

А.Т.Фоменко, В.В.Ведюшкина

Биллиарды и интегрируемые системы.

Обзор посвящен классу интегрируемых гамильтоновых систем и классу интегрируемых билиардов, а также недавним результатам школы А.Т.Фоменко по задаче сравнения этих классов с точки зрения послышной гомеоморфности их слоений Лиувилля. Ключевым инструментом здесь оказались введенные В.В.Ведюшкиной билиарды на кусочно-плоских CW -комплексах — топологические билиарды и билиардные книжки. Приведено построение класса эволюционных (силовых) билиардов, введенных недавно А.Т.Фоменко и позволяющих моделировать систему сразу в нескольких неособых зонах энергии при помощи одного билиарда, а также его применение для геодезических потоков на двумерных поверхностях и систем механики. Обсуждаются другие интегрируемые обобщения классического билиарда, включая билиарды с потенциалами, билиарды в магнитном поле, билиарды с проскальзыванием. Билиардные книжки с потенциалом Гука, склеенные из плоских софокусных или круговых столов, моделируют четырехмерные полулокальные особенности слоений интегрируемых систем, содержащие невырожденные положения равновесия. Рассмотрение пересечения нескольких софокусных квадрик в \mathbb{R}^n приводит к обобщению теоремы Якоби–Шаля.

Ключевые слова: интегрируемая система, гамильтонова система, билиард, софокусные квадрики, геодезический поток, динамика твердого тела, билиардная книжка, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга, особенность, бифуркационная диаграмма, эволюционный билиард.

Топологический подход к изучению конечномерных интегрируемых систем в значительной степени был мотивирован работой С.Смейла [1], посвященной в том числе изучению топологических свойств совместных уровней энергии и интеграла площадей для гамильтоновых систем.

Параграф 1. Построенная в работах А.Т.Фоменко, его научной школы и соавторов [2–6] теория топологической классификации интегрируемых систем позволяет классифицировать такие системы с двумя степенями свободы с точностью до различных послышных эквивалентностей их слоений Лиувилля, а также алгоритмически перечислить все возможные в таких системах невырожденные особенности ранга 1 (*3-атомы Фоменко*) и ранга 0, т.е. слоений в инвариантной окрестности слоя с невырожденными положениями равновесия. В основе лежит аналог теории Морса (теория Морса–Ботта), построенный ранее А.Т.Фоменко [7, 8] для интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы.

Основными инвариантами интегрируемой гамильтоновой системы на неособом $dH \neq 0$ уровне энергии $Q_h^3 : H = h$ оказываются оснащенные графы:

Раздел 3.4 выполнен при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-11-00355) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

инвариант Фоменко (называемый также *молекулой*, т.е. база слоения Лиувилля вместе с ее локальным поднятием) и *инвариант Фоменко–Цишанга* (или *меченая молекула*). Вершины графов оснащены типами невырожденных особенностей (3-атомов), ребра соответствуют семействам неособых торов Лиувилля, а числовые метки кодируют результат склейки расслоенного Q^3 из набора 3-атомов, т.е. содержат необходимую информацию о наборе диффеоморфизмов склейки граничных торов 3-атомов в соответствии матрицей инцидентности графа Фоменко.

Инварианты Фоменко и Фоменко–Цишанга удалось вычислить для многих интегрируемых систем из геометрии, механики и математической физики [6]. Совпадение инвариантов двух систем в их неособых зонах энергии Q_i^3 означает наличие гомеоморфизма последних, переводящего почти все замыкания решений одной системы в замыкания другой. Хотя две такие системы могли задаваться разными уравнениями, но их топологическая эквивалентность означает совпадение многих качественных свойств их движений. Отметим, что аналогичное остается верно и для близких к ним неинтегрируемых возмущений, в силу КАМ-теории и результатов Н.Н.Нехорошева, см. [9, 10]. Так топологические свойства классического интегрируемого волчка Эйлера — движения твердого тела, закрепленного на шарнире в центре масс — позволяют объяснить известный эффект, отмеченный космонавтом В.А.Джанибековым: повторяющийся во времени переворот вращающейся в невесомости гайки-барашка.

Отметим, что за прошедшие годы теория топологической классификации А.Т.Фоменко получила дальнейшее развитие в самых разных направлениях: траекторная эквивалентность интегрируемых систем [11], топологическая и симплектическая классификация и кодирование невырожденных особенностей интегрируемых систем [12–14], классификация вырожденных особенностей ранга 1 и вопрос их структурной устойчивости при возмущении в классе интегрируемых систем [15], изучение систем с некомпактными слоениями и неполными потоками, см. например [16].

Параграф 2. Одним из направлений в теории интегрируемых систем, испытавших бурное развитие в последние годы, стала теория интегрируемых бильярдов. Изучается система движения шара по некоторой области-столу с отражением от ее границы. Недавние результаты А.А.Глуцкока [17], А.Соррентино и В.Ю.Калошина [19, 20] по доказательству различных версий гипотезы Биркгофа о бильярдах [21] показывают, что принадлежность дуг границы стола семейству квадрик с общими фокусами (или их вырождений) является не только достаточным [22], но и необходимым для интегрируемости системы в тех или иных смыслах (например, полиномиальной интегрируемости).

Хотя бильярды являются, вообще говоря, лишь кусочно-гладкими системами, для многих из них может быть успешно вычислен кусочно-гладкий аналог инварианта Фоменко–Цишанга: их регулярные слои являются торами, а окрестности особых слоев послойно гомеоморфны 3-атомам, причем числовые метки и определяющие их допустимые базисы на торах склейки оказываются корректны. Для плоских софокусных бильярдов инварианты были вычислены В.Драговичем и М.Раднович [23] и независимо В.В.Ведюшкиной, причем как для эллипτικο-гиперболического [24, 25], так и параболического случаев

[26]. Здесь и далее будем говорить об инварианте Фоменко–Цишанга бильярда (опуская слово “аналог”), если инвариант корректно определен.

Для плоских софокусных столов получилось лишь конечное количество различных инвариантов. Иначе говоря, такие бильярды могут (топологически) промоделировать интегрируемые системы, принадлежащие лишь конечному количеству классов лиувиллевой эквивалентности. Казалось бы, отсюда следует “конечность” и топологической задачи в целом для интегрируемых бильярдов на плоских столах (в отсутствие потенциала).

В.В.Ведюшкиной удалось принципиально расширить класс изучаемых бильярдов, разрешив изометричную склейку *кусочно-плоского* двумерного стола из *плоских* двумерных столов по общим дугам границы. Были определены классы *топологических (обобщенных) бильярдов* [27] и *бильiardных книжек* [28]. Топологические бильярды гомеоморфны ориентируемому многообразию (пусть и являются кусочно-плоскими). Каждое ребро (1-клетка) либо является граничным, либо по нему склеено ровно 2 плоских стола.

Бильiardные книжки являются *СW*-комплексами, 1-клетки которых (“корешки книжки”) оснащены циклическими перестановками на множествах инцидентных им 2-клеток (“листов” книжки). Эти перестановки задают переход шара с листа на лист после удара о данный корешок. Вершинам (0-мерным клеткам) соответствует условие коммутирования. В отличие от топологического бильiardа, книжка содержит хоть одно ребро-корешок, по которому склеено не менее трех 2-клеток (“листов” книжки).

Класс топологических бильiardов был полностью классифицирован В.В.Ведюшкиной [27, 29], причем и структурно (как *СW*-комплексы), и топологически (вычислены инварианты Фоменко–Цишанга). При этом была введена структурная эквивалентность столов, сохраняющая топологию слоения и допускающая непрерывную деформацию дуг границы в классе софокусных квадрик. Класс бильiardных книжек существенно шире, в работе [30] была показано, как с помощью введенной операции “перегибания” книжки свести весь их класс к девяти множествам книжек, каждое из которых допускает программный перебор по количеству листов.

На основе полученных к тому моменту результатов, А.Т.Фоменко в программной работе [31] была сформулирована гипотеза (подробнее о ней в параграфе 2.1), предполагающая что класс интегрируемых бильiardов “не уже” класса интегрируемых систем с точки зрения топологии слоений Лиувилля. А именно, что произвольный класс лиувиллевой эквивалентности (инвариант Фоменко–Цишанга — граф с атомами-вершинами и числовыми метками) реализуется подходящим бильiardом. В этой связи любой ответ интересен: если гипотеза неверна, то интересно установить природу препятствия к такой реализации.

Ряд положений гипотезы Фоменко уже доказан: все невырожденные 3-атомы [28, 32] и все значения числовых меток [33–35], а также произвольный инвариант Фоменко без меток [36]. Иными словами, никакая “составная часть” инварианта сама по себе не является препятствием к реализации — а относительно более слабой эквивалентности (грубой лиувиллевой) бильiardами реализуются все классы.

Отметим, что помимо реализации В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой всех боттовских (невыврожденных) седловых 3-атомов классом бильярдных книжек, А.А.Кузнецовой удалось недавно реализовать примеры неботтовских мультиседловых 3-атомов (прямых или почти прямых произведений мультиседла на окружность). В разделе 2.1 работы также формулируется расширенная версия пункта A или гипотеза \tilde{A} , предполагающая реализацию произвольных 3-атомов, чьи особые окружности могут быть мультиседловыми. Соответствие между неморсовскими мультиседловыми 2-атомами с одной особой точкой и хордовыми диаграммами изучалась И.М.Никоновым [37].

Отдельный сюжет связан с изучением топологии изоэнергетических множеств Q^3 для бильярдов. И.С.Харчевой показано [38], что для произвольной книжки ее Q^3 гомеоморфно гладкому 3-мерному многообразию. В.В.Ведюшкиной в работе [39] построены книжки, чьи Q^3 лежат в дополнении класса многообразий Зейферта до класса граф-многообразий Вальдхаузена [40, 41], т.е. класс бильярдных Q^3 не ограничен многообразиями Зейферта. Ряд недавних результатов также обсуждается в [42–44]

Хотя ответ на наиболее общий пункт C гипотезы еще неясен (реализация произвольных инвариантов Фоменко–Цишанга), бильярдами уже удалось промоделировать следующие системы из механики и математической физики [45]: волчки Эйлера и Лагранжа — целиком, в каждой неособой зоне энергии — и следующие системы в некоторых подходящих зонах энергии: волчок Ковалевской, система Жуковского (волчок Эйлера с гиростатом), системы Чаплыгина [46] Клебша, Стеклова, Соколова (подробнее см. пункт 2.2). Интересным является обнаруженный авторами в работе [47] факт моделирования гладких систем, имеющих интеграл высокой степени степени 3 или 4 (системы Горячева–Чаплыгина и Ковалевской и соответствующие им по принципу Мопертюи геодезические потоки [48], для которых степень интеграла не понижается) с помощью, вообще говоря, кусочно-гладких систем бильярда, имеющих один и тот же интеграл степени 2. Отметим, что каждой неособой зоне энергии моделируемой системы требуется сопоставить “свой” бильярд–книжку, реализующий слоение системы в выбранной зоне энергии.

Важная серия результатов связана с моделированием геодезических потоков на двумерных поверхностях, интегрируемых по Лиувиллю с интегралами степени 1 или 2. Согласно знаменитой теореме Козлова [49], род поверхности должен быть неотрицателен, т.е. она может быть гомеоморфна сфере S^2 , тору T^2 , проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ или бутылке Клейна KL^2 . Канонический вид метрик, порождающих такие потоки, был определен ранее, и для всех метрик были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга и траекторные инварианты (история вопроса и результаты подробно изложены в книге [6]).

Интегрируемые потоки на сфере и торе были промоделированы В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко [42, 50] интегрируемыми круговыми топологическими бильярдами (в случае линейного интеграла) и софокусными топологическими бильярдами и бильярдными книжками (для квадратичного интеграла). Каждому такому потоку, задаваемому нетривиальной римановой метрикой, был сопоставлен кусочно-гладкий стол с плоской метрикой внутри 2-клеток и изометричной склейкой этих плоских частей по из границам.

Параграф 3. Проблема моделирования системы одним биллиардом сразу на всём фазовом пространстве M^4 (возможно, за исключением отдельных уровней энергии) весьма естественна. Следующие два вопроса являются непосредственными усложнениями вопросов и результатов, обсуждавшихся в параграфе 2:

1. построить биллиард, который моделирует систему в нескольких разных зонах энергии (возможно, без учета нескольких отдельных уровней энергии системы),
2. топологически промоделировать четырехмерные особенности интегрируемых систем с помощью биллиардов, в частности, невырожденные полулокальные особенности (типов центр-центр, центр-седло, седло-седло, фокус-фокус), а также часто встречающиеся в приложениях вырожденные особенности (седло-узел, эллиптические и гиперболические вилки и удвоения периода, см. [51]).

Новый подход к решению первой задачи был предложен А.Т.Фоменко: был введен [52] класс эволюционных (силовых) биллиардов, для геометрия стола и закон отражения зависят от параметра и допускают перестройки при некоторых его значениях. Неособым зонам параметра соответствуют слои-книжки, которые могут моделировать систему в неособых зонах энергии (совпадение инварианта Фоменко–Цишанга, т.е. класса послойной гомеоморфности). Вместе с тем, возможность “соединить” два инварианта (слоения на двух Q^3) формулируется не в терминах фазового пространства (наличия некоторой четырехмерной особенности у слоения), а “наглядно”, терминах деформации стола-комплекса. Аналогично, биллиардная книжка сопоставляет “сложность” конфигурационного пространства (стола-комплекса с перестановками) — “сложности” слоения (его 3-атомов, числовых меток) на фазовом Q^3 .

В параграфе 3 будет подробно описан недавно введенный класс эволюционных биллиардов [52, 53], изложены результаты по моделированию ими топологии волчков Эйлера и Лагранжа (целиком, т.е. все неособые слоения с одного симплектического M^4 системы реализуются одним эволюционным биллиардом), системы Жуковского и волчка Ковалевской [54].

При этом удалось обнаружить неочевидную связь классических систем Эйлера и Лагранжа. Устремив фокусы квадрики к ее центру, получим деформацию семейства софокусных квадрик в семейство концентрических окружностей и их радиусов. Применим такое преобразование к эволюционному биллиарду, моделирующему волчок Эйлера. Тогда набор софокусных биллиардов, реализующих слоения Лиувилля волчка Эйлера в неособых зонах энергии, перейдет в набор круговых биллиардов, реализующих слоения Лиувилля волчка Лагранжа в неособых зонах энергии. В указанном смысле будем говорить о биллиардной эквивалентности двух таких систем.

В параграфе 3 также приведен новый результат: при стремлении фокусов квадрик к их центру софокусный топологический биллиард, реализующий геодезический поток глобально-лиувиллевой метрики на торе (его интеграл квадратичный), переходит в круговой топологический биллиард, реализующий геодезический поток с линейным интегралом на торе. Иначе говоря,

линейно-интегрируемые геодезические потоки на торе оказываются билиардно эквивалентными квадратично-интегрируемым геодезическим потокам на торе с глобально-лиувиллевой метрикой.

Параграф 4. В данном параграфе изложено несколько коротких сюжетов, посвященных различным интегрируемым обобщениям классических билиардов. В их числе — интегрируемые билиарды с потенциалом [55, 56], круговые билиарды в постоянном магнитном поле [57], введенные А.Т.Фоменко [58] билиарды с проскальзыванием, а также перечисляется ряд других задач: билиарды на плоскости с метрикой Минковского, добавление к ним потенциалов, топология слоев слоения псевдо-интегрируемых софокусных билиардов с углами $3\pi/2$, упорядоченные билиардные игры.

Для известного уравнения В.В.Козлова [55], задающего условие интегрируемости потенциала билиарда в эллипсе и его решений, найденных В.Драговичем, С.Е.Пустовойтовым был указан их общий вид (в предположении полиномиальности потенциала). Для билиардов с такими потенциалами задача описания топологии слоения Лиувилля на неособом уровне энергии становится алгоритмической. Данная работа развивает предыдущий результат С.Е.Пустовойтова [59] о топологии билиардов с потенциалами степени 4.

Обозначенная выше задача моделирования невырожденных полулокальных особенностей ранга 0, т.е. слоений Лиувилля в малой четырехмерной окрестности слоя с невырожденными положениями равновесия, была успешно решена на основе подхода, предложенного В.А.Кибкало [60, 61]. Для этого применяются билиардные книжки, движение по плоским листам которых происходит в поле одинакового для всех листов отталкивающего потенциала Гука.

В наиболее трудном случае особенностей седло-седло структура искомой книжки (количество листов и перестановки на ее ребрах склейки) может быть задана по f_n -графу особенности, введенному ранее А.А.Ошемковым [13]. Особенность с n положениями равновесия типа фокус-фокус на особом слое моделируется билиардной книжкой с отталкивающим потенциалом Гука на n экземпляров билиарда в круге, склеенным по общей граничной окружности с перестановкой $(1 \dots n)$, см. работу В.В.Ведюшкиной, В.А.Кибкало и С.Е.Пустовойтова [62].

С.Е.Пустовойтовым также изучена топология плоских и топологических билиардов на круговых столах, движение по которым происходит в постоянном магнитном поле, вектор индукции которого ортогонален поверхности стола. Алгоритмически построены бифуркационные диаграммы таких билиардов и вычислены их инварианты Фоменко–Цишанга.

Случай билиардов на столах, размерность которых больше двух, изучается Г.В.Белозеровым. Были построены бифуркационные диаграммы и выполнена классификация областей-столов, ограниченных фрагментами софокусных квадратик в \mathbb{R}^3 с точностью до слабой эквивалентности [63]. Ведется изучение топологических свойств билиардов в таких областях после добавления потенциала Гука.

Вопрос об интегрируемости движения шара по пересечению нескольких софокусных квадратик в \mathbb{R}^3 был поставлен В.А.Кибкало и решен им в случае $n - 2$ квадратик в \mathbb{R}^n . Были найдены формулы дополнительного интеграла и расширен

класс двумерных “элементарных” областей с неплоской метрикой, из которых тоже можно склеивать топологические бильярды и книжки. В общем случае пересечения k софокусных квадрик в \mathbb{R}^n интегрируемость была доказана Г.В.Белозеровым (интегрируемость сохраняется и при добавлении центрального потенциала Гука). Фактически, полученный результат обобщает классическую теорему Якоби–Шаля (случай $k = 1$): касательные к фазовой траектории геодезического потока одновременно касаются еще $n - k - 1$ софокусных квадрик, одних и тех же для всех точек траектории.

§ 1. Введение. Интегрируемые системы с двумя степенями свободы. Инварианты лиувиллевой эквивалентности и классификация систем. Необходимые понятия, теоремы и обозначения.

В настоящей работе рассматриваются гладкие невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы, в основном, с двумя и тремя степенями свободы, а также кусочно-гладкие интегрируемые бильярды, в основном, двумерные и трехмерные.

1.1. Интегрируемые системы с двумя степенями свободы. Базовые определения и теоремы. Пусть M^{2n} - симплектическое многообразие с симплектической 2-формой ω , через $v = \text{sgrad}H$ обозначим гамильтоново векторное поле с гладким гамильтонианом H . Система v называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если обладает набором функционально независимых гладких первых интегралов f_1, \dots, f_n , коммутирующих относительно скобки Пуассона $\{*, *\}$ на M , причем все векторные поля $\text{sgrad}f_i$ полны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Возникающее разбиение многообразия M на связные компоненты совместных уровней T_ξ интегралов f_1, \dots, f_n называется слоением Лиувилля. Оно состоит из регулярных n -мерных слоев, заполняющих почти все многообразие M^{2n} , и особых слоев, заполняющих множество меры нуль. Повторим, что все слои являются связными.

ТЕОРЕМА 1. *Лиувилля (см., например, [6]). Рассмотрим систему, интегрируемую по Лиувиллю и пусть T_ξ - регулярная n -мерная поверхность уровня. Тогда она является гладким лагранжесвым подмногообразием, инвариантным относительно полей (потоков) $\text{sgrad}H, \text{sgrad}f_1, \dots, \text{sgrad}f_n$.*

1) Если поверхность T_ξ компактна и связна, то она диффеоморфна n -мерному тору, который называется тором Лиувилля.

2) Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U^{2n} тора T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .

3) В этой окрестности существуют координаты $s_1, \dots, s_n, \phi_1, \dots, \phi_n$, называемые “действие-угол” и являющиеся функциями от исходных интегралов системы. Здесь s_i - координаты на диске D^n , а ϕ_i - стандартные угловые координаты на торе T_ξ .

4) Относительно этих координат симплектическая структура становится канонической и постоянной, а гамильтонов поток v (как и остальные потоки $\text{sgrad}f_i$) выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т.е. $\dot{s}_i = 0, \dot{\phi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), i = 1, \dots, n$. Это означает, что на каждом торе

поток v задает условно-периодическое движение, а его траектории являются прямолинейными обмотками тора - рациональными или иррациональными. Соответствующие торы Лиувилля называются также резонансными или нерезонансными.

В аналитическом случае почти все торы Лиувилля являются нерезонансными, т.е. иррациональными. Следовательно, такой тор является замыканием интегральной траектории, лежащей на торе. В этом смысле почти все торы Лиувилля “изображают” замыкание решений системы v . Система называется нерезонансной, если почти все ее торы Лиувилля нерезонансны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для систем с двумя степенями свободы на M^4 через Q_h обозначим изоэнергетическую поверхность, т.е. поверхность уровня $H = h = const$. Почти все изоэнергетические поверхности регулярны, так как на них dH всюду отличен от нуля, а потому такие Q_h^3 являются гладкими 3-мерными подмногообразиями в M . В дальнейшем мы будем предполагать, что все Q_h компактны.

Через f обозначим дополнительный интеграл системы, независимый с a , а через $F : M^4 \rightarrow R^2$ обозначим отображение момента $F(x) = (H(x), f(x))$. Пусть σ - бифуркационная диаграмма, т.е. образ множества критических точек отображения момента в плоскости R^2 типичном случае σ состоит из кусочно-гладких кривых и изолированных точек.

Ограничивая интеграл f на регулярную поверхность Q_h^3 , получаем гладкую функцию и отображение $f : Q \rightarrow R^1$. Интеграл f называется боттовским или невырожденным на Q , если все его критические подмногообразия (т.е. состоящие из критических точек f) невырождены. Это означает, что ограничение f на трансверсальную площадку к критическому подмногообразию является функцией Морса. Систему v будем называть невырожденной на Q , если все критические подмногообразия невырождены. Они могут быть только одномерными или двумерными. В дальнейшем будем считать, что рассматриваемые нами системы невырожденные и обладают только критическими окружностями на регулярных Q_h^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Две интегрируемые системы v_1 и v_2 на M_1^4 и M_2^4 (соответственно, на Q_1^3 и Q_2^3) называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм M_1^4 на M_2^4 (соответственно, Q_1^3 на Q_2^3), переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы, сохраняющий ориентацию 3-многообразий и ориентации всех критических окружностей (индуцированных потоками v_1 и v_2).

Напомним, что критические окружности интегралов являются замкнутыми траекториями системы и потому имеют естественную ориентацию.

Поскольку в типичном случае (случай общего положения) почти все торы Лиувилля являются замыканиями интегральных траекторий, то можно сказать, что лиувиллево эквивалентные системы имеют “одинаковые” замыкания почти всех интегральных траекторий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Базой* слоения Лиувилля или *бифуркационным комплексом* называется топологическое пространство его слоев (они связны) с обычной

фактор-топологией, т.е. топологическое пространство, точками которого являются слои слоения Лиувилля (каждый слой - регулярный или особый - заменяется точкой).

Бифуркационные комплексы и их свойства в общем случае (включая указание перестроек слоения на “гранях” комплекса) были введены и изучены А.Т.Фоменко в 1988 году в [2], [64]. В типичных случаях бифуркационный комплекс является не только хаусдорфовым пространством, но даже клеточным комплексом. В случае систем с двумя степенями свободы на M^4 он - двумерный. Бифуркационный комплекс (база) слоения Лиувилля на изоэнергетической 3-поверхности Q_h^3 является одномерным графом.

