки на гладких граничных дугах стола (на эллиптической дуге и фокальном отрезке) являются тождественными, то стол-комплекс состоит из трех компонент связности. В остальных случаях либо книжка состоит из двух компонент связности, либо отсутствует седловая бифуркация на уровне $\lambda = b$ (если перестановка на фокальном отрезке $\omega = id$).

Теперь рассмотрим остальные случаи. Если на фокальном отрезке книжки стоит перестановка вида $\omega = (i_1, i_2)(i_3)$, то данная книжка удовлетворяет теореме Ведюшкиной и Харчевой, т.е. реализует богтовский 3-атом. Циклу (i_1, i_2) длины 2 соответствует седловая особенность, а третьему листу i_3 — отсутствие бифуркации. Получаемый 2-атом связан и имеет одну седловую точку, т.е. имеет тип B , например, см. рис. 3.

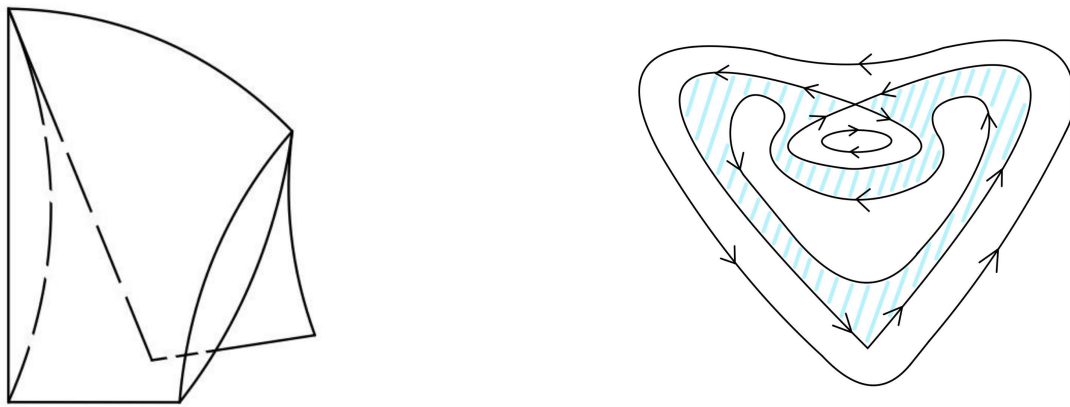


Рис. 3: (а) бильiardная книжка с перестановками $\omega = (12)(3), \sigma = (123)$ (б) атом B .

Лемма 1. 3-атом $B_{3,1}$ из таб. 2 (с точностью до направления роста интеграла) реализуется следующими бильiardными книжками с перестановками σ и ω на эллиптической и фокальной дугах:

- книжкой с перестановками $\omega = (i_1, i_2, i_3), \sigma = id$;
- книжками с перестановками $\omega = (i_1, i_2, i_3), \sigma = (i_1, i_3, i_2)$

Получаемые в этих случаях особенности эквивалентны при замене направления роста интеграла.

Доказательство леммы 1.

1) Рассмотрим первый тип книжек, у которых к дуге эллипса приписана тождественная перестановка.

Рассмотрим софокусную гиперболу, пересекающую внутренность стола A'_0 . Ее прообраз в Q^3 реализует двумерное сечение, и сама особенность имеет тип прямого произведения согласно лемме из [2].

Опишем слоение на этой двумерной поверхности. Полукрест, как прообраз гиперболы в фиксированном листе, можно сопоставить простейшему бильiardу A'_0 , из которого склеена книжка (см. [2]). Поскольку длина цикла ω равна трем, то в окрестности особой точки (прообраза точки пересечения гиперболы с фокальным отрезком) происходит склейка мультиседла кратности 3 из трех полукрестов.

Уровень $b < \Lambda < a$ получаемого слоения на двумерном сечении гомеоморфен одной окружности: линия уровня последовательно обходит все листы книжки. При отражении от эллиптической границы листа (оснащенной тождественной перестановкой) номер листа сохраняется, а при отражении от фокального отрезка — переходит с i -ого листа на $\omega(i)$ -ый. При этом исходящая сепаратриса полукреста i соединяется со входящей сепаратрисой того же полукреста (согласно перестановке $\sigma = id$).

2) Рассмотрим второй тип книжек с двумя разными перестановками длины 3.

Аналогичным образом, рассмотрим ветвь гиперболы и пересечение ее прообраза с окрестностью особого слоя в Q^3 . Уровень $\lambda < b$ состоит из одной компоненты связности (т.е. соответствующая молекула имеет один минимальный атом A).

Имеется две различные перестановки порядка 3, т.е. перестановка $\omega = \sigma^{-1}$. Количество связанных компонент на уровне $b < \lambda < a$ совпадает с количеством независимых циклов перестановки $\omega \circ \sigma$. В данном случае, она является тождественной и действует на трех листах. Т.е. 2-атом перестраивает одну окружность в три окружности. Тип особого слоя определяется аналогично предыдущему.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. 3-атом $B_{3,2}$ из таб. 2 реализуется бильярдными книжками с перестановками $\omega = (i_1, i_2, i_3)$ и $\sigma = (i_1, i_2)(i_3)$ на эллиптической и фокальной дугах.

Доказательство леммы 2.

Аналогичным предыдущей лемме, рассмотрим ветвь гиперболы и пересечение ее прообраза с окрестностью особого слоя в Q^3 . Уровень $\lambda < b$ состоит из двух компонент связности.