Важный факт: в нерезонансном (т.е. типичном) случае бифуркационный комплекс не зависит от выбора интегралов интегрируемой системы, а определяется лишь векторным полем $sgrad H$, см. [2, 64]. Напомним, что почти все торы Лиувилля — это замыкания интегральных иррациональных траекторий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Две интегрируемые системы называются грубо лиувиллево эквивалентными, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля (т.е. бифуркационными комплексами), который локально, т.е. в окрестности каждой точки базы, поднимается до послыюного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

1.2. Критические точки и невырожденные особенности. 2-атомы. f -графы. Пусть f — функция Морса на замкнутой двумерной поверхности X^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Морсовским 2-атомом называется окрестность P^2 критического слоя $f(x) = c$, задаваемая неравенством $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достаточно малого ε , расслоенная на линии уровня функции f и рассматриваемая с точностью до послыюной эквивалентности. Если критическое значение c есть локальный минимум или максимум, то атом называется атомом A . Если значение c — седловое, то 2-атом называется седловым. Атом называется простым, если функция Морса является простой, т.е. на критическом уровне находится ровно одна критическая точка. Остальные атомы называются сложными. Атом называют ориентируемым или неориентируемым в зависимости от того, является ли поверхность P^2 ориентируемой или неориентируемой. Родом 2-атома называется род замкнутой 2-поверхности, получающейся из P^2 путем заклейки всех ее граничных окружностей дисками.

Алгоритм построения полного списка всех морсовских 2-атомов описан в [6]. При этом каждому фиксированному значению сложности 2-атома, т.е. количеству его особых точек, соответствует конечный список морсовских 2-атомов такой сложности. Атомов сложности 1 ровно три (один минимаксный атом A , ориентируемый седловой атом B и неориентируемый седловой атом \tilde{B}). Все атомы сложности 2 и выше — седловые. Здесь и далее все 2-атомы предполагаем ориентируемыми.

Кодирование 2-атомов, учитывающее направление роста функции f на 2-атоме, удобно выполнять при помощи f -графов, введенных А.А.Ошемковым [65]. Ориентируемая двумерная компактная поверхность P^2 атома является симплектической, т.е. векторное поле $v = sgrad f$ задает на ней гамильтонову систему с одной степенью свободы (и функция f есть ее первый интеграл).

Напомним конструкцию f -графа для ориентируемых атомов (иначе некоторые ребра графа оснащаются метками $+1$ или -1). Выберем граничный уровень $f = c - \varepsilon$ седлового 2-атома. Он состоит из нескольких окружностей, причем малая окрестность каждого седла пересекается с их объединением по двум интервалам. Выберем на каждом из них по точке и сопоставим их вершинам графа. Каждая из них будет иметь степень 3: два ориентированных ребра (входящее и выходящее) и одно неориентированное. Ориентированные ребра графа соответствуют сдвигам вдоль гамильтонова поля $v = \text{sgrad } f$ по окружностям уровня $f = c - \varepsilon$, переводящим одну отмеченную точку в другую. Неориентированное ребро соединяет точки двух интервалов из окрестности одного и того же седла (будем считать, что ориентированные и неориентированные ребра изображены разными “цветами”).

Заметим, что закодировать f -граф атома сложности k можно парой перестановок S_{2k} , причем одна состоит из k независимых транспозиций (задающих соответствие пары вершин графа седловой точке 2-атома), а циклы второй определяются сдвигом вдоль гамильтонова поля по окружности уровня $f = c - \varepsilon$ (переводящим отмеченную точку в другую). Такое представление оказалось удобно для моделирования 2-атомов и 3-атомов бильярдными-книжками [32].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1. Классификацию особенностей систем с 1 степенью свободы существенно расширил С.С.Николаенко [66], обобщив при этом их код — конструкцию f -графа. Для морсовских ориентируемых 2-атомов неориентированное ребро f -графа теперь интерпретируется как цикл длины 2, “окрашенный” в иной цвет, чем ориентированные ребра f -графа. Вырожденной особенностью типа мультиседла (особая точка, в которую входят $2k$ сепаратрис) соответствует набор из k вершин графа с циклическим обходом. Он задает k ориентированных по циклу ребер, имеющих иной цвет чем ребра, соединяющие вершины двух разных седел. Недавно А.А.Кузнецовой были реализованы такие атомы при помощи интегрируемых бильярдных книжек. 2. Конструкция f -графа была впоследствии обобщена А.А.Ошемковым на случай невырожденных седловых особенностей ранга 0 интегрируемых систем с m степенями свободы. Окрестность каждой точки послойно гомеоморфна произведению m окрестностей морсовского седла на X^2 , и особенность задается набором из m произведений транспозиций и m перестановок с некоторыми условиями коммутирования. С использованием данной конструкции В.А.Кибкало были реализованы бильярдами с отталкивающим потенциалом Гука полулокальные невырожденные седловые особенности ранга 0.

1.3. Боттовские особенности интегрируемых систем. 3-атомы. Теорема Фоменко. Теперь рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы $v = \text{sgrad } H$ на M^4 с гамильтонианом H и дополнительным интегралом f . Ограничим v и f на 3-многообразии Q_h^3 . Пусть L — особый слой слоения Лиувилля на Q_h^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Трехмерная инвариантная окрестность $U(L)$ особого слоя L , расслоенная на поверхности уровня интеграла f и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности, называется 3-атомом. Если функция f являлась функцией Морса, то тогда этот 3-атом называется боттовским

3-атомом. На критических окружностях интеграла f ориентация задается потоком $v = \text{sgrad } H$. Окрестность $U(L)$ всегда ориентируема. При послойной эквивалентности ориентация критических окружностей должна сохраняться.

ТЕОРЕМА 2. *(Взаимно-однозначное соответствие морсовских 2-атомов и боттовских 3-атомов. А.Т.Фоменко [6–8]).*

1. *Трехмерное многообразие $U(L)$ является многообразием и расслоением Зейферта со слоем окружность и с двумерной базой $P(L)$. Особые слои этого расслоения (если они существуют) имеют один и тот же тип $(2,1)$.*
2. *Эти особые слои являются в точности критическими окружностями интеграла f с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.*
3. *Если особых слоев у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие $U(L)$ является прямым произведением $P(L) \times S^1$, где $P(L)$ - двумерная ориентируемая поверхность с краем.*
4. *В общем случае структура расслоения Зейферта на $U(L)$ и структура слоения Лиувилля на $U(L)$ согласованы в том смысле, что каждый слой расслоения Зейферта (окружность) лежит на каком-то слое слоения Лиувилля.*
5. *В частности, интеграл f постоянен на слоях расслоения Зейферта, а потому его можно рассматривать как функцию Морса на базе $P(L)$. Если особых слоев типа $(2,1)$ нет, то $P(L)$ является описанным выше 2-атомом с функцией f . Случай особых слоев типа $(2,1)$ описан ниже. Если слой L содержит критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (то есть тип $(2,1)$), то, оказывается, всегда существует “сечение” расслоения Зейферта \tilde{P} в $U(L)$, обладающее следующими свойствами:*
6. *2-поверхность \tilde{P} трансверсальна слоям (окружностям) расслоения Зейферта.*
7. *Каждый неособый слой (окружность) пересекает поверхность \tilde{P} дважды, а особые слои (т.е. критические окружности с неориентируемой сепаратрисной диаграммой) - только один раз. Следовательно, на \tilde{P} естественно определена инволюция g , сопоставляющая каждой точке x из \tilde{P} точку $g(x)$ из \tilde{P} , являющуюся второй точкой пересечения слоя расслоения Зейферта, проходящего через точку x , с сечением \tilde{P} . Такая точка встречи всегда существует и отлична от x , если x не принадлежит особому слою расслоения Зейферта. Если же точка x лежит на особом слое $(2,1)$, то мы полагаем $g(x) = x$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. [7, 8]

1. *Отображение g является инволюцией на \tilde{P} . Ее неподвижные точки - это в точности точки пересечения “сечения” \tilde{P} с особыми слоями (окружностями) расслоения Зейферта.*
2. *База $P(L)$ расслоения Зейферта на 3-атоме $U(L)$ является фактор-пространством поверхности \tilde{P} по действию инволюции g .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. В этом случае базу $P(L)$ будем называть “2-атомом со звездочками” где “звездочки” соответствуют неподвижным точкам инволюции g , т.е. особым слоям типа (2,1) расслоения Зейферта.

Окончательно, теорема А.Т.Фоменко утверждает, что существует биекция между 3-атомами и 2-атомами (со звездочками или без них). В случае 2-атомов без вершин-звездочек 3-атом является прямым произведением 2-атома на окружность. 2-атомы со звездочками являются базами расслоений Зейферта с особыми слоями на 3-атоме, причем, повторим, вершины-звездочки взаимно-однозначно соответствуют особым слоям типа (2,1) расслоения Зейферта.

Так как 3-атомы описывают бифуркации (перестройки) торов Лиувилля при их прохождении через критический уровень интеграла f на Q_h^3 , следовательно они взаимно-однозначно классифицируются 2-атомами (без звездочек и со звездочками).

1.4. Топология изоэнергетических поверхностей Q^3 интегрируемых систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Обозначим через (H) класс всех гладких ориентируемых компактных замкнутых (без края) 3-многообразий, являющихся изоэнергетическими поверхностями интегрируемых невырожденных (боттовских) систем, т.е. интегрируемых при помощи боттовских интегралов.

Далее, рассмотрим два 3-многообразия: полноторие A и прямое произведение 2-диска с двумя дырками на окружность, которое обозначим через B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Обозначим через (Q) класс всех ориентируемых замкнутых компактных 3-многообразий, представимых в виде $Q^3 = aA + bB$, где a и b - целые неотрицательные числа, а знак $+$ обозначает склейку многообразий по диффеоморфизмам граничных торов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Обозначим через (Wa) класс многообразий Вальдхаузена (или граф-многообразий), т.е. ориентируемых компактных замкнутых 3-многообразий таких, что:

1. многообразии содержит некоторое конечное множество непересекающихся торов,
2. после выбрасывания этих торов получается открытое 3-многообразие, каждая связная компонента которого является расслоением Зейферта со слоем окружность над некоторым двумерным многообразием (возможно с границей и не обязательно ориентируемым).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Через (H') обозначим класс всех ориентируемых компактных замкнутых 3-многообразий, являющихся изоэнергетическими 3-поверхностями гамильтоновых систем, интегрируемых при помощи ручных интегралов f . Гладкий интеграл называется *ручным*, если для любого его критического уровня существует гомеоморфизм всего 3-многообразия, переводящий этот уровень в полиэдр.

ТЕОРЕМА 3. (А.В.Браилов, С.В.Матвеев, А.Т.Фоменко, Х.Цишанг, [6]).

1. Все четыре описанных класса совпадают: $(H) = (Q) = (Wa) = (H')$.

2. Класс (H) не исчерпывает класс всех гладких связных ориентируемых компактных 3-многообразий.
3. Для любых двух многообразий из класса (H) их связная сумма также принадлежит классу (H) .
4. Если многообразие из класса (H) представимо в виде связной суммы каких-то многообразий, отличных от сферы, то оба эти многообразия обязательно принадлежат тому же классу (H) .

1.5. Топологические инварианты слоения Лиувилля на неособых Q^3 . Рассмотрим базу слоения Лиувилля на неособой Q_h^3 , т.е. где $dH \neq 0$. Это есть одномерный граф W , ребра которого отвечают однопараметрическим семействам регулярных торов Лиувилля, а “вершины” соответствуют перестройкам (бифуркациям) этих торов. Сопоставим каждой “вершине” условное обозначение соответствующего 3-атома.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Полученный граф W с вершинами-атомами называется *грубой молекулой W* или *инвариантом Фоменко*. Он является классифицирующим инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности.

Инвариантам грубой лиувиллевой эквивалентности на изоэнергетическом Q^3 и симплектическом M^4 (за вычетом отдельных слоев) посвящены работы [3, 67, 68], см. также [69].

Молекула W содержит много информации о слоении Лиувилля, но ее недостаточно для классификации слоений с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Разрежем каждое ребро молекулы посередине. Молекула распадается на отдельные 3-атомы. Если мы хотим сделать обратную склейку, то граф W сообщает, какие пары граничных торов нужно склеить. Для задания такой склейки достаточно указать для каждого разрезанного ребра матрицу склейки C , определяющую изоморфизм фундаментальных групп склеивающихся торов. Для этого надо фиксировать на торах системы координат, то есть пару независимых ориентированных циклов, являющихся образующими фундаментальной группы тора $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Такую систему координат (λ, μ) (названную *допустимой*) на каждом граничном торе 3-атома удастся задать, используя геометрию 3-атома. Подробное описание см. в [5–8, 70].

Далее, рассмотрим произвольное ребро e_i молекулы W и зададим на нем некоторую ориентацию, например, по возрастанию функции f . Мы разрезали это ребро вдоль некоторого тора Лиувилля и определили на берегах разреза допустимые системы координат K_1 и K_2 . Рассматривая эти пары циклов как базисы в группе одномерных гомологий тора, получаем целочисленную матрицу склейки C_i размером 2×2 с определителем, равным -1 . Хотя эти матрицы не определены однозначно, это не влияет на дальнейшие конструкции. По набору этих матриц строятся инварианты (уже не зависящие от некоторого произвола в выборе допустимых базисов). А именно, это: рациональные метки r_i и $\varepsilon_i = \pm 1$ на ребрах e_i и целочисленные метки n_k на т.н. “семьях”.

Семьи определяются так. Назовем *бесконечным ребром* молекулы ребро с меткой r_i , равной бесконечности. Остальные ребра назовем *конечными ребрами*. Разрежем молекулу по всем конечным ребрам. В результате молекула распадется на связные компоненты. Семьями мы называем те из них, которые не

содержат минимаксных атомов A , см. выше. Такие 3-атомы A диффеоморфны полноторию. Если все ребра молекулы конечны, то каждый ее седловой атом является, по определению, семьей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Молекула W , снабженная числовыми метками r_i, ε_i, n_k , называется меченой молекулой или инвариантом Фоменко-Цишанга.

Одним из основных результатов теории лиувиллевой классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. (Фоменко, Цишанг, см. [4, 70]). *Две интегрируемые системы (v, Q) и (v', Q') на изоэнергетических 3-поверхностях Q и Q' лиувиллево эквивалентны в том и только в том случае, когда их меченые молекулы W^* и $W^{*'}$ совпадают.*

При построении меченой молекулы W^* была использована ориентация многообразия Q , критических окружностей интеграла f и ребер молекулы. При изменении ориентаций меченая молекула будет, вообще говоря, меняться. Подробности см. в [4, 6]. При этом считаются совпадающими две меченые молекулы, полученные друг из друга заменой ориентаций на некоторых ребрах.

ТЕОРЕМА 5. *Теорема реализации (Болсинов, Фоменко см. [5]). Любая абстрактно заданная меченая молекула реализуется как меченая молекула некоторой гладкой интегрируемой гамильтоновой невырожденной системы.*

Таким образом, дискретный инвариант Фоменко-Цишанга классифицирует (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) все интегрируемые невырожденные системы с двумя степенями свободы на изоэнергетических 3-многообразиях.

В 1990 году А.Т.Фоменко сформулировал программу создания фундаментального Атласа Интегрируемых Систем, в котором, на основе вычисления меченых молекул, были бы лиувиллево классифицированы основные известные сегодня серии систем с двумя степенями свободы, обнаруженные в физике, механике, геометрии и топологии. Наряду с классификацией систем на изоэнергетических 3-поверхностях, большую важность для Атласа представляет классификация 4-мерных особенностей систем на фазовом многообразии M^4 (отметим здесь результаты Н.Т.Зунга [12] и А.А.Ошемкова [13])

В значительной степени эта программа реализована и продолжает выполняться в настоящее время в работах, например, следующих авторов: А.Т.Фоменко, А.В.Болсинов, А.А.Ошемков, Е.А.Кудрявцева, В.В.Ведюшкина (Фокичева), А.Ю.Коняев, В.А.Кибкало, Д.А.Федосеев, а также: Е.В.Аношкина, Е.И.Антонов, Г.В.Белозеров, А.В.Браилов, Ю.А.Браилов, В.Драгович, Х.Дуллин, В.Н.Завьялов, М.Ю.Ивочкин, Е.Е.Каргинова, А.И.Жила, В.В.Калашников (мл.), Е.О.Кантонистова, И.Ф.Кобцев, И.К.Козлов, Н.В.Коровина, Б.С.Кругликов, А.А.Кузнецова, Т.А.Лепский, П.В.Морозов, А.Ю.Москвин, В.А.Москвин, Нгуен Тьен Зунг, С.С.Николаенко, Д.В.Новиков, О.Е.Орел, Т.И.Погосян, Л.С.Полякова, С.Е.Пустовойтов, М.Раднович, П.Е.Рябов, Е.Н.Селиванова, В.И.Сидельников, А.И.Скворцов, Н.С.Славина, С.В.Соколов, К.И.Солодских, Ш.Такахаша, Д.С.Тимонина, П.Й.Топалов, М.А.Тужилин, Б.Г.Хагигатдуст, М.П.Харламов, И.С.Харчева, Х.Хоршиди, Н.А.Хотин.

Большой перечень публикаций на эту тему представлен в книгах А.Т.Фоменко [71], А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [6, 72], в статьях А.Т.Фоменко и В.В.Ведюшкиной [50, 73], А.Т.Фоменко и В.А.Кибкало [30, 61].

В результате, были обнаружены замечательные пары известных гамильтоновых систем, считавшихся ранее существенно различными, однако оказавшихся лиувиллево эквивалентными. То есть обнаружилось, что несмотря на разную природу таких систем, они обладают одинаковыми замыканиями почти всех интегральных траекторий, т.е. обладают одинаковыми слоениями Лиувилля. Например, задача Якоби (геодезический поток эллипсоида) неожиданно оказалась лиувиллево эквивалентной и даже непрерывно траекторно эквивалентной (но не гладко траекторно) волчку Эйлера из динамики твердого тела (теорема Болсинова-Фоменко, см. [6, 11]).

Разными авторами для многих систем вычислены инварианты Фоменко-Цишанга, и получена лиувиллева классификация систем. Приведем некоторые примеры, уже вошедшие в Атлас. Классические случаи интегрируемости в динамике тяжелого твердого тела, а именно, случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской [51, 74], Жуковского [74], Клебша [75], Стеклова и Соколова [76], Горячева-Чаплыгина-Сретенова [77], Лиувиллево классифицированы некоторые из этих систем при условии добавления гиростатов [77], а также некоторые неголономные аналоги (например, исследования А.И.Жила задачи “шар Чаплыгина с ротором на шероховатой плоскости”). Лиувиллево классифицированы линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на двумерных поверхностях (сфера, проективная плоскость, тор, бутылка Клейна), подробнее см. раздел 3.4. Лиувиллево классифицированы интегрируемые геодезические потоки на 2-поверхностях вращения при условии добавления потенциалов или магнитного поля [78–81]. Получена лиувиллева классификация многопараметрических аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли [82–87]. Также ведется изучение введенных в [88] псевдо-евклидовых аналогов систем механики, в частности, аналога системы Ковалевской [89].

§ 2. Интегрируемые бильярды

Под математическим бильярдом обычно понимается происходящее без потери скорости движение материальной точки по плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2(x, y)$, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \partial\Omega$ (стенку бильярда). Поскольку метрика евклидова, то ковектора можно отождествить с векторами — и далее будем для наглядности рассматривать $M^4 = T\Omega / \sim$ как фазовое пространство. Элементы $T\Omega$ являются парой точки $P = (x, y)$ и вектора $\vec{v} = (v_x, v_y) \in T_P\Omega$. Гамильтонианом (энергией) системы является $H = |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Необходимость отождествить “далекие” друг от друга пары точка-вектор из $T\Omega$ вызвана наличием отражения. Для выбранной точки $P \in \gamma = \partial\Omega$ отождествляются векторы \vec{v} и \vec{v}' , если их модули равны, а разность перпендикулярна касательной к γ в точке P . Это условие соответствует абсолютно упругому отражению с равенством углов падения и отражения. Если кривая γ не имеет

излома в P , и вектор \vec{v} трансверсален γ , то он будет отождествлен с единственным вектором \vec{v}' (касательный к γ вектор является предельным положением пары таких отождествляемых векторов).

Если точка P есть точка излома γ , то обыкновенно требуют равенства $\pi/2$ внутреннего угла. Если \vec{v} трансверсален обоим гладким дугам γ , то пара (P, \vec{v}) отождествляется с тремя другими парами точка-вектор, а если направлена по касательной к одной из них — то ровно с одной парой. Тем самым, для плоского бильярда в области Ω прообраз точки $P \in \Omega$ в неособом уровне энергии $Q_h^3 \subset M^4 : H = h$ относительно проекции $\pi : (P, \vec{v}) \rightarrow P$ гомеоморфен окружности для $P \in \text{Int } \Omega$ и отрезку для $P \in \gamma$. Попадание в точку излома с углом $\pi/2$ может пониматься как необходимость частицы отразиться дважды, по разу от каждой из граничных дуг.

С такими системами тесно связаны другие динамические системы с ударами и отражениями: например внешние бильярды [90, 91], теория зеркал в сложных областях [92], задачи о невидимости [94], упорядоченная бильярдная игра [93]. Отметим здесь недавнюю работу К. Fraczek and V. Rom-Kedar [95]. Вопрос об эргодичности бильярдных систем, о свойствах их траекторий зачастую вызывает большой интерес.

Имеются различные определения интегрируемости бильярда (см., например, [17]). Мы будем основываться на интегрируемости по Лиувиллю: требовать наличие первого интеграла, инволютивного и функционально независимого с энергией H . Всюду кроме прообраза границы фазовое пространство наследует гладкую и симплектическую структуру из кокасательного расслоения, т.е. инволютивность корректно определена. При отражении траектории от границы будем требовать непрерывности первого интеграла. Такое понятие “кусочно-гладкой” интегрируемости по Лиувиллю для бильярдных систем было предложено А.Т.Фоменко и описано в работе [26].

Простейшими примерами интегрируемых бильярдных служат бильярды внутри круга, прямоугольника и эллипса. В первом случае сохраняется радиус окружности, которой касается каждое звено ломаной-траектории, во втором — неориентированный угол между фиксированной прямой и прямыми, содержащими звенья траектории.

Дж. Биркгоф [22] рассмотрел бильярд внутри эллипса на плоскости как предельный случай задачи Якоби о движении вдоль геодезических на эллипсоиде $E^2 \subset R^3$ при стремлении к нулю меньшей полуоси. Омбилические точки эллипсоида при этом переходят в фокусы граничного эллипса. По теореме Якоби–Шаля касательные к фиксированной геодезической на E^2 касаются некоторого гиперboloида, софокусного с E^2 и одинакового для всех точек данной геодезической. Если этот гиперboloид однополостный, то звенья образа геодезической касаются эллипса, а если двуполостный — то гиперболы. Получаемые квадратики имеют те же фокусы, что и граничный эллипс и принадлежат семейству Oxy :

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda). \quad (2.1)$$

Здесь параметры $0 < b < a$ — квадраты полуосей граничного эллипса. Большая полуось эллипса лежит на оси Ox и содержит фокусы (будем иногда называть

Ox фокальной осью), а малая — она вертикальной оси Oy . Они входят в семейство (2.1) при $\lambda = b, \lambda = a$ соответственно.

Интегралом является значение λ : для каждого звена каустики является квадрика с этим параметром. Его явное выражение через x, y, v_x, v_y имеет вид

$$\Lambda = \frac{-(xv_y - yv_x)^2 + bv_x^2 + av_y^2}{v_x^2 + v_y^2}. \tag{2.2}$$

Пусть $\lambda = 0$, Тогда P лежит на граничном эллипсе, а вектор \vec{v} касается его. Если $\lambda = a$, то $P \in Oy \cap \Omega$, и вектор $\vec{v} \parallel Oy$. Этим уровням соответствует одномерный уровень $\Lambda = \lambda$ в Q_h^3 . Уровень $\lambda = b$ является двумерным. Звенья каждой траектории лежат на прямых, проходящих через один или другой фокус. Особые траектории на уровне $\Lambda = b$ состоят из пар (P, \vec{v}) : точка $P \in Ox \cap \Omega$ и $v \parallel Ox$.

Поскольку софокусные квадрики пересекаются под прямыми углами, то Λ сохраняется [56] при отражении траектории от каждой кривой семейства (2.1). При этом отсутствие внутренних углов $3\pi/2$ гарантирует непрерывность движения бильярда в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик.

Под *элементарным* (софокусным) бильярдом понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик семейства (2.1) и не содержит углов $3\pi/2$. Введенная В.В.Ведюшкиной в работе [27] эквивалентность таких столов (далее называем ее *структурной эквивалентностью*) сохраняет слоение и, опуская некоторые детали, определяется так. Два бильярда эквивалентны, если их области-стола переводятся друг в друга изометрией плоскости или же имеется непрерывная деформация параметров λ_i граничных дуг одного стола в параметры другого, сохраняющая тип каждой граничной дуги (эллиптический при $(-\infty, b)$, фокальный при $\lambda = b$ и гиперболический при $(b, a]$) и сохраняющая класс гомеоморфности стола Ω . Примеры элементарных бильярдов изображены на рис. 1, их обозначения согласованы с работой [27]. Вопрос о критерии интегрируемости бильи-

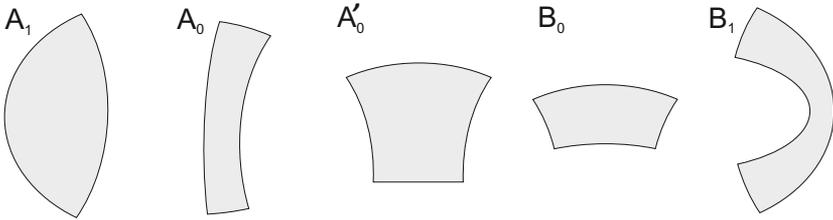


Рис. 1. Плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

ярда составляет различные формулировки гипотезы Биркгофа о бильярдах [21]: верно ли, что внутри гладкой кривой на плоскости бильярд интегрируем только если эта кривая — эллипс. Доказанные недавно А.А.Глуцкоком [17, 18] и В.Ю.Калошиным, А.Соррентино [96] показывают, что среди полиномиальной и локальной интегрируемости это так.

Иными словами, *софокусные бильярды*, т.е. бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик и не имеющие внутренних углов $3\pi/2$ в границе, а также круговые бильярды — вырождения софокусных бильярдов при стремлении фокусов квадрики к ее центру (они ограничены дугами концентрических окружностей и не должны иметь изломов границы с углами, отличными от $\pi/2$). Тем не менее, В.В.Ведюшкиной удалось принципиально расширить этот класс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. *Обобщенным (топологическим) бильярдом* назовем динамическую систему на двумерном ориентированном компактном многообразии, склеенном (посредством изометрий) из элементарных софокусных бильярдов-листов.

- изометричная склейка двух бильярдов-листов по ребру означает склейку максимальной по включению гладкой дуги границы каждого из столов (т.е. либо эллипс, либо дуга от одного излома до другого),
- в каждой вершине склейки стола-комплекса сходится либо один, либо два, либо четыре угла плоских бильярдов-листов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для топологического бильярда определена проекция на плоскость, являющаяся изометрией и гомеоморфизмом в ограничении на замыкание каждого плоского листа.

Движение по топологическому бильярду определяется так: внутри плоского бильярда-листа движение происходит стандартно, т.е. вдоль прямолинейных отрезков, с естественным отражением от границы. Как только материальная точка попадает на ребро склейки, то после отражения она продолжает движение по другому бильярду-листу.

Введение топологических бильярдов существенно расширило класс изучаемых бильярдов. В работах [27, 29] они были классифицированы как структурно, так и топологически: для всех них были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга.

Существенно более широким расширением оказалось введение В.В.Ведюшкиной класса бильярдных книжек [28, 32]. Эти столы являются *СW*-комплексами, ребра которых (1-клетки) оснащены перестановками на множестве инцидентных 2-клеток, см. подробнее [28].

Рассмотрим двумерный *СW*-комплекс, двумерными клетками которого являются плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Одномерными клетками комплекса являются сегменты границ элементарных бильярдов — участки между изломами граничных кривых. Занумеруем все двумерные клетки и припишем каждому одномерному ребру комплекса — “корешку” книжки — циклическую перестановку из номеров листов, примыкающих к данному ребру. Изометрично спроектируем все бильярды-листы на плоскость. Если образ нескольких ребер *СW*-комплекса при этой проекции является одной и той же дугой плоскости, то объединим приписанные им циклы в одну перестановку (эти циклы, очевидно, независимы). Для непрерывности движения частицы по книжке потребуем коммутирование перестановок в нульмерных клетках. В терминах проекции это означает, что перестановки, приписанные дугам двух квадрик в окрестности точки пересечения последних, коммутируют (см. рис. 2). Этот двумерный комплекс с приписанными перестановками назовем *бильярдной книжкой*.

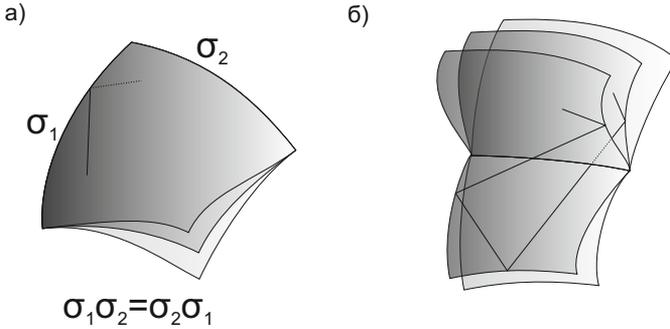


Рис. 2. Локальная структура окрестности вершины склейки бильярдной книжки.

Бильярдное движение по книжке определено следующим образом. Внутри двумерных клеток движение не меняется. Пусть при движении по листу с номером i материальная точка попадает на корешок книжки, тогда после удара она продолжит своё движение по листу $\sigma(i)$. Если листы с номерами i и $\sigma(i)$ расположены по одну сторону от корешка, то при ударе происходит отражение, а если по разные — то точка не отражается, а проходит корешок “насквозь” (см. рис. 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие коммутирования перестановок в углах книжки является необходимым и достаточным условием для того чтобы продолжение траектории, попавшей в вершину угла, было корректно определено. Обозначим через l_1 и l_2 дуги квадрик, которые имеют общую точку O и обозначим через σ_1 и σ_2 приписанные им коммутирующие перестановки. Траектория попавшая в O с одной стороны является пределом близких траекторий, которые сначала ударяются о корешок l_1 , а потом о корешок l_2 . Такие траектории меняют номер бильярда по перестановке $\sigma_2 \circ \sigma_1$. С другой стороны, попавшая в вершину угла O траектория является пределом траекторий, которые ударяются о корешки в другом порядке и меняет лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Получается, что материальная точка при попадании в вершину угла поменяет лист по перестановке $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ вследствие коммутирования σ_1 и σ_2 .

Полученный класс весьма велик и в настоящее время не получена полная классификация бильярдных систем из этого класса. Задача сводится к описанию наборов перестановок, обладающих определенными свойствами. Ряд продвижений получено В.В.Ведошкиной и В.А.Кибкало в недавней статье [44]. В этой работе изучаются бильярдные книжки малой сложности, а именно, такие, что количество образов корешков дуг книжки в проекции на плоскость равно двум. Описаны всевозможные пары коммутирующих перестановок. Для некоторых бильярдных книжек вычислены инварианты Фоменко–Ципанга возникающих слоений Лиувилля.

Еще один подход к классификации книжек был предложен в недавней работе В.А.Кибкало и А.Т.Фоменко [30]. Для книжки вводится операция перегибания

по некоторой квадратике, и ее применение позволяет (неоднозначным образом) уменьшить количество квадратик с разными параметрами λ_i , на которые проецируются 1-клетки стола. В результате получено 9 множеств книжек, каждое из которых определяется фиксированным количеством перестановок и их условий коммутирования, т.е. допускает решение перебором. Отметим, что одна и та же книжка может быть приведена к разным видам.

Для построенных выше билиардных систем топологических билиардов и билиардных книжек верен следующий факт. Фазовое кусочно-гладкое многообразие M^4 является кусочно-симплектическим, согласно теореме И.С.Харчевой [38]. Система билиардной книжки кусочно-гамильтонова и интегрируема, так как имеется дополнительный интеграл — параметр софокусных квадратик 2.2, выражаемый через координаты (x, y, v_x, v_y) точки и вектора плоскости Oxy — проекций пары точка-вектор со стола-комплекса.

Как в случае плоских билиардов, рассмотрим уровень постоянной энергии $Q_h^3 \subset M^4 : H = v_x^2 + v_y^2 = 1$. Согласно теореме И.С.Харчевой [38], такой Q^3 будет трехмерным кусочно-гладким многообразием для любой книжки.

На Q_h^3 имеется слоение на поверхности уровня интеграла Λ , вообще говоря кусочно-гладкое. Для многих систем было непосредственно проверено, что слоение содержит конечное число особых слоев, и их окрестности послойно гомеоморфны 3-атомам Фоменко, а все неособые слои являются, как и в гладком случае, двумерными торами (кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля), причем почти все они являются замыканиями фазовых траекторий.

Отметим что динамическая система билиарда на столе-книжке (не являющимся двумерным кусочно-гладким многообразием, т.е. топологическим билиардом) необратима при обращении направления времени, если проходит через 1-клетку с циклом длины 3 и более. Дело в том, что для таких ребер не выполняется $j = \sigma(i) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma^2(j)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В геометрии известны и другие примеры необратимых систем. Таким образом, в билиардных книжках интересным образом сочетаются два свойства: интегрируемость и необратимость. При замене времени на обратное время, траектория перескакивает с одного тора Лиувилля на другой тор Лиувилля, но обязательно лежащий на том же уровне интеграла, что и исходный тор. Здесь возможна следующая аналогия: похожая картина была обнаружена А.В.Болсиновым и И.А.Таймановым — когда система одновременно интегрируема и хаотична (неинтегрируема) на отдельных поверхностях уровня (см. [97–99]), с положительной топологической энтропией.

2.1. Гипотеза А.Т.Фоменко о билиардах.. Введение билиардных книжек позволило не только существенно расширить класс интегрируемых билиардных систем, но и обнаружить новые слоения Лиувилля (пусть и кусочно-гладкие). Эти слоения Лиувилля (закодированные инвариантами Фоменко–Цишанга), с одной стороны, ранее не встречались в классических задачах динамики, а с другой стороны, билиардные системы, им соответствующие имеют наглядное описание. В связи с этим А.Т.Фоменко сформулировал [31] программную гипотезу о реализуемости интегрируемыми билиардами произвольных слоений Лиувилля (т.е. меченых молекул) невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы (в классе лиувиллевой эквивалентности).

Отметим здесь, что на интегрируемые системы, слоения Лиувилля которых предполагается моделировать, наложен ряд ограничений. Во-первых, это невырожденность, т.е. рассматриваются интегрируемые системы только на тех изоэнергетических 3-поверхностях $H = const$, на которых функция Гамильтона H невырождена, т.е. $dH \neq 0$ на всей поверхности Q^3 . Далее, предполагается, что дополнительный интеграл f является функцией Ботта на Q^3 . В третьих, рассматриваемые системы нерезонансны, т.е. обмотка торов Лиувилля нерезонансна и всюду плотна для почти всех значений f и H .

В классе слоений Лиувилля интегрируемых бильярдов реализуются

- A** *любые бифуркации двумерных торов Лиувилля (иначе говоря, 3-атомы);*
- B** *любые грубые молекулы – инварианты Фоменко;*
- C** *любые меченые молекулы – инварианты Фоменко-Цишанга;*
- D** *любые изоэнергетические 3-многообразия (класс граф-многообразий, т.е. многообразий Вальдхаузена).*
- E** *Функции вращения на торах Лиувилля бильярдов монотонны.*

Дополнением к ней служит “локальная” версия гипотезы, сформулированная в [33]. Последняя предполагает реализуемость произвольных выбранных значений числовой метки или меченой окрестности элемента (ребра, вершины, подграфа-семьи) в графе-инварианта Фоменко–Цишанга. Гипотеза *E* тесно связана с вопросом построения аналогов траекторных инвариантов Фоменко–Болсинова для бильярдов. Ряд конкретных примеров был изучен В.В.Ведюшкиной [100].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Гипотезы *A, B, D* и локальная версия являются необходимыми условиями для основной гипотезы *C*: локальная гипотеза и гипотеза *A* утверждают реализуемость всех элементов инварианта, гипотезы *B, D* – совпадение класса интегрируемых бильярдов и класса интегрируемых систем относительно более слабых чем послойная гомеоморфность (лиувиллева эквивалентность отношений: гомеоморфность баз и локальных поднятий и гомеоморфность Q^3 без учета слоений). Гипотезы *B* и *D* друг из друга не следуют.

Гипотеза *A* была полностью доказана В.В.Ведюшкиной совместно с И.С.Харчевой [28]. Рассмотрим плоскую область A'_0 , ограниченную дугой эллипса, дугой гиперболы и отрезками двух осей Ox, Oy , см. рис. 1. Напомним, оси Ox, Oy тоже входят в софокусное семейство 2.1 при $\lambda = a, \lambda = b$.

ТЕОРЕМА 6. В.В.Ведюшкина, И.С.Харчева

*Для любого ориентируемого седлового 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится бильiardная книжка Ω , склеенная из нескольких экземпляров бильiardов A'_0 , см. рис. 1, такая что слоение Лиувилля в прообразе $\Lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset Q^3$ окрестности особого значения интеграла $\Lambda = b$ послойно гомеоморфно данному атому. Для атома *A* аналогично для $\Omega = A'_0$ и значения $\lambda = 0$.*

Построенные бильiardы моделируют ориентируемые боттовские 3-атомы. Отсюда перестановка, приписанная отрезку оси Ox , есть произведение независимых транспозиций. Если какой-то из независимых циклов имеет длину 3 или больше, то полученный при $\Lambda = b$ особый слой принадлежит неботтовскому 3-атому, пример на рис. 3.

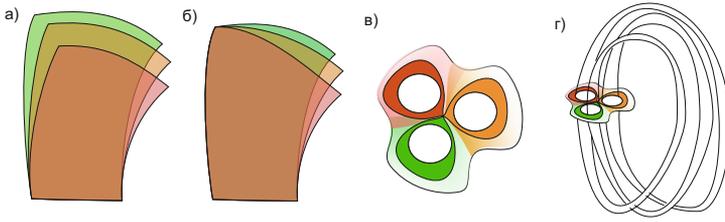


Рис. 3. а, б) Биллиардные книжки, склеенные из трех листов A'_0 с циклической перестановкой $(1, 2, 3)$ на фокальном сегменте; в) база неботтовского 3-атома в прообразе $\Lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ как расслоения Зейферта. Для книжки а) 3-атом есть прямое произведение базы на окружность S^1 , для книжки б) 3-атом имеет один особый слой типа $(3,1)$, см. г).

Сформулируем усиление доказанной гипотезы A на случай неботтовских 3-атомов, получим гипотезу \tilde{A} .

Гипотеза \tilde{A} . В классе слоений Лиувилля интегрируемых биллиардов реализуются не только боттовские бифуркации торов Лиувилля, но и достаточно богатые классы бифуркаций торов Лиувилля, описываемых “неботтовскими” 3-атомами, включая мультиседловые особенности ранга 1.

Например, очень интересны бифуркации торов, описываемые расслоением Зейферта, база которых уже не обязана быть морсовским 2-атомом. В этом случае расслоение Зейферта может иметь произвольные особые слои типа (p, q) . Первые шаги в реализации таких неботтовских бифуркаций интегрируемыми биллиардами сделаны А.Кузнецовой. Она классифицировала бифуркации торов Лиувилля, которые возникают в слоении Лиувилля биллиардных книжек, склеенных из трех листов вида A'_0 . В частности, биллиардами реализованы неботтовские 3-атомы соответствующие неморсовским 2-атомам с одной вершиной (см. пример неморсовского 2-атома кратности 3 на рис. 3б)).

Справедливость гипотезы В была также доказана [36]. В доказательстве этой гипотезы были использованы биллиарды B_0 , которые не имеют общих точек с фокальной прямой и ограничены двумя дугами эллипсов и двумя дугами гипербол. При этом одна из дуг гипербол, ограничивающих область биллиарда, является выпуклой по отношению к ней (см. рис. 1).

ТЕОРЕМА 7. В.В.Ведюшкина, И.С.Харчева

Гипотеза В Фоменко верна, т.е. для любой грубой молекулы (инварианта Фоменко, графа с типами атомов-бифуркаций в вершинах) алгоритмически построена биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов B_0 , такая, что инвариант Фоменко ее слоения совпадает с данным.

Иначе говоря, всё множество классов грубой лиувиллевой эквивалентности реализуется биллиардами.

Для гипотезы С было найдено препятствие для реализации гамильтоновых систем биллиардными книжками (и, разумеется, их подклассами).

ТЕОРЕМА 8. Слоение Лиувилля на $S^1 \times S^2$, имеющее инвариант Фоменко–Цишанга $A - A$ с метками $r = \infty$, $\varepsilon = -1$, т.е. отвечающее модифицированному

(“скрученному”) волчку Лагранжа [101], не реализуется как слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности произвольной интегрируемой софокусной бильярдной книжки.

Добавление внешних сил к системе бильярда на столе-комплексе X (например, магнитного поля, индукция которого перпендикулярно каждому листу и постоянна по времени и точкам из X) дополнительно расширяет класс реализуемых слоений. В новом классе магнитных бильярдных систем, подробнее о них в пункте 4.4, реализуется указанный в теореме выше инвариант.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Слоение Лиувилля “скрученного” волчка Лагранжа в неособой зоне энергии с $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$ и молекулой $A-A$ с метками $r = \infty$, $\varepsilon = -1$, реализуется в слоении Лиувилля изоинтегральной поверхности $R = \text{const} < r_0$ магнитного бильярда в кольце между двумя концентрическими окружностями.*

Так как вопрос справедливости гипотезы С в полном объеме по-видимому, достаточно сложен, А.Т. Фоменко выделил локальную версию этой гипотезы, состоящую из шести пунктов [33].

Локальная гипотеза С (реализация числовых инвариантов интегрируемых систем).

1. Пусть γ — произвольное ребро с метками r, ε некоторой меченой молекулы W^* . Тогда существует интегрируемый бильярд, реализующий такую комбинацию чисел r, ε на одном из ребер своей меченой молекулы.

Отметим, что имеются следующие четыре варианта: метка $r = p/q$ конечна и $\varepsilon = \pm 1$; метка $r = \infty$ и $\varepsilon = \pm 1$.

2 (усиление п. 1). В условиях п. 1 существует подходящий бильярд, реализующий произвольную пару меток r и ε на ребре между любыми, наперед заданными атомами.

3. Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле W^* интегрируемой системы. Тогда существует интегрируемый бильярд, реализующий некоторую семью с точно такой же целочисленной меткой n .

4 (усиление п. 3). В условиях п. 2 существует подходящий бильярд, реализующий не только данную метку n , но и саму семью, т.е. граф с нужными атомами и нужным набором ребер.

5 (реализация меченой окрестности любой семьи). Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле, причем внешние ребра γ_i семьи оснащены произвольными метками r_i, ε_i . Тогда существует подходящий бильярд, реализующий такой меченый подграф в своей меченой молекуле.

6 (реализация меченой окрестности ребра). Пусть S_1 и S_2 — две семьи с целочисленными метками n_1 и n_2 в некоторой меченой молекуле, причем их выбранные граничные торы соединены ребром, оснащенным произвольной парой меток (r, ε) . Тогда существует подходящий бильярд, реализующий такой меченый подграф в своей меченой молекуле.

ТЕОРЕМА 9 В.В.ВЕДЮШКИНА [34]. *Гипотеза Фоменко C_1 для любой пары числовых инвариантов r, ε верна, а именно, для любого ребра меченой молекулы W^* с такой парой меток существует бильярд, меченая молекула которого содержит ребро с этой же парой меток.*

ТЕОРЕМА 10 В.В.ВЕДЮШКИНА [34]. *Гипотеза Фоменко C_2 верна для случаев, указанных в таблице 2.1. Более точно, в семи случаях подходящими бильярдами удастся реализовать все пары r, ε числовых меток для ребер, на концах которых находятся любые наперед заданные атомы. В четырех оставшихся случаях удалось пока реализовать любые комбинации меток для ребер, соединяющих лишь конкретные атомы из серий B и C .*

Метки	$A - A$	$A - V$	$V_1 - V_2$
$r = p/q, \varepsilon = 1$	+	V без звездочек	$V_1 = C_k, V_2 = C_n$
$r = p/q, \varepsilon = -1$	+	?	$V_1 = C_k, V_2 = C_n$
$r = \infty, \varepsilon = 1$	+	Алгоритм Ведюшкиной-Харчевой	Алгоритм Ведюшкиной-Харчевой для грубых молекул
$r = \infty, \varepsilon = -1$	+	+	$V_1 = V_2 = B_n$

Таблица 1. Комбинации меток r и ε на ребрах меченых молекул интегрируемых бильярдов

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При изменении ориентации изоэнергетической поверхности Q^3 меняются допустимые системы координат. В результате метки, стоящие на ребрах, изменятся по описанным ниже правилам (см. [6]):

1. ребро соединяет атомы одного типа, т.е. либо A с A , либо седло с седлом. Здесь в случае конечного ребра, т.е. когда $\beta \neq 0$, метки r и ε меняют знаки. В случае же бесконечного ребра, т.е. когда $\beta = 0$, метки r и ε не меняются.
2. ребро соединяет атомы разных типов, т.е. атом A с седлом. Здесь в случае конечного ребра метка r меняет знак, а метка ε не меняется. В случае бесконечного ребра наоборот: метка r не меняется (равна бесконечности), а метка ε меняет знак.

Примеры бильярдных книжек, реализующих различные случаи пар меток (r, ε) в инвариантах Фоменко–Цишанга интегрируемых бильярдов изображены на рис. 4.

В таблице является новым случай ребра, соединяющего седловой атом и атом A . Приведем здесь алгоритмическое построение искомой книжки. Обозначим через V седловой атом без звездочек. Рассмотрим бильярдную книжку B_V , реализующую его по алгоритму В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой. Фиксируем в этой книжке выпуклый эллиптический корешок s_e , которому приписана перестановка длины l . Фиксируем два натуральных числа n и k ($k < n$). Рассмотрим n экземпляров книжки B_V и склеим их в одну новую книжку B , добавив следующие склейки вдоль выпуклых эллиптических и гиперболических корешков. Каждый экземпляр книжки B_V занумеруем и назовем для удобства “главой”.

Во-первых, склеим все главы B_V вдоль выпуклых гиперболических корешков друг с другом. Оснастим новый корешок циклической перестановкой σ длины n , переставляющей местами номера глав (но не меняющей номер листа в одной главе). Во-вторых, склеим все корешки s_e друг с другом и заменим

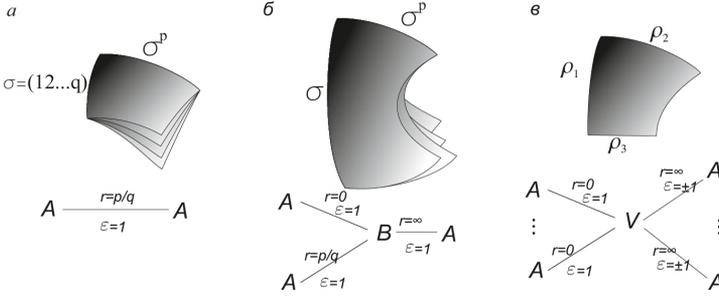


Рис. 4. Случай реализации комбинаций меток $A \frac{r = p/q}{\epsilon = \pm 1} A(a)$, $A \frac{r = p/q}{\epsilon = +1} B(b)$ и $V \frac{r = \infty}{\epsilon = \pm 1} A(v)$ в молекулах Фоменко–Цишанга интегрируемых бильярдов

циклические перестановки длины l на них на следующую перестановку длины ln . После прохождения по всем листам цикла длины l бильярдная частица переходит вновь на первый лист цикла, но при этом меняет номер главы по перестановке σ^k . Данные склейки не меняют вид атома и молекулы в целом. Но на нижнем ребре, соединяющем атом V и атом A , соответствующий корешку s_e , оказывается возникает r метка равная $\frac{k}{n}$.

Используя данную конструкцию, можно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В.В.Ведюшкина

Пусть V произвольный седловой атом без звездочек. Фиксируем у него торы, расположенные ниже критического уровня. Фиксируем на соответствующих им ребрах произвольные метки $r = \frac{t_i}{n_i}$. Тогда алгоритмически строится интегрируемый бильярд, склеенный из бильярдов A'_0 , реализующий данный атом с фиксированными r метками на нижних ребрах. Аналогичная конструкция позволяет сделать произвольные метки для торов, расположенных выше критического уровня, если взять вместо A'_0 бильярд B'_1 .