Уровень $b < \Lambda < a$ получаемого слоения на двумерном сечении гомеоморфен двум окружностям: линия уровня обходит листы по двум траекториям. Исходящая сепаратриса полукреста i соединяется со входящей сепаратрисой полукреста $\sigma(i)$. В результате, 2-атом перестраивает две окружности в две окружности.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. 3-атом $B_{(3,3)}$ из таб. 2 реализуется бильярдными книжками с перестановками $\sigma = (i_1, i_2, i_3)$ и $\omega = (i_1, i_2, i_3)$ на эллиптической и фокальной дугах.

Доказательство леммы 3.

В данном случае уровень $\lambda < b$, как и уровень $\lambda > b$, состоит из одной компоненты связности: линия уровня последовательно обходит все листы бильярдной книжки в соответствии с σ . Происходит перестройка одной окружности в одну.

Данный 2-атом — торический, он не вложим в плоскость, но его можно изобразить на торе (см. рис.4).

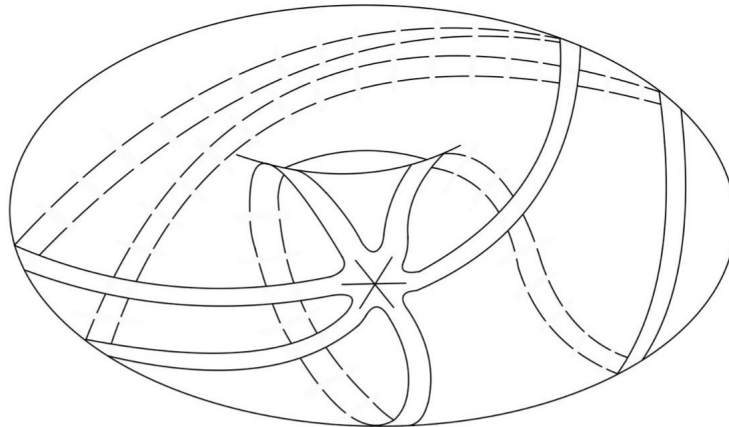


Рис. 4: Другое представление вырожденного 2-атома из строки 3 таблицы 2, как атома на двумерном торе.

Лемма 3 доказана.

Некомпактные 2-атомы также изучались в работе С.С.Николаенко. При этом был предложен [21] инвариант, обобщающий f-графы А.А.Ошемкова [22] для морсовских 2-атомов. Данный инвариант для мультиседловых 2-атомов допускает описание в терминах пары перестановок, как и в морсовском случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведюшкина В. В., Фоменко А.Т., Харчева И. С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами// Докл. РАН, 479:6 (2018), 607–610.

2. *Ведюшкина В.В., Харчева И. С.* Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем// Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56.
3. *Фоменко А.Т., Ведюшкина В. В.* Биллиарды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности// Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, 2019. **3**, 15–25.
4. *Фоменко А.Т.* Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем// Доклады АН СССР, 1986, т.287, №5, с.1071–1075.
5. *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости// Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, №6, с.1276–1307.
6. *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем// Успехи математических наук, 1989, т.44, №1 (265), с.145–173.
7. *Ведюшкина В. В., Харчева И. С.* Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем// Матем. сб., 212:8 (2021), 89–150.
8. *Ведюшкина В. В., Кибкало В. А., Фоменко А. Т.* Топологическое моделирование интегрируемых систем билиардами: реализация числовых инвариантов// Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 493 (2020), 9–12
9. *Vedyushkina V. V., Kibkalo V. A.* Realization of numerical invariant of the Siefert bundle of integrable systems by billiards// Moscow University Mathematics Bulletin, 75:4 (2020), 161–168
10. *Vedyushkina V. V.* Local modeling of Liouville foliations by billiards: implementation of edge invariants// Moscow University Mathematics Bulletin, 76:2 (2021), 60–64
11. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике// Доклады АН СССР, 1987, т.294, №2, с.283–287.
12. *Ведюшкина В. В.* Топологический тип изоэнергетических поверхностей билиардных книжек// Матем. сб., 212:12 (2021), 3–19
13. *Фоменко А. Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:3 (1990), 546–575
14. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация// Т.1,2. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999.
15. *Болсинов А.В., Ризтер П., Фоменко А.Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской// Математический Сборник, 2000, том 191, №2, стр.3–42.
16. *Kibkalo V.A., Fomenko A.T., Kharcheva I.S.* Realizing integrable Hamiltonian systems by means of billiard books // Trans. Moscow Math. Soc. 2021, 37–64
17. *Никонов И.М.* Описание вырожденных двумерных особенностей с одной критической точкой// Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика №3, с. 5–15
18. *Fokicheva V. V.* Description of singularities for system billiard in an ellipse// Moscow University Mathematics Bulletin, 67:5-6 (2012), 217–220
19. *Fokicheva V. V.* Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas// Moscow University Mathematics Bulletin, 69:4 (2014), 148–158
20. *Dragovic V., Radnovic M.* Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479–494
21. *Николаенко С. С.* Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях// Матем. сб., 211:8 (2020), 68?-101
22. *Oshemkov A. A.* Morse functions on two-dimensional surfaces. Encoding of singularities// Proc. Steklov Inst. Math., 205 (1995), 119?-127

Поступила в редакцию
23.06.2022