Подробное доказательство будет приведено в отдельной работе. Теперь перейдем к вопросу реализуемости целочисленной метки n , сопоставляемой некоторым подграфам инварианта, называемым семьями.

ТЕОРЕМА 11 В.В.ВЕДЮШКИНА, В.А.КИБКАЛО.[35].

Пункт 3 локальной гипотезы А.Т.Фоменко верен, а именно, для каждого $k \in \mathbb{Z}$ алгоритмически построен бильярд Ω_k , слоение Лувилля которого на неособой изоэнергетической поверхности содержит некоторую семью с заданной меткой $n = k$.

Напомним, что элементарная область, ограниченная эллипсом семейства (1), в работах [27] обозначена A_2 (см. рис. 1). Ее разрезание по одной из дуг гиперболы семейства (1) образует две элементарные области типа A_1 , а по обеим ее дугам — область типа A_0 и две симметричные области типа A_1 . Области A_i содержат отрезок фокальной оси и i фокусов семейства (1).

Описание построения столов Ω_k . Возьмем n экземпляров S_1, \dots, S_n стола типа A_2 , ограниченного эллипсом $\lambda = 0$ семейства (1). Разрежем стол S_1 по ветвям гиперболы $\lambda = \lambda_1$, стол S_n (при $n > 1$) по ветвям гиперболы $\lambda = \lambda_{n-1}$, а остальные столы $S_i, 2 \leq i \leq n-1$, (если $n > 2$) — по ветвям двух гипербол $\lambda = \lambda_{i-1}$ и $\lambda = \lambda_i$. Здесь $b < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < a$. Обозначения полученных областей приведем в таблице 1. Отметим, что стол S_i разрезан или на набор листов $(a_i, x_i, b_i, y_i, c_i)$, или на набор (a_i, b_i, c_i) .

область	тип	уровень	граница	Oxy
a_i	A_1	$S_i, 1 \leq i \leq n$	λ_1 : при $i = 1$; λ_{i-1} : при $2 \leq i \leq n$.	$x < 0$
x_i	A_0	$S_i, 2 \leq i \leq n-1$	λ_{i-1} и λ_i : при $2 \leq i \leq n-1$.	$x < 0$
b_i	A_0	$S_i, 1 \leq i \leq n$	λ_1 : при $i = 1$; λ_{i-1} : при $2 \leq i \leq n$.	$Oy \subset b_i$
y_i	A_0	$S_i, 2 \leq i \leq n-1$	λ_{i-1} и λ_i : при $2 \leq i \leq n-1$.	$x > 0$
c_i	A_1	$S_i, 1 \leq i \leq n$	λ_1 : при $i = 1$; λ_{i-1} : при $2 \leq i \leq n$.	$x > 0$

Таблица 2. Обозначения листов бильярдных столов

Бильярдный стол Ω_k построим из описанных выше листов путем их склейки по отрицательным и положительным (т.е. лежащим в полуплоскостях $x < 0$ и $x > 0$) ветвям граничных гипербол с перестановками σ_i и ρ_i соответственно. В таблице 5 записаны эти перестановки, а на рисунке 1 изображен стол Ω_3 .

гипербола	ρ_i	σ_i
$i = 1$	(b_1, c_1, y_2, c_2)	(a_2, x_2, a_1, b_1)
$2 \leq i \leq n-1$	$(b_i, y_i, y_{i+1}, c_{i+1})$	$(a_{i+1}, x_{i+1}, x_i, b_i)$
$i = n-1$	$(b_{n-1}, y_{n-1}, b_n, c_n)$	$(a_n, b_n, x_{n-1}, b_{n-1})$

Таблица 3. Перестановки на корешках склейки столов Ω_k

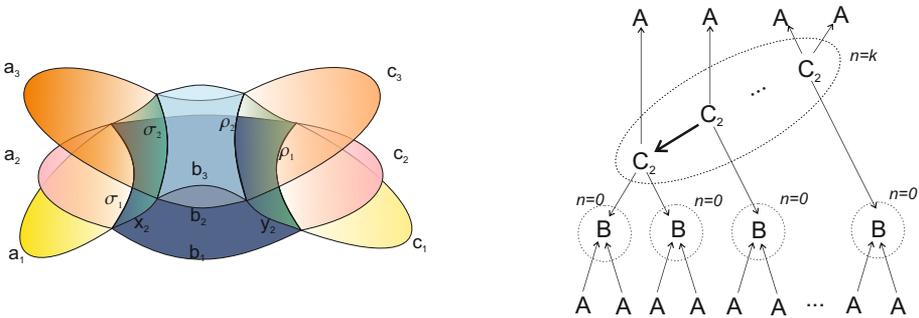


Рис. 5. Бильярдный стол-книжка, реализующая значение метки $n = 3$ (слева), инвариант Фоменко–Цишанга ее слоения Лиувилля (справа) Ω_k

Оказывается, верен и более общий результат, позволяющий получить достаточно существенное продвижение в доказательстве пункта 4.

ТЕОРЕМА 12 В.В.ВЕДЮШКИНА[44]. Пусть W — произвольная грубая молекула, в вершинах которой находятся атомы без звездочек, а из висячих вершин удалены атомы A . Пусть на ребрах графа между седловыми атомами стоят метки $r = \infty, \varepsilon = 1$.

Тогда алгоритмически строится билиардная книжка $\mathbb{W}(W, t)$, склеенная из билиардов A_0 и A_1 , меченая молекула которой имеет следующий вид. К каждому свободному нижнему ребру графа W приписывается атом B и два исходящих из него ребра, оканчивающихся атомами A . К каждому свободному верхнему ребру графа W приписывается атом A . На всех ребрах, кроме ребер между седловыми атомами стоят метки $r = 0, \varepsilon = 1$. Семье, которую образует граф W , отвечает метка $n = t$, все остальные семьи имеют метку $n = 0$.

Один из примеров такой книжки изображен на рисунке 6. Молекула W состоит из одного атома B . Для того чтобы получить произвольную молекулу указанного в теореме 12 вида необходимо вместо листа b_2 вклеить объединение нескольких билиардов A_0 , склеенных вдоль гиперболических дуг, по перестановкам, которые ставились на эллиптических дугах билиардов B_0 в алгоритме Ведюшкиной-Харчевой для грубых молекул.

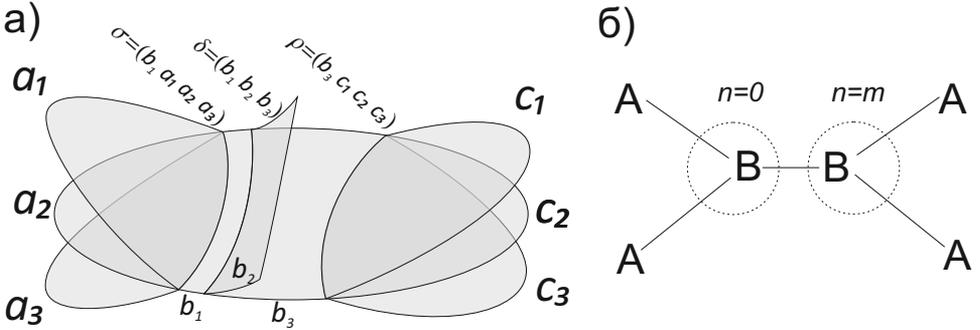


Рис. 6. На рисунке а) представлен пример билиардной книжки $\mathbb{W}(W, t)$ где $t = 3$, а молекула W состоит из одного атома B . В молекуле на рисунке б) все метки на ребрах $r = 0, \varepsilon = 1$.

В настоящее время удалось совместить результаты, полученные при реализации пунктов 1 и 3. Полученный набор примеров весьма интересен в контексте наиболее общих пунктов 5 и 6 локальной гипотезы, посвященных реализации меченых окрестностей семьи и ребра: в полученных инвариантах есть пара ребер и соединяющее их ребро, такое что

- семья и ее внешнее ребро оснащены произвольной меткой $n = -k$ и рациональной меткой r с произвольным знаменателем t соответственно (пункт 5);
- одна и та же семья имеет на внешних ребрах разные и “нетривиальные” значения рациональной метки: $r = 2/t$ и $r = -1/t$ (пункт 5);
- две семьи с ненулевыми метками $n = -2$ и $n = -k$ соединены ребром с нетривиальной r -меткой, равной $-1/t$ (пункт 6);

- две семьи одного и того же инварианта имеют разные наборы меток r на своих внешних ребрах: метка $r = -2/m$ на ребре между ними, и метки $r = 1/m$ на внешних ребрах одной из них и $r = 0$ на внешних ребрах другой (комбинация нескольких “локальных” слоений в одном “глобальном”).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим бильярдную книжку, склеенную из t дисков, ограниченных фиксированным эллипсом (при этом натуральное $t > 2$). На единственном корешке стоит циклическая перестановка из t элементов. Тогда инвариант Фоменко–Цишанга, описывающий слоение Лувилля изоэнергетической поверхности такой книжки в случае нечётного t изображен на рисунке 7а), а в случае нечётного – 7б)*

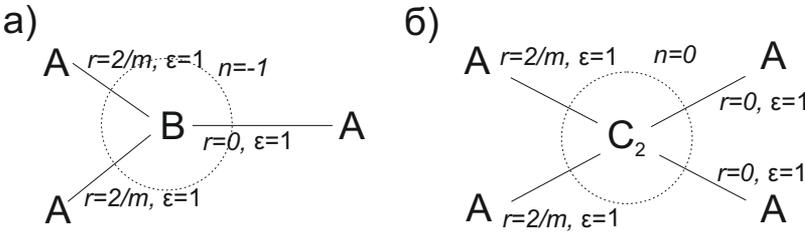


Рис. 7. Инварианты Фоменко–Цишанга, описывающие слоение Лувилля изоэнергетической поверхности бильярдной книжки $\mathbb{B}(A_2)_m = tA_2$, склеенной из t дисков, ограниченных фиксированным эллипсом.

ТЕОРЕМА 13. *Рассмотрим бильярдную книжку, склеенную из нечетного числа t экземпляров стола Ω_k вдоль эллиптических грани. Её инвариант Фоменко–Цишанга изображен на рисунке 8. Он содержит комбинации меток, реализующие серии примеров к пунктам 5 и 6 локальной гипотезы Фоменко.*

Пункт D гипотезы А.Т.Фоменко пока не доказан. Отметим, что для классических случаев интегрируемости в динамике твердого тела в настоящее время согласно теореме С.Смейла в качестве поверхности постоянной энергии выступает несвязная сумма многообразий одного из следующих типов. Это либо трёхмерная сфера S^3 , либо проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ либо связная сумма конечного числа прямых произведений $S^1 \times S^2$. При изучении геодезических потоков на двумерных поверхностях в качестве изоэнергетической поверхности также возникают следующий многообразия: трехмерный тор, линзовое пространство $L(4, 1)$. Все перечисленные 3-многообразия встречаются в бильярдных системах. Более того, оказывается верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14 В.В.ВЕДЮШКИНА[42]. *Рассмотрим многообразие M , являющееся связной суммой линзовых пространств $L(n_1, k_1), \dots, L(n_m, k_m)$ и l прямых произведений $S^1 \times S^2$. Тогда алгоритмически строится бильярдная книжка, изоэнергетическая поверхность которой гомеоморфна многообразию M .*

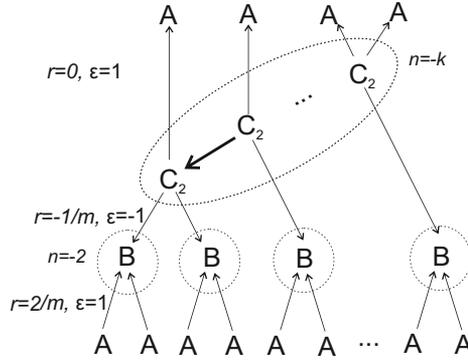


Рис. 8. Инвариант Фоменко–Цишанга книжки, склеенной из m экземпляров (m нечетно) стола Ω_k вдоль эллиптических границ Метки (r, ε) равны $(\infty, 1)$ на выделенных ребрах.

Приведём схематичное описание искомой бильярдной книжки (не обязательно интегрируемой).

Рассмотрим целые числа $N = \text{НОК}(n_1 \dots n_m)$ и $g_i = \frac{Nk_i}{n_i}$. Фиксируем односвязную бильярдную область Ω , граница которой является четырехугольником $ABCD$. Для получения интегрируемого бильярда в качестве четырехугольной области можно взять, к примеру, область бильярда A_0 , ограниченную эллипсом и двумя дугами гиперболы.

Искомая книжка склеивается из $N(m + 2l)$ экземпляров области Ω . На сегментах ставятся следующие перестановки.

- На сегменте AB перестановка состоит из произведения циклов двух типов: циклов

$$(N(i - 1) + 1, \quad N(i - 1) + 2, \quad \dots \quad Ni)^{g_i}, \quad i \in \{1..m\}$$

и транспозиций

$$(N(m + 2p) + j, \quad N(m + 2p + 1) + j), \quad p \in \{0, l - 1\}, \quad j \in \{1..N\}.$$

- На сегменте BC перестановка тождественная.
- На сегменте CD перестановка состоит из циклов

$$(i, \quad N + i, \quad \dots \quad N(m + 2l - 1) + i) \quad i \in \{1..N\}.$$

- На сегменте AD перестановка разбивается в следующий циклы:

$$(1, 2, \dots N)(N + 1, N + 2, \dots 2N) \dots (N(m + 2l - 1) + 1, \dots N(m + 2l)).$$

В общем случае многообразия, которые гомеоморфны связной сумме линзовых пространств и прямых произведений не являются многообразиями Зейферта. А именно, верен следующий факт.

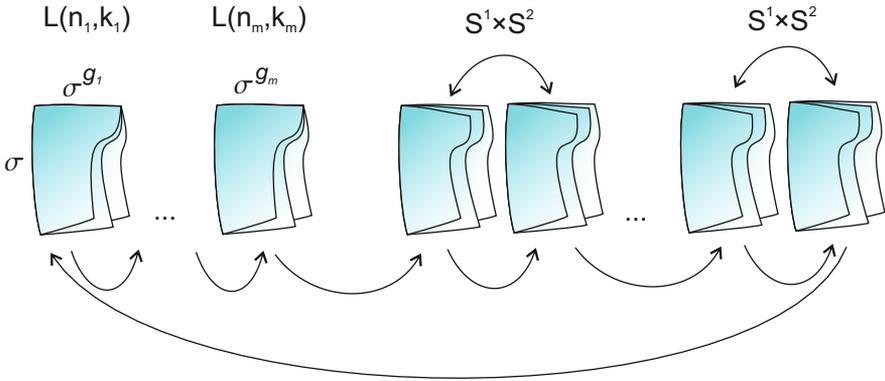


Рис. 9. Схематичное описание конструкции (не обязательно интегрируемого) билиарда изоэнергетическая поверхность которого представляет из себя связную сумму произвольных линз и $S^1 \times S^2$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть трехмерное многообразие Q^3 является связной суммой линзовых пространств (проективное пространство RP^3 мы считаем линзой $L(2, 1)$) и прямых произведений $S^1 \times S^2$. Причем количество слагаемых в этой прямой сумме не меньше двух и более того, Q^3 не гомеоморфно связной сумме двух RP^3 . Тогда многообразие Q^3 не является многообразием Зейферта.

Отсюда класс изоэнергетических поверхностей интегрируемых билиардных книжек не покрывается классом многообразий Зейферта. В то же время этот класс содержит примеры весьма нетривиальных многообразий Зейферта. Рассмотрим, к примеру, треугольный билиард, ограниченный дугой эллипса, дугой гиперболы и фокальной прямой. Склеим два экземпляра такого билиарда вдоль всех границ. Изоэнергетическая поверхность такого билиарда есть сферическое многообразие Зейферта с тремя особыми слоями типа $(2, 1)$, которые соответствуют углам треугольного билиарда.

2.2. Билиарды лиувиллево эквиваленты классическим интегрируемым случаям. Вычисление инвариантов Фоменко-Ципанга топологических билиардов и билиардных книжек позволило обнаружить их совпадение в большом числе случаев с инвариантами, вычисленными ранее в случаях интегрируемости в динамике твердого тела (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова). Это позволило доказать лиувиллеву эквивалентность случаев интегрируемости в динамике твердого тела интегрируемым билиардным книжкам. В работах [45, 73] приведён список ранее обнаруженных лиувиллево эквивалентных слоений и указаны области на бифуркационных диаграммах случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, соответствующие этим изоэнергетическим 3-поверхностям. Для каждого инварианта указан билиард, моделирующий поведение замыканий решений на данных изоэнергетических поверхностях. Приведем подробно здесь случаи полной

реализации (системы Эйлера и Лагранжа) и частичной (случай Жуковского) интегрируемых гамильтоновых систем динамики твердого тела интегрируемыми бильярдами.

Напомним, что система движения твердого тела, шарнирно закрепленного в неподвижной точке, задается на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$ группы движения евклидова пространства \mathbb{R}^{\neq} , т.е. шестимерном пространстве $\mathbb{R}^6(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3)$ со следующей скобкой Пуассона, где $\varkappa = 0$ и ε_{ijk} есть знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} S_k.$$

Отметим, что случай $\varkappa \neq 0$ соответствует аналогам систем механики на других алгебрах Ли $so(3, 1)$ и $so(4)$. Такие системы тоже активно изучались с точки зрения их слоений Лиувилля, см. [82–85, 87, 102, 103] f Двумя интегралами системы будут функции Казимира — геометрический интеграл $f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$ и интеграл площадей $f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3$. Без ограничения общности примем $f_1 = 1$. Тогда слоение Лиувилля на симплектическом листе $M_g^4 : f_1 = 1, f_2 = g$ может нетривиально зависеть от g .

Случай Эйлера (1750) описывает систему динамики тяжелого твердого тела, закрепленного шарниром в своем центре масс. Его энергия H и интеграл F имеют следующий вид для главных моментов инерции $0 < A_1 < A_2 < A_3$:

$$H = \frac{S_1^2}{2A_1} + \frac{S_2^2}{2A_2} + \frac{S_3^2}{2A_3}, \quad F = F_e = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Формулы критического множества системы и вид бифуркационной диаграммы отображения (f_2, H) , разделяющей области значений (g, h) , соответствующие разным топологическим типам изоэнергетических многообразий Q^3 (см. рис. 10), а также бифуркационная диаграмма отображения момента (H, F) в зависимости от значения g (случай $g = 0$ и случай $g \neq 0$) приведены, например, в томе II монографии [6]. Там же вычислены топологические инварианты системы. Для каждой из получившихся камер рис. 10 ранее был найден интегрируемый бильярд, лиувиллево эквивалентный системе Эйлера на соответствующих Q_{gh}^3 (см. [45]).

На рис. 10 приведены искомые бильярды, а также инварианты Фоменко–Ципшанга, описывающих их слоения Лиувилля. При этом для каждой изоэнергетической поверхности потребовалось указать “свой” бильярд.

Случай Лагранжа описывает движение осесимметричного тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, лежащей на оси симметрии. Его интеграл и энергия имеют вид

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{2B} + \varphi(R_3), \quad F = F_L = S_3.$$

В зависимости от потенциала φ и значений f_2, H существует пять типов изоэнергетических поверхностей. Для реализации этой системы применяются круговые топологические бильярды: плоские листы являются дисками или кольцами, ограниченными концентрическими окружностями..

S^3 стол склеен из диска и кольца по внешней окружности кольца;

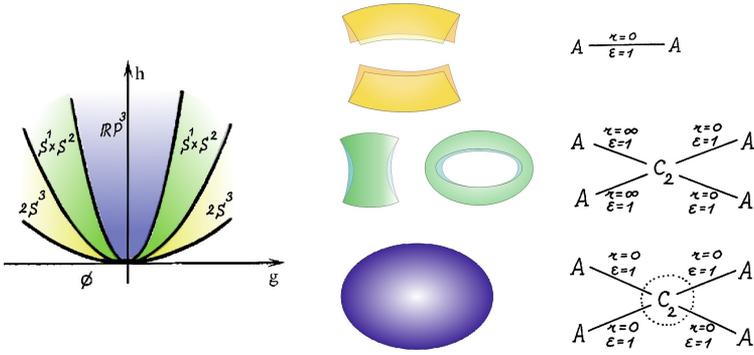


Рис. 10. Волчок Эйлера: бифуркационная диаграмма функции (f_2, H) , инварианты Фоменко–Цишанга для Q_{gh}^3 из неособых зон плоскости Ogh и реализующие их биллиарды.

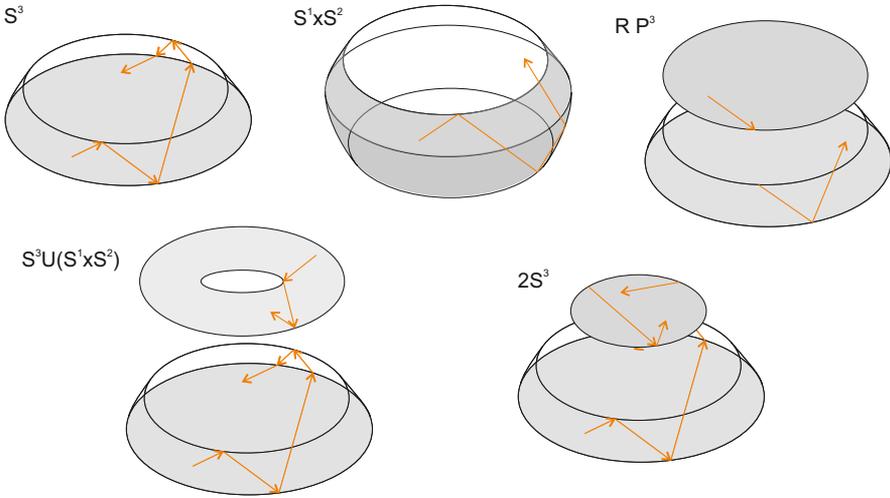


Рис. 11. Топологические биллиарды, реализующие слоения на неособых изоэнергетических поверхностях волчка Лагранжа: $S^3, S^1 \times S^2, \mathbb{R}P^3, S^3 \cup (S^1 \times S^2), 2S^3$.

$S^1 \times S^2$ стол склеен из двух колец по их внешней окружности;

$\mathbb{R}P^3$ стол склеен из двух дисков по их границе (на рис. 11 один из них разбит на меньший диск и кольцо);

$S^3 \cup (S^1 \times S^2)$ используем описанный выше стол для S^3 и кольцо, меньший радиус которого не меньше внешнего радиуса стола для S^3 ;

$2S^3$ используем описанный выше стол для S^3 и диск, радиус которого не превосходит радиуса меньшей окружности первого стола.

Перейдем теперь к случаю Жуковского — обобщению случая Эйлера при добавлении постоянного гиросtatического момента $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, и вместо S_i^2

в гамильтониан входят $(S_i - \lambda_i)^2$. Дополнительный интеграл $F = F_e$ волчка Эйлера и системы Жуковского совпадают.

Общий вид бифуркационных диаграмм для случая Жуковского изображен на рис.12 а). На рис б и с изображены два частных случая этой бифуркационной диаграммы. Пунктирные линии отделяют различные слоения Лиувилля гомеоморфных изоэнергетических поверхностей.

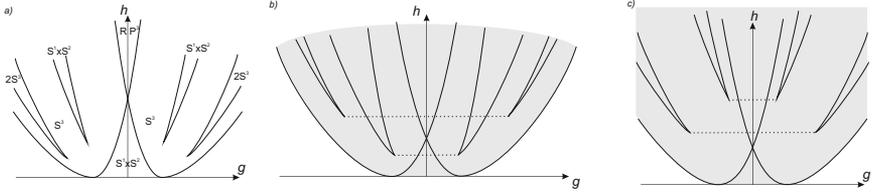


Рис. 12. а) Общий вид бифуркационной диаграммы на плоскости Ogh для случая Жуковского, разделяющие камеры с неособыми Q_{gh}^3 разных типов.. Рис. б) и с) содержат эти диаграммы для конкретных примеров систем Жуковского. Пунктирные линии соответствуют вырожденным особенностям ранга 1, т.е. разделяют Q^3 с разными слоениями, но одинаковыми классами гомеоморфности.

Для систем типа изображенных на рис. 12b выделим на плоскости Ogh камеры, для которых слоение Лиувилля на изоэнергетических Q_{gh}^3 моделируется билиардами (см. рис. 13). Обозначим эти билиарды буквами $\alpha - \epsilon$:

- α : склеим по эллиптическому сегменту двух плоских стола — один ограничен дугой эллипса $\lambda = 0$, двумя дугами гипербол и отрезком фокальной оси Ox , другой — двумя дугами тех же гипербол и двумя дугами эллипсов $\lambda = 0$ и $\lambda = \frac{b}{2}$;
- β : несвязное объединение двух экземпляров стола α ;
- γ : склейка двух экземпляров стола α по дуге “меньшего” эллипса с параметром $\lambda = \frac{b}{2}$;
- δ : склейка двух экземпляров стола α по двум дугам: дуге “меньшего” эллипса с параметром $\lambda = \frac{b}{2}$ и отрезку фокальной прямой Ox .
- ϵ : “трубочка”, склеенная из двух экземпляров первого листа стола α по двум дугам: дуге эллипса $\lambda = 0$ и отрезку фокальной оси Ox .

Другим ярким сюжетом оказывается моделирование систем механики (волчок Ковалевской и система Горячева-Чаплыгина), имеющих полиномиальные интегралы высоких степеней 3 и 4 по импульсам, при помощи интегрируемых билиардов с одним и тем же каноническим интегралом степени 2. Отметим, что ранее А.В.Болсинов и А.Т.Фоменко показали [48], что степень интегралов ряда систем (включая системы Ковалевской и Горячева-Чаплыгина) нельзя понизить в классе гладких лиувиллевых эквивалентностей.

ТЕОРЕМА 15. (А.Т.Фоменко, В.В.Ведюшкина) *Интегрируемые системы Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской, Ковалевской-Яхьи, Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$, Соколова, Дуллина-Матвеева с интегралами степеней 3 и 4 реализуются (т.е. кусочно-гладко лиувиллево эквивалентны) в*

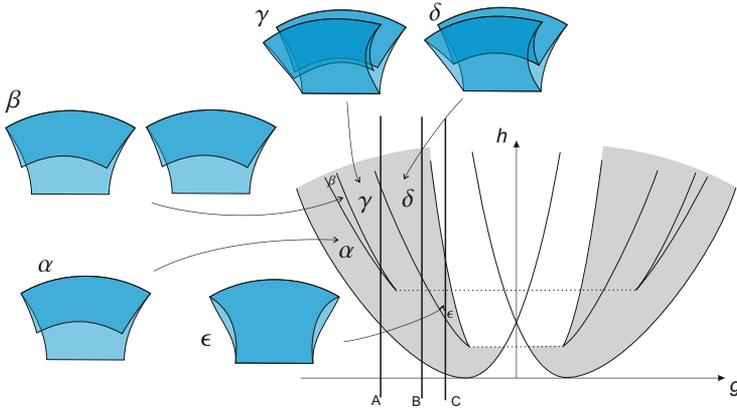


Рис. 13. Система Жуковского, чья бифуркационная диаграмма отображения (f_2, H) на плоскости Ogh имеет тип как на рис. 12b. Темным цветом выделены области плоскости Ogh , где система промоделирована одним из билиардов $\alpha \dots \epsilon$. Указаны вертикальные прямые A, B и C , кодирующие одноименные симплектические листы.

подходящих зонах энергии интегрируемыми билиардами с квадратичным интегралом [47]. Иными словами, интегралы больших степеней удается свести к одному и тому же квадратичному интегралу “в кусочно-гладком смысле”

$$\Lambda = -(xv_y - yv_x)^2 + v_x^2 b + v_y^2 a$$

На рис. 14 приведено соответствие билиардных столов, реализуемых ими инвариантов Фоменко–Цишанга, интегрируемых систем с интегралами высших степеней (в скобках указаны номера инвариантов или изоэнергетических зон в обозначениях работ), топологических типов Q^3

§ 3. Эволюционные билиарды и билиардная эквивалентность интегрируемых систем.

Конструкция эволюционного (или силового) билиарда была предложена А.Т.Фоменко [52]. Она позволяет провести моделирование системы по обе стороны от особого значения h без необходимости моделировать слоение на особой поверхности (содержащее обыкновенно или положение равновесия или вырожденную особенность).

В эволюционных билиардах с изменением параметра (скорости шара и “силы” удара о стенку-границу) может меняться как топология билиардного стола, так и закон отражения шара. Для особого значения энергии h , по сути дела, каждое из двух слоений $Q_{h \pm \epsilon}^3$ моделируется отдельной билиардной книжкой — но две эти книжки должны деформироваться друг в друга по определенным правилам.

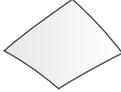
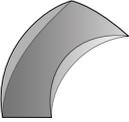
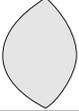
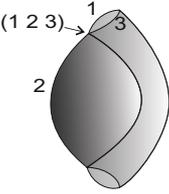
Интегрируемый бильярд	Инвариант Фоменко-Цишанга	Известные случаи интегрируемости	Тип Q^3
	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	Ковалевская (1), Ковалевская-Яхья (h_1), Ковалевская на $so(4)$ (1, 7, 11), Дуллин-Матвеев (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1), Соколов (A)	S^3
	$A \xrightarrow[r=1/2]{\varepsilon=1} A$	Дуллин-Матвеев (2)	RP^3
	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Ковалевская (5), Ковалевская-Яхья (h_{16}, h_{26}), Ковалевская на $so(4)$ (32), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (4)	$S^1 \times S^2$
	$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Ковалевская на $so(4)$ (10)	S^3
	$A \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[n=-1]{r=0} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Ковалевская-Яхья (h_{19}), Ковалевская на $so(4)$ (2, 9), Соколов (B)	S^3
	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ (with $n=0$ in a dashed circle)	Ковалевская на $so(4)$ (6), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (2)	S^3
	$A \begin{cases} \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C \\ \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	Соколов (I)	$S^1 \times S^2$
	$A \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[n=0]{r=0} A \\ \xrightarrow[n=1]{r=0} A \end{cases}$ (with $n=0, 1$ in dashed circles)	Ковалевская на $so(4)$ (8)	S^3
	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow[r=1/2]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[n=0]{r=0} A \\ \xrightarrow[n=0]{r=0} A \end{cases}$ (with $n=1, 0$ in dashed circles)	Горячев-Чаплыгин-Сретенский (6)	$S^1 \times S^2$

Рис. 14. Случаи понижения степени.

3.1. Определение эволюционного бильярда. Следующие определения были введены А.Т.Фоменко в работах [52, 53], см. также [54].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. 1. *Носителем силового бильярда* назовем конечный связный двумерный локально-плоский (с евклидовой метрикой внутри 2-клеток) клеточный комплекс X . Его 2-листы L_i гомеоморфны замкнутому односвязным областям R^2 и ограничены кусочно-гладкой кривой. Ее углы излома равны $\pi/2$. Склейка нескольких 2-листов происходит по изометрии их общей гладкой граничной дуги (корешка книжки).

2. Для каждого значения параметра-энергии $H = h \geq 0$ рассмотрим в носителе X замкнутый подкомплекс $X(h)$, возможно не связный. Назовем его *состоянием силового бильярда*, отвечающим значению h . При этом $X(h_1) \subset X(h_2)$ для любых $h_1 < h_2$ и $X = \cup X(h)$ по всем h . Тем самым с ростом h состояние $X(h)$ “разрастается”.
3. Конечное количество значений $h = 1 \dots N$ энергии H , при которых меняется топология стола или закон отражения-преломления на ребрах границы, назовем *особыми (сингулярными)*, а остальные - *регулярными*. Напомним, что 1-ребрами (корешками) бильярда $X(h)$ являются дуги софокусных квадрик или концентрических окружностей.
4. *Закон отражения-преломления* на ребре-корешке r в состоянии $X(h)$ обозначим через $Z(h, r)$. Он задается циклической перестановкой на n листах, склеиваемых по ребру r и определяет динамику частицы после удара о границу. Пусть $Z(h) = \{Z(h, r)\}$ — набор таких законов - есть кусочно-постоянная функция энергии, изменения которой могут быть лишь при особых значениях h .
5. Разрешим ребрам-корешкам состояния $X(h)$ гладко меняться в классе софокусных квадрик без вырождений. Как известно из теории интегрируемых бильярдов, это задает эквивалентные бильярды. При особых h ребра могут склеиваться с другими ребрами, вырождаться или превращаться в отрезки фокусных прямых. Склейка листов вдоль границ происходит вдоль дуги одной и той же квадрики. На “новом корешке” появляется новый цикл-перестановка. В момент скачка мы разрешаем бильярдам менять свой класс эквивалентности. Например, сегмент границы при особом h может лечь на фокальную прямую или “сложиться пополам”. Скачком угол $\pi/2$ может стать равным π . Разрешается склеивать в граничных точках корешки одного состояния $X(h)$, если они легли на одну граничную дугу, т.е. если угол между ними стал равен π . В круговых бильярдах граничные окружности могут стягиваться в точки.

Так, на рис. 15 при каждом из двух особых значениях h соответствующее ребро r становится “проницаемыми” (“прозрачными”). После этого бильярдный шар начинает проходить сквозь него, а до этого - он отражался. При этом пара тождественных перестановок на эллиптических дугах меняется на транспозиции на отрезке фокальной прямой.

6. Итак, носитель X мы считаем неизменным, “неподвижным”. В нем “разрастаются” состояния $X(h)$, причем X совпадает с последним состоянием $X(N)$. Интегрируемую систему с двумя степенями свободы, задаваемую динамикой бильярдного шара на меняющихся состояниях $X(h)$, назовем *силовым (эволюционным) бильярдом*.

Пусть h - регулярное значение энергии из некоего интервала $D_i = (i, i + 1)$. Соответствующий билиард-состояние обозначим через $X(D_i)$.

7. Точкой фазового комплекса $TX(D_i)$ является пара (x, v) , где x — точка билиардного стола $X(D_i)$, а v — вектор скорости материальной частицы в точке x . Когда точка x оказывается на границе листа L_i , соседствующего с листом L_k , то склейка соответствующих пар (x, v) и (x, w) происходит по закону отражения-преломления $Z(h, r)$, действующего на данном ребре r при данном h .
8. Регулярной изоэнергетической 3-поверхностью Q_h эволюционного билиарда назовем подмножество $H = h$ в четырехмерном фазовом комплексе $TX(D_i)$. Для состояний-книжек они являются топологическими 3-многообразиями.

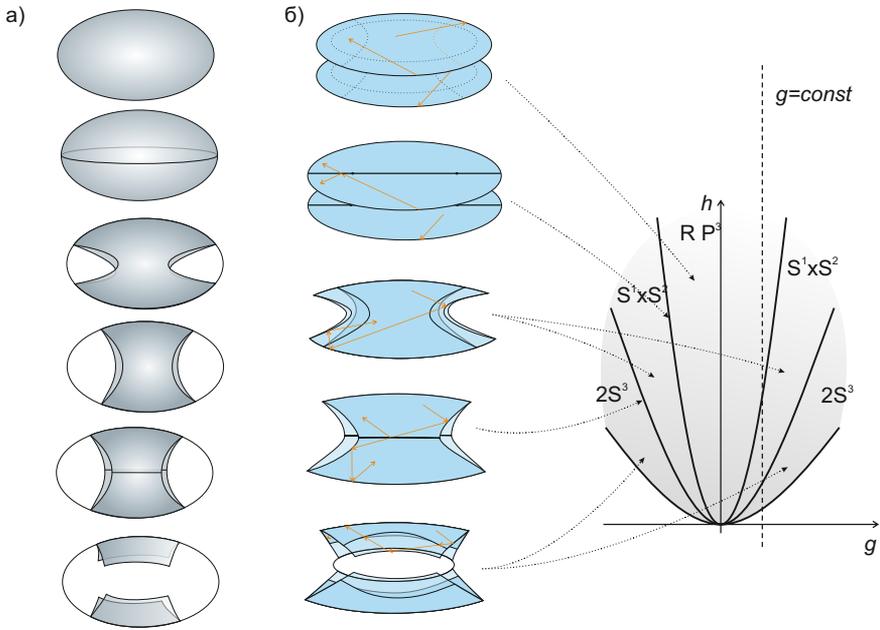


Рис. 15. Реализация случая Эйлера силовым билиардом: а: состояния силового билиарда как подмножества эллипсоида б: состояния силового билиарда как плоские области и бифуркационная диаграмма интеграла площадей и энергии системы Эйлера.

3.2. Моделирование эволюционными билиардами и билиардная эквивалентность волчков Эйлера и Лагранжа. Волчки Эйлера и Лагранжа, напомним, были описаны выше. Топология симплектического листа M_g^4 волчка Эйлера не зависит от выбора значения интеграла площадей $f_2 = g \neq 0$. На рис. 15 справа симплектический лист M_g^4 является прообразом вертикальной прямой при отображении (f_2, H) . Особые изоэнергетические поверхности

Q отображаются в точки трех парабол. Каждой 2-области приписан класс гомеоморфности регулярной $Q_{g,h}^3$.

Построим силовой бильярд для такого M_g^4 , см. рис. 15. Его носитель склеен из двух областей, ограниченных эллипсом, и гомеоморфен 2-эллипсоиду E^2 . Состояния бильярда изображены на рис. 15а) как подмножества E^2 и на рис. 15б) как склейка плоских областей. Состояния с меньшей энергией изображены ниже, с большей — выше. Начальным (стартовым) состоянием является несвязный бильярд, не имеющий общих точек с фокальной прямой (внизу). Он гомеоморфен двум дискам и реализует систему Эйлера на паре 3-сфер S^3 . Затем он превращается в кольцо, реализующее произведение 2-сферы и окружности ($S^1 \times S^2$). Затем кольцо превращается в сферу (эллипсоид), и реализует проективное пространство RP^3 . На рис. 15б) также показаны траектории бильярдного шара и склейка корешков. Интегрируемость бильярда в каждый момент эволюции следует из принадлежности его стенок дугам софокусных квадрик.

ТЕОРЕМА 16. [52, 53] *Построенный интегрируемый силовой бильярд, носитель которого гомеоморфен эллипсоиду, реализует (в смысле лиувиллевой эквивалентности) интегрируемый случай Эйлера сразу на всем фазовом многообразии M_g^4 исключая его особые уровни энергии, т.е. на всех его регулярных изоэнергетических 3-поверхностях для всех регулярных значений g и h .*

У систем волчка Лагранжа в зависимости от значения интеграла площадей, соотношения моментов инерции и выбора функции потенциала существует 4 типа бифуркационных диаграмм (см. [6]) и ровно 5 различных типов симплектических 4-листов. Для всех них в работе [53] мы обнаружили силовые бильярды. На рис. 16 показан один из них.

ТЕОРЕМА 17. [52, 53] *Интегрируемый случай Лагранжа на каждом своем регулярном симплектическом 4-листе M_g^4 реализуется (в смысле лиувиллевой эквивалентности) одним из построенных нами пяти силовых бильярдов, у которых бильярды-состояния ограничены концентрическими окружностями (и потому интегрируемы в каждый момент эволюции).*

На уровне эволюционных бильярдов, моделирующих волчки Эйлера и Лагранжа, удалось обнаружить нетривиальную связь между этими системами. Прodefормируем семейство софокусных эллипсов и гипербол в семейство концентрических окружностей и радиальных лучей (устремляя фокусы друг к другу).

ТЕОРЕМА 18. [52, 53] *Указанная деформация софокусных бильярдов в круговые переводит силовой бильярд, реализующий случай Эйлера, в новый силовой бильярд, полный набор лиувиллевых слоений которого совпадает с полным набором лиувиллевых слоений случая Лагранжа (для всех его трех типов изоэнергетических 3-поверхностей). Такие системы мы называем “бильярдно эквивалентными”.*

Обнаруженное “превращение” случая Эйлера в случай Лагранжа не переводит симплектический лист случая Эйлера в какой-либо из 5 типов симплектических листов случая Лагранжа. Оно устроено сложнее. Именно это не

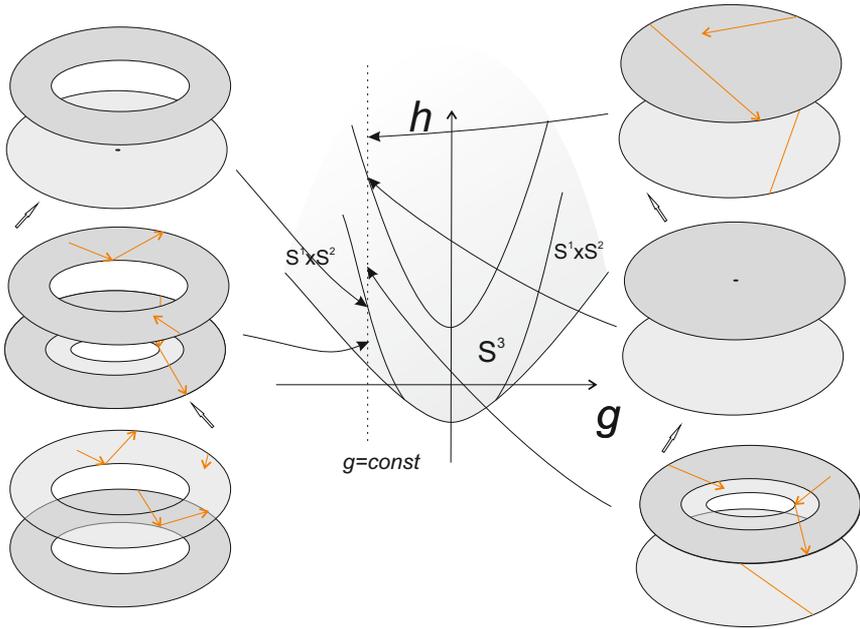


Рис. 16. Силовой билиард реализует симплектический лист системы Лагранжа.

позволяло ранее заметить превращение этих систем друг в друга. Тем не менее, оказалось, что полный набор лиувиллевых слоений случая Эйлера превращается в полный набор лиувиллевых слоений случая Лагранжа. Сначала потребовалось обнаружить в случае Эйлера “скрытые софокусные квадрики”, а в случае Лагранжа — “скрытые концентрические окружности”. В итоге, именно деформация софокусных квадрик в окружности (при слиянии фокусов) и “превращает” случай Эйлера в случай Лагранжа.

3.3. Частичное моделирование систем Ковалевской и Жуковского.

Рассмотрим классический волчок Ковалевской. Его фазовая топология изучалась М.П.Харламовым [74], там были построены бифуркационные диаграммы и определен класс гомеоморфности слоев слоения Лиувилля. Грубые молекулы этого волчка были вычислены А.А.Ошемковым в работе [104], а метки инварианта Фоменко–Цишанга были найдены в работе [51]. Бифуркационная диаграмма отображения (f_2, H) изображена на рис.17: сплошные линии разделяют области с разной топологией Q^3 , пунктирные соответствуют наличию неботтовской особенности ранга 1 в соответствующем Q^3 , т.е. разделяют области с одинаковыми классами гомеоморфности, но разными слоениями Лиувилля (инвариантами Фоменко и Фоменко–Цишанга).

Рассмотрим симплектический лист A , соответствующий вертикальной прямой $g = const$, изображенной на рис. 17. Эта прямая пересекает пять камер бифуркационной диаграммы, причем слоение изоэнергетических поверхностей в первых трех камерах может быть промоделировано слоением интегрируемых

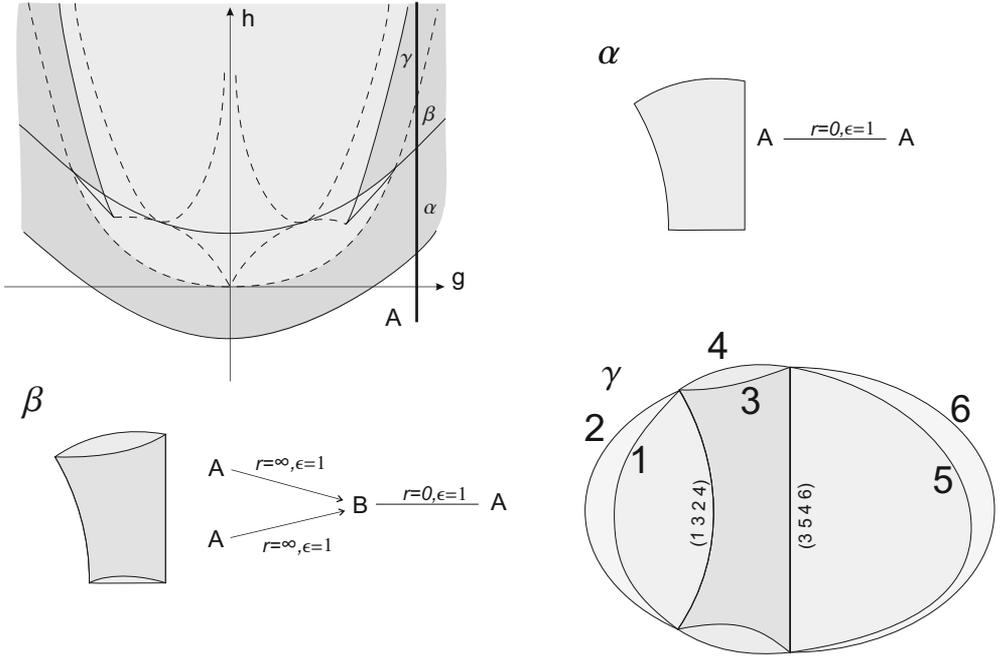


Рис. 17. Бифуркационная диаграмма волчка Ковалевской и пунктирные линии, разделяющие области с Q^3 , на которых слоения Лиувилля не послойно эквивалентны. Темным цветом отмечены зоны, промоделированные билиардами. Вертикальная прямая A задает симплектический лист M_g^4 , частично промоделированный эволюционным билиардом. Через α , β , γ обозначены части этого M_g^4 (неособые зоны энергии) и изображены состояния эволюционного билиарда, моделирующие их.

билиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. Эти билиарды, обозначенные через α , β , γ изображены на рис. 17.

- Элементарный билиард α ограничен дугой эллипса (положим его значение параметра $\lambda = 0$), дугой невыпуклой гиперболы (положим её значение параметра $\lambda = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a$), вырожденной гиперболой $x = 0$ (напомним, что её значение параметра $\lambda = a$) и фокальной прямой (напомним, что её значение параметра $\lambda = b$).
- Топологический билиард β склеен из двух билиардов α , где склейка произошла вдоль обеих дуг гипербол.
- Билиардная книжка γ склеена из шести элементарных билиардов. Билиарды с номерами 1 и 2 ограничены дугами эллипса с параметром $\lambda = 0$ и гиперболы с параметром $\lambda = \frac{a+b}{2}$. Билиарды с номерами 3 и 4 также ограничены дугами эллипса с параметром $\lambda = 0$ и гипер-

болы с параметром $\lambda = \frac{a+b}{2}$, а также отрезков вырожденной гиперболы с параметром $\lambda = a$. Биллиарды с номерами 5 и 6 ограничены дугой эллипса с параметром $\lambda = 0$ и дугой гиперболы с параметром $\lambda = a$. Дугам гиперболы — корешкам книжки припишем следующие перестановки. Дуге гиперболы с параметром $\lambda = \frac{a+b}{2}$ — перестановку (1 3 2 4), а дуге вырожденной гиперболы — перестановку (3 5 4 6).

Отметим, что построенный выше биллиард α является подмножеством биллиарда β , а биллиард β в свою очередь — подмножеством биллиарда γ . Это позволяет рассматривать их как состояния единого силового биллиарда K . В качестве объемлющего биллиарда комплекса возьмем биллиард γ , а за начальное состояние — биллиард α , образ которого при изометричном вложении в биллиардную книжку γ покрывает верхнюю половину листа с номером 3. Промежуточное положение — биллиард β вложим в книжку γ так чтобы образ этого биллиарда при изометричном вложении покрывал верхнюю половину листов 3 и 4.

Опишем теперь перестройки построенного силового биллиарда K . При первом скачке при перестройке биллиарда α в биллиард β происходит добавление листа биллиарда и стенки гипербол теперь становятся частично проницаемыми. Биллиардный шар теперь совершает движение по листам 3 и 4 биллиардной книжки γ , однако все ещё не может преодолеть фокальную прямую. При втором скачке происходит добавление биллиардов листов с номерами 1, 2, 5 и 6, меняются перестановки на гиперболических дугах, а фокальная прямая теперь становится проницаемой.

ТЕОРЕМА 19. [54] *Построенный эволюционный биллиард K реализует (в смысле ливиллевой эквивалентности) интегрируемый случай Ковалевской на части фазового симплектического многообразия M_g^4 , соответствующего прямой A на рис. 17. Подчеркнем, что эволюция стенок биллиарда происходит в классе софокусных квадрик, что обеспечивает интегрируемость системы в каждый момент её эволюции на всех последовательно появляющихся с ростом энергии изознергетических 3-поверхностях.*

Перейдем теперь к задаче моделирования системы Жуковского эволюционным биллиардом. Построим эволюционные биллиарды J_A, J_B, J_C , частично моделирующие ее на симплектических листах A, B, C .

- прямая A последовательно проходит через камеры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ плоскости Ogh . Начальное состояние эволюционного биллиарда J_A есть биллиард α , а конечное — биллиард δ . При первом скачке энергии к биллиарду α добавляется его копия, которая склеивается с ним при следующих двух скачках. Вначале склейка происходит вдоль фокальной прямой, а затем вдоль дуги меньшего эллипса с параметром $\lambda = \frac{b}{2}$.
- Симплектический лист B последовательно проходит через камеры α, γ, δ плоскости Ogh . Начальное состояние силового биллиарда J_A есть биллиард α , промежуточное — биллиард γ , а конечное — биллиард δ . В отличие от предыдущего силового биллиарда при первом скачке происходит одновременное появление копии биллиарда α и склейка двух копий вдоль фокальной прямой.

- Симплектический лист C последовательно проходит через камеры α , ϵ , δ плоскости Ogh . При движении в камере α одноименный бильярд изменяется так что параметр λ изначально равный $\frac{b}{2}$ стремится к значению b . В пределе при достижении стенки камеры диаграммы состояние бильярда представляет собой два экземпляра “нижнего” листа бильярда α . В момент скачка эти два экземпляра склеиваются вдоль фокальной прямой. В момент следующего скачка происходит добавление двух листов бильярда, склеенных вдоль дуги эллипса с параметром $\frac{b}{2}$, которые приклеиваются к предыдущему состоянию бильярда вдоль дуги большего эллипса. При этом одна выпуклая склейка заменяется на две выпуклых и одну невыпуклую. С другой стороны, этот скачок может быть интерпретирован как “выдавливание складки” из двух новых маленьких бильярдных внутри бильярда (см. вид бильярдных ϵ и δ на рис.13), при котором бильярд во всей небольшой окрестности скачка остается гомеоморфным кольцу, растет только число его склеек.

В работе [54] авторов также проведено частичное моделирование систем Ковалевской и Жуковского, у которых дуги и вершины бифуркационных диаграмм расположены иначе чем обсуждалось выше.

3.4. Бильярдная эквивалентность геодезических потоков. С помощью топологических бильярдных книжек можно моделировать геодезические потоки на двумерных поверхностях. Согласно теореме В.В.Козлова [9, 49], если на двумерной замкнутой поверхности геодезический поток интегрируем, то род этой поверхности неотрицателен. При условии ориентируемости, под условия теоремы подходят тор T^2 и сфера S^2 . При условии неориентируемости — то бутылка Клейна KL^2 и проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$.

К настоящему моменту рядом авторов (В.Н.Колокольцов[105], Матвеев В.С.[106], И. К. Бабенко, Н. Н. Нехорошев[107]) получена классификация всех интегрируемых потоков на упомянутых четырех поверхностях, таких что дополнительный интеграл полиномиален по импульсам и имеет степень не выше второй. Иными словами, были описаны все линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на двумерных замкнутых поверхностях. Для всех этих потоков был указан канонический вид метрики, вычислены инварианты Фоменко-Цишанга (см. работы В.С.Матвеева [106], Е.Н. Селивановой[108], В.В.Калашникова (мл.)[109], Т. З. Нгуена, Л. С. Поляковой [110]).

В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко недавно было показано [50], то для ориентируемой замкнутой поверхности и для любого линейно или квадратично интегрируемого геодезического потока на ней можно алгоритмически построить бильярд (топологический бильярд или стол-книжку), такой что инварианты Фоменко-Цишанга бильярда и геодезического потока совпадут.

ТЕОРЕМА 20. *В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко [50].*

1) *Любой геодезический поток на двумерной ориентируемой поверхности (тор и сфера), допускающий линейный интеграл, мувиллево эквивалентен топологическому бильярду, состоящему из плоских бильярдных, ограниченных концентрическими окружностями.*

2) Любой геодезический поток на двумерной ориентируемой поверхности (тор и сфера), допускающий квадратичный интеграл, ливильево эквивалентен топологическому бильярду или бильiardной книжке, состоящей из плоских бильiardов, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами.

3) Указанные топологические бильiardы алгоритмически и в явном виде строятся исходя из параметров интегрируемой метрики.

Бильiardы, моделирующие линейно интегрируемые потоки, получены следующим образом. Назовем бильiardы-кольца бильiardами типа C , а бильiardы-диски – бильiardами типа D . При этом все эти бильiardы ограничены окружностями из одного и того же семейства концентрических окружностей. Рассмотрим склейку таких бильiardов при котором топологический бильiard будет гомеоморфен сфере S (тогда он включает в себя два диска D) или тору T (тогда он состоит только из колец C). Примеры наборов таких бильiardов указаны на рис. 18.

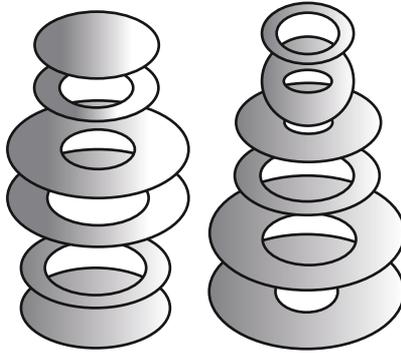


Рис. 18. Примеры бильiardов, моделирующих линейно интегрируемые геодезические потоки на сфере и торе.

Зададим по выбранному топологическому бильiardу следующую кусочно-линейную функцию. Занумеруем все плоские бильiardы в его составе. При этом для бильiardа S , гомеоморфного сфере первым выберем один из двух элементарных бильiardов, гомеоморфных диску. Отметим на плоскости Oxy точки $(0, r_0)$, и $(0, r_1)$ где r_0 и r_1 – меньший и больший радиусы окружностей, ограничивающих первый бильiard (для бильiardа D положим $r_0 = 0$). Переходя к следующему бильiardу, будем отмечать точки вида (i, r) , где i – номер бильiardа, а r радиус его граничной окружности, вдоль которой он склеен с бильiardом со следующим номером. Соединим все точки в некоторую ломаную. Обозначим через \tilde{f} кусочно-линейную функцию, график которой совпадает с построенной ломаной. Отметим здесь, что график функции \tilde{f} является “профилем” бильiardа.

Теперь расслоим область под графиком функции \tilde{f} на отрезки горизонтальных прямых. Стянем каждый отрезок в точку. Получим некоторый граф. Вершинам этого графа, соответствующим локальным максимумам функции \tilde{f} , т.е. выпуклым ребрам склейки бильiardов, сопоставим атомы A . Вершинам

этого графа, соответствующих локальным минимумам функции \tilde{f} , т.е. невыпуклым ребрам склейки бильярдов, сопоставим атомы серии B_k , где k – натуральное число на единицу меньше числа бильярдов, которые склеиваются между собой (т.е. количество ребер склейки, лежащих на дуге окружности соответствующего радиуса). В случае, если бильярд был гомеоморфен тору, то глобальному минимуму функции \tilde{f} сопоставим атом серии C_k . В случае бильярда S полученный граф имеет одно свободное ребро, т.е. ребро без приписанного его концевой вершине атома. Обозначим этот граф через $W(\tilde{f})$. В случае тора T полученный граф имеет два свободных ребра. Обозначим этот граф через $W_2(\tilde{f})$.

Пусть задана произвольная тройка (q, t, L) , где $t \in [0, 1)$, $L > 0$, $q(v)$ – функция с периодом L . Тогда по ней можно построить риманову метрику на торе. Для этого на плоскости с декартовыми координатами (u, v) рассмотрим метрику $ds^2 = q(v)(du^2 + dv^2)$, а затем возьмем фактор плоскости \mathbb{R}^2 по решетке, порожденной векторами $f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (t, L)$. Такие метрики назовём (q, t, L) –метриками. Они допускают линейный интеграл. Более того, верен следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. (Матвеев В.С.[106]) Пусть геодезический поток метрики на торе допускает линейный интеграл. Тогда метрика либо плоская либо изометрична (q, t, L) –метрике. Две метрики, отвечающие тройкам (q, t, L) и $(\hat{q}, \hat{t}, \hat{L})$ изометричны тогда и только тогда когда их параметры удовлетворяют соотношениям, указанным в [106].

ТЕОРЕМА 21. (Е.Н. Селиванова [108])

Пусть геодезический поток метрики ds^2 на торе T^2 линейно интегрируем (т.е. ds^2 представляет собой (g, t, L) –метрику). Построим по функции g граф $W_2(g)$. Тогда соответствующая ее геодезическому потоку меченая молекула W^* имеет вид, показанный на рис. 19 а. Метки задаются следующим образом. Все ребра, не содержащие атома A , несут на себе метку $r = \infty$. Ребра же, содержащие атом A , несут на себе метку $r = 0$. Единственная имеющаяся семья имеет метку n равную нулю. Метки ε на ребрах a и b равны -1 , а на всех остальных ребрах $\varepsilon = +1$.

Идея доказательства теоремы 20 для интегрируемых геодезических потоков на торе с линейным интегралом состоит в том, чтобы построить по положительной функции g , задающей (g, t, L) метрику на торе кусочно-линейную функцию \tilde{g} такую, что её взаимное расположение минимумов и максимумов совпадёт с взаимным расположением минимумов и максимумов функции g , из чего будет следовать совпадение графов W_2 для этих функций. Метки также совпадут, что следует из теорем Е.Н.Селивановой[108] и В.В.Ведюшкиной, вычисливших соответствующие инварианты Фоменко-Цишанга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Риманова метрика на торе называется *глобально мувиллевой*, если на торе существуют глобальные периодические координаты x и y , в которых метрика имеет вид

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

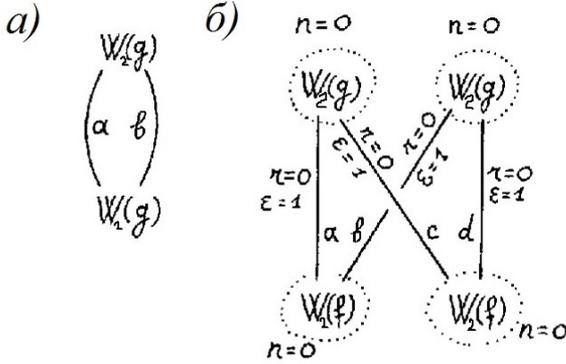


Рис. 19. Молекулы геодезического потока на торе.

где $f(x)$ и $g(y)$ – некоторые гладкие положительные функции, с периодами T_x и T_y соответственно, отличные от констант.

ТЕОРЕМА 22. (Е.Н. Селиванова [108])

Пусть метрика ds^2 на торе T^2 является глобально лиувиллевой метрикой, задающейся двумя функциями f и g . Построим по функциям f и g графы $W_2(f)$ и $W_2(g)$. Тогда соответствующая ее геодезическому потоку меченая молекула W^* имеет вид, показанный на рис. 19б. Метки задаются следующим образом. Все четыре ребра a, b, c, d , а также все ребра, содержащие атом A , несут на себе метку r , равную нулю. Все остальные ребра имеют метку $r = \infty$. Все метки p равны нулю, а все метки ϵ равны 1.

Пусть геодезический поток на торе обладает первым интегралом, квадратичным по импульсам, а метрика на этом торе глобально лиувиллева. Следуя теореме А.Т.Фоменко и В.В.Ведюшкиной [50], алгоритмически строится софокусный бильярд-книжка (плоские грани-листы CW-комплекса ограничены дугами софокусных квадрик), такой что совпадают инварианты Фоменко–Цишанга геодезического потока и бильярда.

Теперь устремим фокусы найденного бильярда друг к другу. В этом случае плоские листы исходного софокусного стола-книжки (ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол), перейдут в плоские листы предельного стола-книжки, ограниченные дугами концентрических окружностей и радиальными прямыми. Центром окружностей является начало координат — предел пары фокусов эллипсов и гипербол.

Инвариант Фоменко–Цишанга бильярдной системы на предельном круговом столе-комплексе оказывается инвариантом Фоменко–Цишанга системы интегрируемого геодезического потока на двумерном торе, первый интеграл которого линеен, а канонический вид метрики определяется таковым для исходного геодезического потока с квадратичным интегралом. Более точно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 23. Пусть на двумерном торе задан геодезический поток некоторой лиувиллевой метрики $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$. Рассмотрим били-

ард, ограниченный дугами софокусных квадрик, инвариант Фоменко-Цишанга которого совпадает с инвариантом данного геодезического потока. Причем уровню интеграла $\Lambda < b$ этого бильярда соответствует в этом инварианте подграф $W_2(f)$. Тогда при стремлении фокусов этого бильярда друг к другу данный бильярд, перейдет в бильярд, моделирующий линейно-интегрируемый геодезический поток на торе, метрика которого может быть записана в виде $ds^2 = f(x)(dx^2 + dy^2)$. В этом смысле линейно-интегрируемые геодезические потоки на торе бильярдно эквивалентны квадратично-интегрируемым геодезическим потокам на торе, которые задаются глобально-лиувиллевой метрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы поясним, как по функциям f и g строится искомый бильярд.

Для построения инварианта геодезического потока важны не сами функции f и g , а взаимное расположение их максимумов и минимумов на их периодах T_x и T_y . Область под графиком функции расслаивается на отрезки горизонтальных прямых, каждый отрезок стягивается в точку. Концевым вершинам графа – точкам максимумов функций – ставятся в соответствие атомы A , точкам локальных минимумов функций – ставятся в соответствие атомы серий C (уровню наименьшего из всех локальных минимумов) и B (всем остальным). Получим граф $W_2(f)$. Сожмём график функции f так, чтобы значения функции лежали в пределах интервала $(0, b)$. Построим кусочно-линейную функцию \tilde{f} , совпадающую с модифицированным графиком функции f в точках её экстремумов. Аналогично поступим с функцией g , построив функцию \tilde{g} . Заметим, что графы $W_2(\tilde{f})$ (и $W_2(\tilde{g})$) отличается от графа $W_2(f)$ (соответственно $W_2(g)$) только длинами рёбер.

Построим гомеоморфный тору бильярд, склеенный из бильярдов B_0 . Напомним, что каждый элементарный бильярд B_0 представляет собой четырехугольник, ограниченный двумя дугами эллипсов и двумя дугами гипербол. Пронумеруем все точки экстремума функции \tilde{f} и обозначим их через f_i , $i \in \{1..m+1\}$. Аналогично пронумеруем все точки экстремума функции \tilde{g} и обозначим их через g_j , $j \in \{1..n+1\}$. Рассмотрим набор областей B_0 , каждая из которых ограничена двумя дугами эллипсов с параметрами $b - f_i$ и $b - f_{i+1}$ и двумя дугами гипербол с параметрами g_j и g_{j+1} . Склеим набор из mn бильярдов в тор $T(B_0)$ в той же последовательности, что и соответствующие им отрезки кусочно-линейных функций \tilde{f} и \tilde{g} . Инвариант Фоменко-Цишанга полученного бильярда будет содержать подграфы $W_2(\tilde{f})$ и $W_2(\tilde{g})$ и совпадет с инвариантом геодезического потока (подробнее см. [50]).

Устремим теперь в семействе софокусных квадрик фокусы друг к другу. В результате бильярд $T(B_0)$ перейдет в бильярд $T(C)$. Каждый бильярд B_0 перейдет в бильярд, ограниченный двумя окружностями и двумя радиальными прямыми. Отметим, что с траекториями произошло следующее преобразование. Если ранее траектория (или её продолжение) касалась некоторого эллипса, то теперь траектория касается некоторой окружности. Отметим, что все такие траектории, как и ранее, разбиваются на два класса, в зависимости от направления обхода начала координат (по и против часовой

стрелки). Траектории, которые лежали на прямых проходящих через фокусы, переходят в траектории, которые лежат на радиальных прямых. Других траекторий у полученного бильярда $T(C)$ нет. Поэтому грубая молекула Фоменко представляет собой два склеенных графа $W_2(f)$. Вычисляя метки (полностью аналогично вычислению меток для бильярда T) получаем, что инвариант Фоменко-Цишанга бильярда $T(C)$ совпадает с инвариантом Фоменко-Цишанга для геодезического потока на торе с метрикой $ds^2 = dx^2 + f(x)dy^2$ (задающей линейно-интегрируемый геодезический поток на двумерном торе).

Перейдём к случаю сферы. Пусть тор T^2 задан как фактор плоскости \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами (x, y) по ортогональной решетке Γ , базисом которой являются два ортогональных вектора $f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (0, L)$, где L — любое положительное число. Рассмотрим инволюцию σ тора на себя, задаваемую на накрывающей плоскости симметрией: $\sigma(x, y) = (-x, -y)$, т.е. симметрией относительно начала координат. Ясно, что решетка Γ выдерживает эту симметрию, поэтому σ действительно является инволюцией на торе. Рассмотрим естественную проекцию $\xi : T^2 \rightarrow T^2/\sigma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Фактор-пространство T^2/σ тора по действию инволюции σ гомеоморфно двумерной сфере S^2 . Проекция $\xi : T^2 \rightarrow S^2 = T^2/\sigma$ является двулиственным разветвленным накрытием над сферой с четырьмя точками ветвления, каждая из них которых имеет ровно один прообраз на торе.*

Зададим на накрывающей плоскости тора две периодические гладкие функции $f(x)$ и $g(y)$, удовлетворяющие следующим условиям.

- а) Функция $f(x)$ неотрицательная, гладкая, четная, имеет период длины 1.
- б) Функция $g(y)$ неотрицательная, гладкая, четная, имеет период длины L .
- в) Это условие описывает асимптотическое поведение функций $f(x)$ и $g(y)$ вблизи их нулей. Функция $f(x)$ обращается в ноль в точках вида $x = \frac{m}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Функция $g(y)$ обращается в ноль в точках вида $y = \frac{kL}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Для любой точки вида $(\frac{m}{2}, \frac{kL}{2})$ существует гладкая в окрестности нуля функция $h(t)$ такая, что $h(0) = 0, h'(0) \neq 0$ и

$$f\left(\frac{m}{2} + t\right) = h(t^2), \quad f\left(\frac{kL}{2} + t\right) = -h(-t^2).$$

Следующее предложение описывает все квадратично интегрируемые геодезические потоки на двумерной сфере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. **(Т.З.Нгуен, Л.С.Полякова, Е.Н. Селиванова [110])**

1) Пусть $(f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$ — метрика на торе T^2 , удовлетворяющая свойствам (а), (б), (в), и $\xi : T^2 \rightarrow T^2/\sigma$ — описанное выше двулистное накрытие. Тогда на сфере S^2 существует, и притом единственная, гладкая риманова метрика ds^2 такая, что $\xi^*(ds^2) = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$. Если функции f и g при этом вещественно-аналитические, то метрика ds^2 тоже будет вещественно аналитической.

2) Обратно, рассмотрим метрику $\xi^*(ds^2)$ на торе T^2 , где ds^2 — некоторая гладкая метрика на сфере S^2 . Если эта метрика имеет вид $(f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$, то функции f и g автоматически удовлетворяют условиям (а), (б), (в).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. По аналогии с тором назовем эту метрику (L, f, g) -метрикой на сфере.

Метрика на сфере имеет линейно интегрируемый геодезический поток в том и только в том случае, когда существуют глобальные конформные координаты x, y , относительно которых накрывающая метрика на торе принимает вид

$$ds^2 = f(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2),$$

где $f(t)$ положительная гладкая функция на полуоси $[0, +\infty)$ и такая, что $\frac{f(1/t)}{t^2}$ — положительная гладкая функция на всей полуоси $[0, +\infty)$ (т.е. включая ноль).

Удобно переформулировать эту теорему так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Метрика ds^2 на сфере обладает линейно интегрируемым геодезическим потоком в том и только в том случае, когда на сфере существуют гладкие глобальные координаты (θ, φ) с двумя особыми точками (это аналоги полюсов для обычных сферических координат), причем θ меняется от 0 до некоторого θ_0 , а φ — периодическая координата $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, причем в этих координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2.$$

Отметим, что гамильтониан H геодезического потока имеет вид

$$H = p_\theta^2 + f(\theta)^{-1}p_\varphi^2,$$

а интеграл F выглядит так: $F = p_\varphi$.

ТЕОРЕМА 24. Рассмотрим на двумерной сфере геодезический поток, задаваемый (L, f, g) -метрикой, такой что функция g имеет на своём периоде единственный максимум. Рассмотрим моделирующий данный геодезический поток бильярд, ограниченный дугами софокусных эллипсов и гипербол. Устремим фокусы этого бильярда друг к другу. Тогда полученный бильярд моделирует линейно-интегрируемый поток на двумерной сфере, задаваемый метрикой $ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2$. Таким образом, класс линейно-интегрируемых геодезических потоков на двумерной сфере бильярдно эквивалентен некоторому подклассу квадратично-интегрируемых геодезических потоков на двумерной сфере.

Рассмотрим бильярд, моделирующий квадратично интегрируемый геодезический поток на двумерной сфере, задаваемый указанной в условии (L, f, g) -метрикой. В случае общего положения такой бильярд (см. рис. 20) содержит невыпуклые склейки, лежащие на эллипсах положение которых определяется функцией \tilde{f} (построение которой по функции f аналогично построению в случае двумерного тора) и невыпуклые склейки лежащие на гиперболах, положение которых определяется функцией \tilde{g} (построенной по функции g). Так как функция g на своём периоде не имеет точек минимума, то тогда моделирующий данный геодезический поток бильярд, построенный согласно алгоритму из доказательства теоремы о моделировании геодезических потоков, склеен их элементарных

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

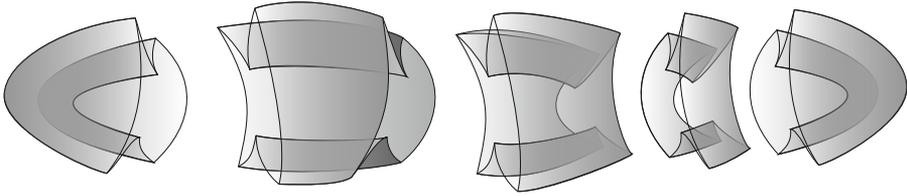


Рис. 20. Биллиард, моделирующий квадратично интегрируемый геодезический поток на двумерной сфере.

биллиардов так что в нём отсутствуют невыпуклые склейки, лежащие на гиперболах.

Тогда меченая молекула, кодирующая слоение Лиувилля этого биллиарда, имеет вид, указанный на рисунках 21 а (если биллиард не содержит невыпуклых склеек вообще) и 21 б (если содержит невыпуклые склейки, лежащие на дугах эллипсов). Устремим теперь фокусы в одну точку (начало координат).

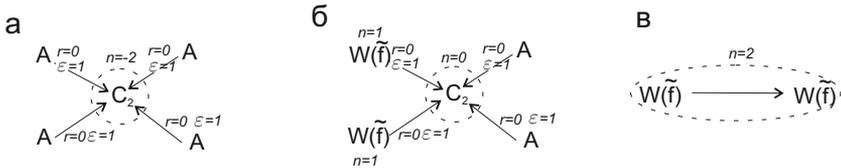


Рис. 21. Инварианты Фоменко-Цишанга гомеоморфных сфере биллиардов, моделирующих квадратично-интегрируемые геодезические потоки на двумерной сфере и не имеющие невыпуклых склеек, лежащих на дугах гипербол (а, б). Инвариант Фоменко-Цишанга биллиарда, моделирующего линейно-интегрируемый геодезический поток на двумерной сфере (в).

Тогда софокусные эллипсы перейдут в концентрические окружности, а гиперболы – в прямые, проходящие через начало координат. При этом интегрируемость биллиарда сохранится, а молекула, кодирующая слоение Лиувилля соответствующей изоэнергетической поверхности, перейдет либо в молекулу $A - A$ (с метками $r = 0, \varepsilon = 1$) либо в молекулу, изображенную на рисунке 21в. Все такие молекулы являются полным набором инвариантов, кодирующих линейно-интегрируемые геодезические потоки на двумерной сфере.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть геодезический поток на двумерной сфере задаётся произвольными функциями f и g , при этом функция g на своём периоде имеет точки минимума. Тогда в моделирующем данный геодезический поток биллиарде есть невыпуклые склейки вдоль рёбер лежащих на некоторых гиперболах.

Это приводит к тому, что при стремлении фокусов друг к другу окрестность начала координат в бильярде склеена из угловых секторов, которые образованы асимптотами указанных гипербол. В таком бильярде нельзя по непрерывности определить движение точки, при попадании в начало координат. Поэтому такие геодезические потоки не переходят при указанном преобразовании ни в какие линейно-интегрируемые геодезические потоки.

§ 4. Интегрируемые обобщения плоских бильярдов и бильярдных книжек

В данном разделе обсудим несколько обобщений софокусных и круговых бильярдов, сохраняющих интегрируемость системы. В первую очередь, это введение полиномиального потенциала (в частности, потенциала Гука для софокусных и круговых столов), введение на круговом столе магнитного поля, постоянного по времени и пространству, вектор индукции которого ортогонален столу, добавление проскальзывания частицы вдоль границы стола (бильярды с проскальзыванием). Несложно проверить, что склейка стола-книжки из плоских столов с такой динамикой сохраняет интегрируемость системы, т.е. что класс введенных В.В.Ведюшкиной бильярдных книжек “комбинируется” с указанными обобщениями.

Новые классы бильярдов успешно применялись для моделирования слоенных интегрируемых систем. Так, плоские и топологические бильярды с проскальзыванием позволили В.Н.Завьялову и авторам [58, 111] промоделировать интегрируемые геодезические потоки на неориентируемых поверхностях $\mathbb{R}P^2$ и KL^2 . В системе магнитного бильярда удалось реализовать как молекулу $A - A$ с метками $r = \infty, \varepsilon = -1$, а также расщепляемые по Зунгу особенности сложности 1 (см. работу В.В.Ведюшкиной и С.Е.Пустовойтова [112], а также работы [43, 113]). Бильярдные книжки с потенциалом позволили промоделировать произвольные невырожденные особенности ранга 0.

Также положительно решен поставленный в программной работе А.Т.Фоменко и В.В.Ведюшкиной [31] вопрос о моделировании бильярдами невырожденных особенностей ранга 0 (т.е. слоения в окрестности точки положения равновесия системы или содержащего ее слоя). Для особенностей центр-центр, центр-седло и седло-седло предложенный и развитый В.А.Кибкало [60, 61] подход использует софокусные бильярды (как предел геодезического потока на эллипсоиде) и наборы перестановок, найденные А.А.Ошемковым для седловых особенностей гладких систем. Особенности фокус-фокус были промоделированы в работе В.В.Ведюшкиной, В.А.Кибкало и С.Е.Пустовойтова [62] с помощью бильярдных книжек с притягивающим потенциалом Гука, склеенных из n дисков с перестановкой $(1, \dots, n)$.

Отдельно обсудим вопрос о топологии слоения Лиувилля бильярдов в многомерных областях, т.е. имеющих размерности 3 и выше. Случай бильярда, ограниченного эллипсоидом в \mathbb{R}^3 , был рассмотрен В.Драговичем [93]. Классификацию софокусных областей трехмерного эллипсоида с точностью до грубой

эквивалентности выполнил Г.В.Белозеров [63]. Им же изучается топология слоений Лиувилля бильярдов в таких областях при добавлении потенциала Гука, работы находятся в печати.

Коротко отметим еще одно интегрируемое обобщение бильярдов и геодезических потоков на квадратах, открытое совсем недавно. В.А.Кибкало было отмечено, что геодезический поток на пересечении $n - 2$ софокусных квадратов разных типов в пространстве \mathbb{R}^n интегрируем. Также в эллиптических координатах был указан квадратичный интеграл, независимый с энергией. Отметим, что метрика на двумерной поверхности приводится к лиувиллеву виду. Г.В.Белозеровым был затем доказан общий факт, обобщающий по сути своей знаменитую классическую теорему Якоби–Шалля: геодезический поток на пересечении k софокусных квадратов разных типов в \mathbb{R}^n вполне интегрируем, и касательные к каждой геодезической линии на $n - k$ -мерном пересечении одновременно касаются $n - k - 1$ квадрат, одних и тех же для всех точек пересечения. Также была описана топология (класс гомеоморфности) указанного пересечения. Доказательство выполнено в эллиптических координатах и потребовало нетривиальных приемов при работе с симметрическими многочленами.

Укажем кратко ещё несколько новых направлений, связанных с топологией интегрируемых бильярдов. В.Драговичем, М.Раднович [114], Е.Е.Каргиновой [115, 116] на плоскости с метрикой Минковского были изучены интегрируемые бильярды, также ограниченные дугами софокусных квадратов. Также в эту задачу можно добавить центральный потенциал типа Гука, сохранив интегрируемость системы. Один из примеров был разобран в работе А.И. Скворцова и В.В. Ведюшкиной [117].

Если допустить, что граница бильярдного стола может содержать углы $\frac{3\pi}{2}$ (по отношению к внутренности области), то получим так называемый псевдоинтегрируемый бильярд. Регулярные совместные поверхности уровня первых интегралов системы будут гомеоморфны не торами (как в интегрируемом случае), а некоторой поверхности с ручками, в которой сделано несколько проколов. Упомянем здесь работы В.Драговича, М.Раднович [118–120], В.А.Москвина [121, 122], изучавших такие бильярды.

Интересным сюжетом также оказывается моделирование произвольной упорядоченной бильярдной игры [93] на плоскости как проекции траекторий шара, движущегося по алгоритмически заданной бильярдной книжке, см. работу [126] В.Драговича и соавторов. Для некоторых таких книжек там же вычислялись инварианты Фоменко (молекулы без меток).

4.1. Бильярды с проскальзыванием. Закон отражения-преломления в точке границы (или линии склейки), рассмотренный выше, является стандартным гюйгенсовым законом упругого отражения: угол падения равен углу отражения, а длина вектора скорости не меняется. Другой класс бильярдов, названный бильярдами с проскальзыванием, был предложен А.Т.Фоменко в работе [58].

Кратко опишем суть конструкции. При ударе о гладкую дугу границы в точке x траектория продолжает движение из точки y , отстоящей от точки x на некотором расстоянии вдоль границы $\partial\Omega$ от точки x . Угол отражения при этом равен углу падения в следующем смысле: считаются ориентированные углы

между вектором скорости кривой (направление кривой и определяет направление проскальзывания) и соответствующим углом (падения или отражения) (см. пример на рис. 22).

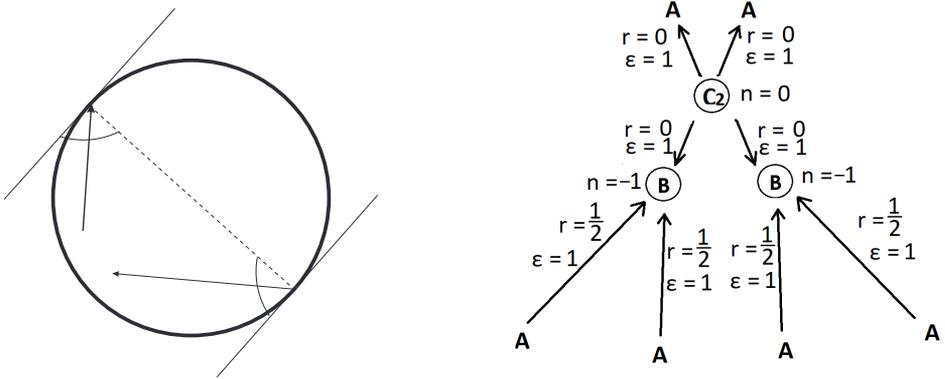


Рис. 22. Биллиард с проскальзыванием на угол π в круге (слева) и инвариант Фоменко–Цишанга софокусного биллиарда, склеенного из двух эллиптических колец по внутреннему граничному эллипсу, а на двух внешних граничных эллипсах введено проскальзывание (справа).

Рассмотрим центрально симметричную область и проскальзывание “на угол π ”, т.е. продолжение траектории из диаметрально противоположной точки границы. Такое проскальзывание для центрально симметричных софокусных и круговых столов порождает интегрируемый биллиард. Само по себе введение проскальзывания в интегрируемом случае эквивалентно введению неориентируемых топологических биллиардов. Например, в простейшем случае введения проскальзывания на границе диска (см. рис. 22 слева) позволяет говорить, что на самом деле рассматривается биллиардная система на проективной плоскости, которая получается отождествлением противоположных точек границы диска.

Более того, оказалось, что биллиарды с проскальзыванием моделируют геодезические потоки имеющих линейный интеграл на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ или на бутылке Клейна KL^2 . Интегрируемые геодезические потоки на неориентируемых поверхностях рассматриваются как некоторый фактор геодезических потоков на ориентируемых поверхностях. Это соображение позволило алгоритмически построить необходимые биллиарды, используя биллиарды, моделирующие геодезические потоки на торе и сфере. В таких биллиардах необходимо удалить один или несколько биллиардов а на оставшейся границе определить проскальзывание. В результате биллиардный стол становится гомеоморфным проективной плоскости или бутылке Клейна.

ТЕОРЕМА 25 В.В.ВЕДЮШКИНА, В.Н.ЗАВЬЯЛОВ. [111] *Любой геодезический поток на двумерном неориентируемом многообразии (бутылке Клейна или проективной плоскости), обладающий линейным по импульсам дополнительным интегралом, лувиллево эквивалентен биллиарду с проскальзыванием,*

состоящему из плоских бильярдных, ограниченных концентрическими окружностями. При этом линейный интеграл такого потока сводится к каноническому на бильярде, которым является угол между траекторией и границей любого бильярдного стола.

Для квадратичных геодезических потоков в настоящий момент получены несколько примеров. Представим один из них. Рассмотрим бильярд Z , склеенный из двух колец, ограниченных двумя софокусными эллипсами, так что на каждой граничной окружности введено проскальзывание.

ТЕОРЕМА 26 Завьялов В.Н.. [58] *Инвариант Фоменко-Цишанга топологического бильярда Z изображен на рис. 22 справа. Данная бильярдная система кусочно-гладко Лиувиллево эквивалентна интегрируемому геодезическому потоку на бутылке Клейна KI^2 , имеющему квадратичный (по компонентам импульса) дополнительный интеграл.*

Также проскальзывание можно вводить на бильярдных книжках. Рассмотрим следующую бильярдную книжку с проскальзыванием. Рассмотрим m бильярдных, ограниченных эллипсом и приклеим к ним кольцо, ограниченное тем же эллипсом и эллипсом с меньшим значением параметра λ (т.е. большим). Занумеруем листы книжки следующим образом – диски номерами $1, \dots, m$, а кольцу припишем номер $m + 1$. На кривой склейки (граничном эллипсе столов A_2 и внутреннем граничном эллипсе кольца) зададим циклическую перестановку длины $m + 1$ на всех 2-клетках книжки.

Добавим в эту книжку проскальзывание, определив его на большем эллипсе кольца (т.е. фактически мы приклеиваем к исходному комплексу лист Мёбиуса): при ударе о больший эллипс после отражения точка продолжает движение из противоположной точки по отношению к точке удара, т.е. “проскальзывая” вдоль границы на π .

Так определенная бильярдная книжка интегрируема, так как звенья траекторий по-прежнему касаются некоторого эллипса или некоторой гиперболы. Обозначим такой стол через $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$. На рисунке 23 схематично показан пример бильярдной траектории. Отметим, что при переходе между листом-диском с номером m и кольцом с номером $m + 1$ не происходит отражения – материальная точка проходит сквозь корешок книжки.

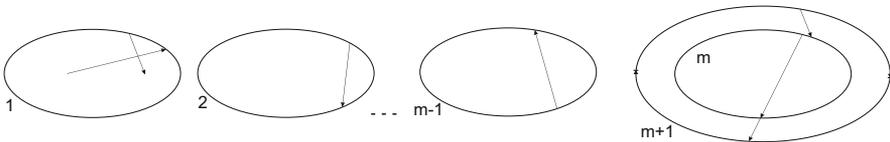


Рис. 23. Бильярдная книжка $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$ с проскальзыванием: пример бильярдной траектории.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 В.В.ВЕДЮШКИНА. *Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности бильярдной книжки $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$ с проскальзыванием в случае нечётного m изображен на рисунке 24а), а в случае чётного – на рисунке 24б)*

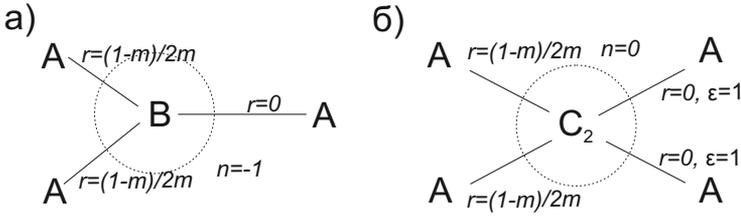


Рис. 24. Инвариант Фоменко–Цишанга для бильярдной книжки $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$ с проскальзыванием в случае четного m (а) и нечетного m (б). Все метки на ребрах $\varepsilon = 1$.

4.2. Интегрируемые бильярды с потенциалом. Другим интегрируемым обобщением классического бильярда в $\Omega \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ является введение подходящего потенциала. Простейшим примером служит потенциал Гука $\pm k(x^2 + y^2)$ для столов софокусных или круговых бильярдов. Такой потенциал можно ввести и на бильярдной книжке, склеенной из областей софокусных (или круговых) бильярдов [61]: закон отражения шара от границы сохраняет значения интеграла и энергии, границы областей возможности движения (проекция слоя Лиувилля на стол) лежат на софокусных квадриках (концентрических окружностях), причем проекция особой окружности каждого 3-атома такой системы также лежит на некоторой квадратике. Аналогичное оказывается верно для целого класса полиномиальных потенциалов (С.Е.Пустовойтов).

Рассмотрим бильярд внутри эллипса $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ с абсолютно упругим отражением шара от границы с равенством углов падения и отражения. Добавим гладкий потенциал $W(x, y)$, тогда уравнения движения шара (между ударами о границу) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -W_x, \\ \ddot{y} = -W_y. \end{cases} \quad (4.1)$$

Эта система гамильтонова на фазовом пространстве бильярда в эллипсе, ее энергия $H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + W(x, y)$. При отражении от границы, как и между ударами, функция H сохраняется.

Указанная система может не быть интегрируемой, например, для потенциала $W = y$. Критерий интегрируемости гамильтоновой системы $H = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + W(x, y)$ был получен В. В. Козловым в [55].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10 В. В. КОЗЛОВ. *Бильярд в эллипсе с потенциалом W допускает первый интеграл вида $F = \Lambda + f(x, y)$, если и только если он удовлетворяет следующему уравнению:*

$$(a - b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0 \quad (4.2)$$

Простейшими примерами потенциалов, удовлетворяющих (4.2), являются потенциал Гука $W = k(x^2 + y^2)$ для $k \in \mathbb{R}$ и потенциалы отрицательных степеней

координат $W = \frac{\alpha}{x^2}$ и $W = \frac{\beta}{y^2}$, а также их произвольные линейные комбинации. Топология слоений Лиувилля таких билиардов изучена И. Ф. Кобцевым в [123].

Также ранее были найдены и изучены некоторые другие решения уравнения В.В.Козлова (4.2). Так В.Драговичем в работе [124] были описаны решения, представимые в форме многочлена Лорана. Записанные ниже функции $V_k(x, y)$ и $W_k(x, y)$ являются решениями уравнения (4.2) при любом $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. При $k = 1$ функции $V_1(x, y) = \frac{1}{y^2}$ и $W_1(x, y) = \frac{1}{x^2}$ также являются решениями уравнения (4.2). В.Драговичем было доказано следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 27 В.ДРАГОВИЧ. *Общее решение уравнения (4.2) в классе многочленов Лорана с мономами отрицательной степени имеет вид линейной комбинации конечного числа функций типа V_k и W_k , равных $V_1(x, y) = \frac{1}{y^2}$ и $W_1(x, y) = \frac{1}{x^2}$ при $k = 1$ и имеющих следующий вид при $k \geq 2$:*

$$V_k(x, y) = \sum_{i=0}^{k-2} ((-1)^i \sum_{s=1}^{k-i+1} U_{k,i,s}(x, y) + y^{-2k}), \tag{4.3}$$

$$W_k(x, y) = \sum_{i=0}^{k-2} \left(\sum_{s=1}^{k-i+1} (-1)^s U_{k,i,s}(x, y) + x^{-2k} \right), \tag{4.4}$$

где вспомогательная функция $U_{k,i,s}$ имеет вид

$$U_{k,i,s}(x, y) = C_i^{s+i-1} \frac{\prod_{j=1}^s (j - k + i)}{(a - b)^{s+i} s!} x^{2s} y^{-2k+2i}, \tag{4.5}$$

Найдем теперь общее решение уравнения (4.2) в виде стандартного многочлена $W = \sum_{i=0, j=0}^{i+j=n} a_{i,j} x^i y^j$ с вещественными коэффициентами. В этом случае уравнение В.В.Козлова преобразуется в систему линейных уравнений на коэффициенты вида

$$(a - b)ij a_{i,j} + i(i + j)a_{i,j-2} - j(i + j)a_{i-2,j} = 0, \tag{4.6}$$

где $i > 0, j > 0, i + j \leq n + 2$. При этом полагается, что $a_{-1,i} = a_{i,-1} = a_{i,n+1-i} = a_{i,n+2-i} = 0$ для любого $i \in \overline{0 \dots n+1}$. В общем случае эта система не была решена явно, однако были получены следующие результаты.

ЛЕММА 1 С.Е.ПУСТОВОЙТОВ. *Общее решение уравнения (4.2) в виде многочлена*

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{i+j=n} a_{i,j} x^i y^j \tag{4.7}$$

удовлетворяет следующим свойствам:

1. $a_{i,j} = 0$ при $2 \nmid i$ или $2 \nmid j$, т.е. ненулевыми являются лишь четные коэффициенты;
2. пространство решений вида (4.7) имеет размерность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Как оказалось, в эллиптических координатах (λ_1, λ_2) уравнение Козлова (4.2) и многочлен (4.7) имеют достаточно простой вид. Формулы перехода между x, y и λ_1, λ_2 имеют вид

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{a-b}, \\ y^2 = \frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)}{b-a}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Координатными линиями являются софокусные эллипсы и гиперболы, принадлежащие семейству (2.1). При этом координата $\lambda_1 \in [b, a]$ является параметром гиперболы, а координата $\lambda_2 \in (-\infty, b)$ является параметром эллипса, проходящих через точку $xy \neq 0$. Уравнение границы бильярда имеет вид $\lambda_2 = 0$. Как несложно показать, уравнение Козлова в этих координатах примет вид

$$xy \left(\frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - W_{12} \right) = 0, \quad (4.9)$$

где W_i — частная производная функции W по λ_i . Кроме того, функции вида

$$W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (4.10)$$

являются решениями этого уравнения для любой $P \in C^\infty(\mathbb{R})$. Рассмотрим подкласс решений, для которых функции $P(t)$ являются многочленами степени $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, причем линейная часть многочлена равна нулю. Размерность подкласса равна $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

При обратном переходе к декартовым координатам от эллиптических имеем, что все решение из данного подкласса являются многочленами от переменных (x, y) с четными степенями при мономах. В силу размерности и леммы 1, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2 С.Е.ПУСТОВОЙТОВ. *Общее решение уравнения (4.2) в форме многочлена (4.7) имеет вид: (4.10), где P — произвольный многочлен степени $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.*

Таким образом С.Е.Пустовойтовым было доказано, что любой полиномиальный потенциал, сохраняющий интегрируемость бильярда, кодируется уникальным многочленом, степень которого выше единицы. Так, соответствующий многочлен для потенциала Гука, упомянутого ранее, имеет вид $P(t) = kt^2$. Также С.Е.Пустовойтов вычислил полный набор инвариантов, классифицирующих слоения Лиувилля таких бильярдов. Данный результат может быть расширен на произвольную элементарную софокусную область (как в работе [127] сделано для потенциала Гука).

На рис. 25 изображены примеры инвариантов Фоменко-Цишанга, возникающие в бильярдных системах с потенциалом малого порядка.

4.3. Моделирование бильярдами с потенциалом Гука невырожденных особенностей ранга 0. В программной работе [31] А.Т.Фоменко и В.В.Ведюшкиной была сформулирована задача промоделировать произвольную невырожденную 4-мерную особенность интегрируемой системы при помощи бильярда из некоторого подходящего класса. Данный вопрос является

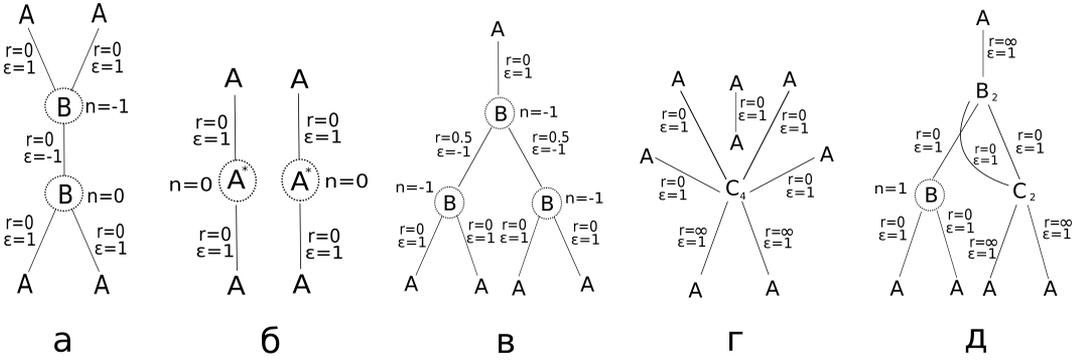


Рис. 25. Примеры инвариантов Фоменко-Цишанга, возникающие в билиардных системах с потенциалом малого порядка

естественным продолжением гипотезы А Фоменко о реализации произвольных 3-атомов — особенностей с невырожденными точками ранга 1.

Такой класс удалось найти — им оказались билиардные книжки, на листах которых задан потенциал Гука с одним и тем же коэффициентом k на всех листах.

ЛЕММА 3. *Невырожденные особенности всех четырех типов (центр-центр, центр-седло, седло-седло, фокус-фокус) моделируются подходящим круговым или софокусным билиардом с потенциалом Гука.*

Для особенностей типа центр-центр, седло-седло и фокус-фокус этот факт следует из явной проверки невырожденности критической точки $(0, 0)$ для потенциала $k(x^2 + y^2)$. Два первых типа реализуются билиардом в эллипсе с потенциалом Гука при $k > 0$ и $k < 0$ соответственно, а последний — в круговом билиарде.

ТЕОРЕМА 28 В.В.Ведюшкина, В.А.Кивкало, С.Е.Пустовойтов. *Произвольная невырожденная полулокальная фокальная особенность ранга 0 в интегрируемой гамильтоновой системе с 2 степенями свободы топологически моделируется билиардной книжкой, склеенной из n круговых билиардов в диске, склеенных по перестановке $(12 \dots n)$.*

Для доказательства удобно взять диск $x^2 + y^2 \leq 1$, проверить невырожденность точки $(0, 0, 0, 0)$ и перейти к полярным координатам. Координата r и компонента скорости \dot{r} связаны со значениями первых интегралов $H = h$ и $F = r^2 \dot{\phi} = f$ так:

$$\dot{r}^2 = 2h - kr^2 - \frac{f^2}{r^2}. \tag{4.11}$$

Область возможности движения для энергии $H = h$ и интеграла $F = r^2 \dot{\phi} = f$ определяется условием

$$-kr^4 + 2hr^2 - f^2 \geq 0, \tag{4.12}$$

откуда она является кольцом, ограниченным снаружи границей диска (стола билиарда), а изнутри — окружностью радиуса $r_0 = \sqrt{(-h + \sqrt{h^2 - kf^2})/(-k)}$.

При $r_0 = 0$ (т.е. $f = 0$ и $h > 0$) областью возможности движения является вся бильярдная область. Бифуркационная диаграмма изображена на рис. 26 и состоит из изолированной точки $(0, 0)$ и параболы $h = (f^2 + k)/2$. В прообразе точки находится особая точка фокус-фокус, в прообразе точек параболы — критические окружности. Прообраз малого трансверсального отрезка послойно гомеоморфен 3-атому A .

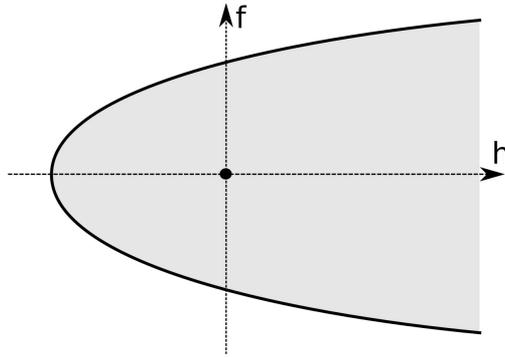


Рис. 26. Бифуркационная диаграмма кругового бильярда с потенциалом Гука.

Отметим, что при обходе вокруг изолированной точки бифуркационной диаграммы тор Лиувилля переходит в себя под действием оператора монодромии

При добавлении притягивающего потенциала Гука бильярдная книжка, склеенная из n листов кругового бильярда в диске с перестановкой $(1, \dots, n)$, моделирует фокальную особенность с n точками типа фокус-фокус (В.В.Ведюшкина, В.А.Кибкало, С.Е.Пустовойтов [62]). Произвольная невырожденная полулокальная особенность типа седло-седло или центр-седло моделируется алгоритмически задаваемой по особенности книжкой, склеенной из листов типа A'_0 (В.А.Кибкало, см. [60, 61]).

В работе [60] был рассмотрен предельный переход (при стремлении меньшей полуоси к нулю) от системы потока на эллипсоиде $E^2 \subset R^3$ в центральном притягивающем или отталкивающем потенциале Гука к топологическому бильярду на столе $2A_2$ с потенциалом $\frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ — стол склеен из двух плоских столов, ограниченных одинаковым эллипсом.

В работе [125] И.Ф.Кобцевым была изучена указанная система: построены бифуркационные диаграммы, определено количество регулярных слоев-торов в прообразе точки каждой камеры, определены типы 3-атомов и вычислены метки инвариантов Фоменко–Цишанга слоев на изоэнергетических поверхностях.

Положения равновесия системы отвечают нулевому вектору скорости и положению шара в конце одной из полуосей эллипсоида. Нетрудно проверить невырожденность указанной критической точки ранга 0, следуя [6] и рассматривая форму d^2H . При попарно различных длинах полуосей все они невырождены, причем концам средней полуоси соответствуют по одной точке типа центр-седло, концам короткой полуоси соответствует по одной точке типа

центр-центр или седло-седло, для притягивающего $k > 0$ или отталкивающего $k < 0$ потенциала. Типы положений равновесия в концах большой полуоси зависят от k наоборот. Поскольку поток на эллипсоиде является гладкой системой (нет границ и отражений от них), то слои Лиувилля, содержащие указанные невырожденные локальные особенности, должны быть невырожденными полулокальными тех же типов. Далее из вида бифуркационной диаграммы нетрудно найти их типы: центр-центр $A \times A$, центр-седло $A \times C_2$ и седло-седло $B \times C_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. В.А.Кибкало, [60]

Топологические софокусные бильярды с потенциалом Гюка моделируют неизолированную локальную особенность ранга 0 (в окрестности неподвижной точки должны быть критические точки ранга 0) каждого из трех типов центр-центр, центр-седло и седло-седло, а также примеры полулокальных особенностей каждого из типов.

Заметим, что в случае отталкивающего потенциала оба бильярда, на столах A_2 и $2A_2$ (бильярд внутри эллипса и два таких стола, склеенных по границе), содержат полулокальные особенности типа центр-центр $A \times A$ и центр-седло $A \times C_2$. В случае же притягивающего потенциала бильярд на столе A_2 , в отличие от стола $2A_2$, не имеет особенностей слоения, послойно гомеоморфных особенностям центр-седло и седло-седло, хоть они и имеют один и тот же набор неподвижных точек в концах полуоси.

Аналогичный эффект возникал в паре бильярдов A'_0 и $A_0 \equiv 2A'_0$ на уровне $\lambda = b$: бильярд имеет периодическую траекторию в прообразе оси Ox , но в случае A'_0 содержащий ее уровень гомеоморфен тору (т.е. не является бифуркационным для слоения Лиувилля). В случае же области A_0 или пары A'_0 , склеенных по оси Oy , особый уровень есть произведение окружности и восьмерки (две “петли” которой соответствуют двум областям A'_0 или верхней и нижней половинам стола A_0).

В качестве базовой области для моделирования особенностей центр-седло и седло-седло применим область $\Omega_0 := A'_0$, ограниченную дугой эллипса $\lambda = 0$, дугой гиперболы $b < \lambda = h < a$ и двух осей Ox, Oy .

ТЕОРЕМА 29. В.А.Кибкало, [60]

Произвольная особенность центр-седло, имеющая типа $A \times V$ для некоторого V — морсовского седлового 2-атома без звездочек сложности n , моделируется бильярдной книжкой, склеенной из $2n$ областей Ω_0 по граничным отрезкам оси Oy с перестановкой $(1, 2)(3, 4) \dots (2n - 1, 2n)$ и по граничным дугам гиперболы с перестановкой $\sigma(V) \in S_{2n}$, определяемой из f -графа 2-атома V .

В работе [13] А.А.Ошемков ввел комбинаторный инвариант гиперболических особенностей, названный им f_n -графом. В случае одной степени свободы это есть f -граф морсовского 2-атома. В случае двух степеней свободы f_2 -граф можно задать четверкой перестановок $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$, так что

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1, \quad \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1, \quad \sigma_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \sigma_i, \quad i \neq j,$$

а перестановки τ_1, τ_2 являются произведениями независимых транспозиций и орбита каждого элемента состоит из четырех точек.

Особенность задается классом эквивалентности таких f_n -графов относительно двух операций: можно вместо σ_i взять σ_i^{-1} или $\tau\sigma_i$. Сопоставим перестановки σ_1 и σ_2 сторонам A'_0 , лежащим на эллипсе $\lambda = 0$ и гиперболе, а перестановки τ_1 и τ_2 — на отрезках осей Ox и Oy соответственно.

ТЕОРЕМА 30. В.А.Кибкало

Для выбранной особенности типа седло-седло сложности n (т.е. имеющей n невырожденных положений равновесия на особом слое и удовлетворяющей условию нерасщепляемости) склеим бильярдную книжку из $4n$ листов A'_0 с перестановками $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ на эллиптической и гиперболической дугах, отрезках осей Ox и Oy соответственно. Пусть указанные перестановки задают f_n -граф выбранной особенности, а движение по плоским листам книжки происходит в поле отталкивающего потенциала Гаука с одинаковым коэффициентом k на всех листах. Тогда слоение Лиувилля построенного комплекса содержит особенность, послойно гомеоморфную выбранной особенности седло-седло.

В работе [61] В.А.Кибкало был рассмотрен случай особенностей седло-седло сложности 1 и вычислены их круговые молекулы (в гладком случае, напомним, круговая молекула является различающим инвариантом для особенностей седло-седло сложности 1 и 2).

В общем случае, согласно результату В.Ф.Лазуткина [128] о наличии сглаживания, для такой системы может быть введена гладкая и симплектическая структура в окрестности слоя, содержащего точки типа седло-седло. Каждая четверка областей A'_0 , склеиваемая по перестановкам τ_1, τ_2 , соответствует одной области A_0 , ограниченной теми же эллипсом и гиперболой. Для такого плоского стола все траектории, близкие к особому слою (содержащему положение равновесия типа седло-седло) трансверсальны дугам границы в точках отражения. Это означает, что особенность бильярдной системы действительно имеет тип седло-седло, и далее может быть вычислен ее f_n -граф и проверено его совпадение с инвариантом моделируемой особенности.

4.4. Интегрируемые магнитные топологические бильярды.. Рассмотрим плоский бильярд, снабженный действием постоянного магнитного поля, ортогонального плоскости бильярда. Уравнения, описывающие движение бильярдного шара между ударами о границу и записанные в декартовых координатах, имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -b\dot{y}, \\ \ddot{y} = b\dot{x}. \end{cases} \quad (4.13)$$

где $b > 0$ — коэффициент, зависящий от заряда бильярдного шара и значения магнитной индукции поля. Гамильтонианом такой системы является кинетическая энергия $H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}$.

Свойства такой системы Подобный бильярд для областей разной формы был изучен с разных точек зрения. Например, М. Робник и М. Берри в [129] рассмотрели магнитный бильярд в эллиптической области с точки зрения поведения траекторий, стабильности и характера динамики. Было показано, что

существуют такие уровни гамильтониана H , для которых динамика становится хаотичной.

А. Е. Миронов и М. Бялый в [57] доказали критерий интегрируемости магнитного бильярда в плоской односвязной области (а впоследствии, и для таких областей сферы и плоскости Лобачевского). А именно, верна такая теорема.

ТЕОРЕМА 31. М.Бялый, А.Е.Миронов Пусть граница магнитного бильярда связна, выпукла и при этом не является окружностью. Тогда этот бильярд не является алгебраически интегрируемым для всех значений параметра магнитной индукции b , кроме, быть может, конечного числа таких значений.

В то же время магнитный бильярд, ограниченный окружностью, допускает первый интеграл, не зависящий с гамильтонианом. Его формула в декартовых координатах имеет вид

$$F = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + b^2(x^2 + y^2) - 2b(xy - y\dot{x}). \tag{4.14}$$

Кроме того заметим, что функция F не зависит от радиуса граничной окружности. Более того, при отражении бильярдного шара от границы внешним образом функция F также сохраняется. Следовательно магнитный бильярд в области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, также интегрируем с тем же дополнительным первым интегралом.

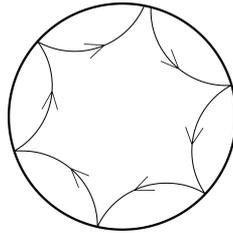


Рис. 27. Траектория интегрируемого магнитного бильярда

Первые интегралы H и F имеют наглядный геометрический смысл. А именно, система уравнений (4.13) задает движение бильярдного шара по окружности, радиус которой равен $L = \sqrt{2H}/b$, причем против часовой стрелки. Эти траектории-окружности называются *окружностями Лармора*. Центр окружности Лармора удален от центра бильярда на расстояние $R = \sqrt{F}/b$. На рис. 27 изображена траектория бильярдного шара, каждый сегмент которой лежит на окружностях Лармора с равными радиусами и расстояниями до центра бильярда. Несложно заметить, что все траектории бильярдного шара, соответствующие некоторому уровню энергии $H = h$ и $F = f$, лежат внутри области пересечения бильярдного стола и кольца, ограниченного окружностями радиусов $|R - L|$ и $R + L$. Более того, любая точка этой области лежит на некоторой траектории. Следовательно, эта область является *областью возможности движения*. Заметим, что любой внутренней точке такой области кроме центра — соответствуют два вектора скорости, т.к. существуют только

две окружности Лармора, проходящие через нее. Отсюда вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Прообраз любой двумерной области возможности движения магнитного бильярда при проекции p (т.е. соответствующий слой слоения Лиувилля) гомеоморфен двумерному тору в Q^3 , при этом окрестность этого тора расслоена тривиально.*

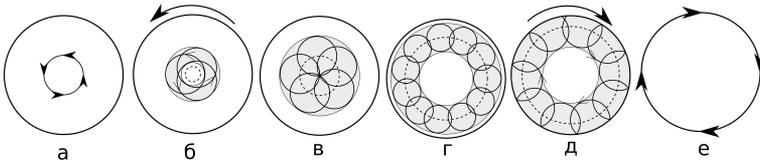


Рис. 28. Изменение траектории бильярда и области возможности движения при возрастании значения первого интеграла F .

Изучим теперь глобальную структуру слоений Лиувилля плоских магнитных бильярдов, ограниченных окружностью или парой окружностей. Зафиксируем ненулевое значение гамильтониана $H = h$ и проследим за изменением области возможности движения при изменении значения интеграла F от своего минимума f_{min} до максимума f_{max} (см. рис. 28). Согласно лемме 4, любое значение этого интеграла, не равное минимуму или максимуму, соответствует тору Лиувилля. При этом максимальным и минимальным значениям этого интеграла соответствует особый слой атома A . Таким образом, грубая молекула магнитных бильярдов имеет вид $A - A$. Для вычисления меток, как и в случае плоских бильярдов, циклы допустимых базисов проецируются на стол бильярда. Для кругового бильярда в диске имеем $r = 0$ и $\varepsilon = 1$, а для кругового бильярда в кольце $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$.

Теперь рассмотрим топологические бильярды, склеенные из круговых дисков и колец. Такой стол может быть гомеоморфен одному из четырех ориентируемых многообразий: цилиндру или тору (в случае, если все листы — кольца), диску (при наличии ровно одного листа, гомеоморфного диску) или сфере (если таких листа два). Зададим движение по каждому листу — как у соответствующего плоского магнитного бильярда с одной и той же индукцией b для всех листов. Построенная система имеет те же первые интегралы H и F , что и плоские магнитные бильярды.

Зафиксируем значение энергии H (или, эквивалентно, радиус окружности Лармора L). Опишем алгоритм построения инварианта Фоменко-Цишанга топологического магнитного бильярда на примере стола, гомеоморфного цилиндру (в остальных трех случаях существует аналогичный алгоритм).

- Шаг 1. Занумеруем границы склейки бильярда в соответствии с их принадлежностью элементарным столам-листам, то есть границы одного листа должны быть занумерованы последовательными натуральными числами.
- Шаг 2. Построим на плоскости $(0xy)$ следующую ломаную (ломаная K_0 на рис. 29, а): последовательно соединим точки с координатами (i, R_i) ,

где R_i – радиус i -ой границы. Затем отразим полученный график симметрично оси Ox (ломаная M на рис. 29, а). Иными словами, вместе ломаные K_0 и M образуют профиль биллиарда (сечение плоскостью, содержащей ось симметрии нашего топологического биллиарда). Наконец, отразим относительно прямой $y = L$ ту часть ломаной K_0 , которая расположена выше этой прямой (ломаная K на рис. 29, а).

- Шаг 3. Разобьем область между двумя ломаными K и M на горизонтальные отрезки и стянем каждый из них в точку. В полученном графе припишем свободным вершинам индекс A .
- Шаг 4. Остальным вершинам полученного графа соответствуют несколько локальных минимумов ломаной K и несколько локальных максимумов ломаной M (лежащих на соответствующем горизонтальном отрезке). Сопоставим этому отрезку последовательность упорядоченных слева направо минимумов и максимумов. Она кодируется количествами идущих расположенных подряд (слева направо) минимумов и максимумов, для отрезка с рис. 29в код имеет вид $\tau = (2, 2, 1, 1)$ (τ_1 подряд идущих минимумов, затем τ_2 подряд идущих максимумов и т.д.). Припишем такой вершине графа индекс B_τ .
- Шаг 5. Атом, обозначаемый B_τ , строится из атома B_n для $n = \sum \tau_i$ так. Разрежем 2-атом B_n трансверсально на $|\tau|$ связанных частей таким образом, чтобы в каждой i -ой части находилось ровно τ_i критических точек. Склеим обратно эти части по местам разрезов с перекруткой (рис. 29, г). На основе построенного 2-атома получим 3-атом с помощью прямого произведения на окружность.

Отметим, что класс 3-атомов B_τ в точности совпадает с классом атомов $V_n^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ (т.н. атомы с плюсами и минусами), возникающими в работе [80] при описании потоков на поверхностях вращения в магнитном поле. Такое переобозначение связано лишь с удобством записи в контексте конкретной задачи.

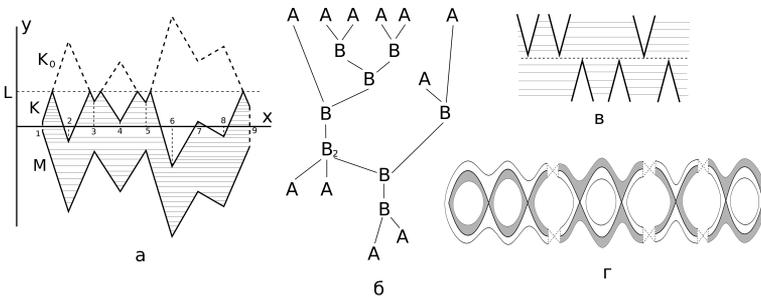


Рис. 29. На рис. а изображен алгоритм построения грубой молекулы. На рис. б изображена итоговая грубая молекула, полученная в ходе алгоритма. На рис. в изображен участок ломаных K и M , соответствующий 3-атому $B_{(2,2,1,1)}$. На рис. г изображен этот 3-атом.

ТЕОРЕМА 32. С.Е.Пустовойтов Построенный в ходе алгоритма граф с индексированными вершинами (рис. 29, б) является грубой молекулой цилиндрического топологического магнитного бильярда для зафиксированного уровня энергии H .

ТЕОРЕМА 33. С.Е.Пустовойтов Метки инварианта Фоменко–Цишанга топологического магнитного бильярда имеют следующий вид:

- 1) метка r равна нулю на всех ребрах, инцидентных атомам A , и бесконечно на остальных ребрах (и следовательно, существует лишь одна семья);
- 2) метка ε равна $+1$ на всех ребрах, соединяющих два атома из одной группы либо два атома A , и -1 в остальных случаях;
- 3) метка n единственной семьи равна нулю в случае бильярдов, гомеоморфных цилиндру или тору, ± 1 в случае дискового бильярда и ± 2 в случае сферического бильярда.

Таким образом С.Е.Пустовойтовым был полностью проведен анализ слоев Лиувилля топологических магнитных бильярдов. На рис. 30 изображен пример возможного инварианта Фоменко–Цишанга.

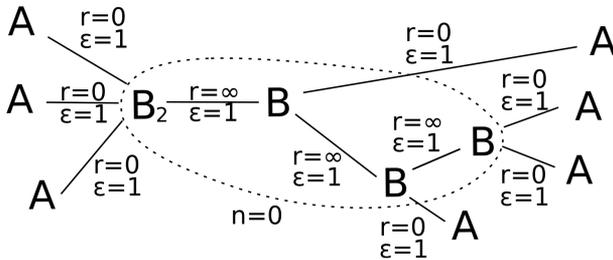


Рис. 30. Пример инварианта Фоменко–Цишанга топологического магнитного бильярда.

4.5. Многомерные бильярды и обобщение теоремы Якоби–Шаля.

Аналогично рассуждению Дж.Д.Биркгофа об интегрируемости бильярда в эллипсе можно показать интегрируемость многомерных бильярдов в областях, ограниченных софокусными квадрами. При этом количество функционально независимых инволютивных первых интегралов в наборе совпадает с размерностью бильярда. Например, для бильярда в трехмерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченной софокусными квадрами, звенья траекторий лежат на прямых, касательных к двум софокусным квадрами одновременно. Помимо энергии, вдоль траекторий сохраняются ещё две функции [56, 63]. Топологические свойства слоения Лиувилля таких бильярдов проведены, например, в работах В.Драговича, М.Раднович [93] и Г.В.Белозерова [63].

Не так давно В. А. Кибкало рассмотрел вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрами разных типов. Он доказал, что геодезический поток на пересечении $(n - 2)$ -х квадрами в \mathbb{R}^n является вполне интегрируемой системой и указал явный вид интеграла в эллиптических координатах. Метрика на поверхности приводится к лиувиллеву виду. Тем самым, построен достаточно богатый класс двумерных областей,

которые, как элементарные плоские области, быть основой для построения интегрируемых топологических бильярдов и бильярдов-книжек с неплоской метрикой.

Оказывается, этот результат можно обобщить, если рассмотреть геодезический поток на пересечении произвольного числа невырожденных софокусных квадратик. Все дело в том, что функции F_1, \dots, F_{n-1} останутся первыми интегралами геодезического потока на таком пересечении.

ТЕОРЕМА 34. Г.В. Белозеров

Пусть Q_1, \dots, Q_k — невырожденные софокусные квадратик попарно различных типов в евклидовом n -мерном пространстве и $Q = \bigcap_{i=1}^k Q_i$, тогда

1. геодезический поток на Q вполне интегрируем с $n - k$ первыми интегралами, квадратичными по импульсам;
2. касательные прямые к выбранной геодезической, проведенные к ней во всех ее точках, касаются (помимо квадратик Q_1, \dots, Q_k) еще $n - k - 1$ квадратик, софокусных с Q_1, \dots, Q_k и общих для всех точек этой геодезической.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отметим, что геодезические на пересечении невырожденных софокусных квадратик, вообще говоря, не являются геодезическими на какой-либо из квадратик Q_1, \dots, Q_k . Поэтому теорема 2 не является следствием классической теоремы Якоби-Шаля.

Семейством софокусных квадратик в \mathbb{R}^3 называют множество квадратик, заданных уравнением

$$(b - \lambda)(c - \lambda)x^2 + (a - \lambda)(c - \lambda)y^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)z^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda),$$

где $a > b > c > 0$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр. Если параметр квадратик этого семейства равен a , b или c , то она называется вырожденной, в противном случае квадратик называется невырожденной.

Пусть задано семейство софокусных квадратик в \mathbb{R}^3 . Трехмерным бильярдным столом будем называть компактное подмножество \mathbb{R}^3 с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом гладких граней, лежащих на квадратиках этого семейства, и имеющее двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Рассмотрим следующую динамическую систему: материальная точка (шар) единичной массы движется внутри бильярдного стола по прямым с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. В силу того, что все двугранные углы излома на границе равны $\pi/2$, отражение в точках излома можно продолжить по непрерывности. Такую динамическую систему мы будем называть *трехмерным бильярдом*.

Опишем сначала фазовое пространство нашей системы. Пусть Ω — бильярдный стол, на котором запущен бильярдный шар. Пусть $\widehat{M}^6 = \{(x, v) | x \in \Omega, v \in T_x \mathbb{R}^3\}$. Тогда фазовое пространство этой системы — многообразие $M^6 = \widehat{M}^6 / \sim$, где \sim — следующее отношение эквивалентности: $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$ в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих условий:

- $x_1 = x_2, v_1 = v_2$;

- $x_1 = x_2 \in \partial\Omega$, а вектор v_2 может быть получен из v_1 путем нескольких отражений относительно касательных плоскостей к софокусным квадрикам, входящим в состав границы Ω в точке $x_1 = x_2$.

Отметим, что рассматриваемая нами система является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле. В нашем случае функция Гамильтона есть модуль вектора скорости $H(x, v) = \|v\|$. Еще два первых интеграла, функционально независимых с H , — это параметры софокусных квадрик данного семейства, которых одновременно касаются все прямые траектории шара. Их существование следует из теоремы Якоби-Шаля.

Действительно, рассмотрим геодезический поток на поверхности трехмерного эллипсоида в \mathbb{R}^4 и устремим его меньшую полуось к нулю. Геодезический поток на поверхности этого эллипсоида перейдет в трехмерный бильярд внутри эллипсоида в \mathbb{R}^3 . А первыми интегралами полученной системы будут два параметра софокусных с эллипсоидом квадрик, которых одновременно касаются все прямые траектории шара.

Обозначим параметры этих квадрик через Λ_1, Λ_2 . Заметим, что одна и та же траектория не может касаться одновременно двух софокусных эллипсоидов или двух софокусных двуполостных гиперboloидов. Действительно, софокусные эллипсоиды не пересекаются друг с другом и являются выпуклыми поверхностями. Аналогичное справедливо для софокусных двуполостных гиперboloидов. Поэтому можем считать, что $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ и $\Lambda_1 \in [c, a]$, $\Lambda_2 \in [x_0, b]$, где x_0 — наименьший параметр эллипсоида, входящего в состав границы бильярдного стола. Можно показать, что функции H, Λ_1, Λ_2 попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона при $x \in \text{Int}(\Omega)$. Поскольку исследовать динамические системы с тремя степенями свободы гораздо сложнее, чем системы с двумя степенями свободы, на множестве ИГС с тремя степенями свободы рассмотрим “простейшее” отношение эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть v_1 и v_2 — интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы. Пусть B_1, B_2 — базы слоений Лиувилля систем v_1 и v_2 соответственно. Будем говорить, что v_1 и v_2 *слабо эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ баз слоений Лиувилля, при котором для любой точки $x \in B_1$ слои систем v_1 и v_2 , соответствующие точкам $x \in B_1$ и $\varphi(x) \in B_2$, гомеоморфны.

Заметим, что введенное отношение эквивалентности существенно слабее отношения грубой лиувиллевой эквивалентности. При этом отношение слабой эквивалентности можно ограничить на слоения Лиувилля изоэнергетических поверхностей.

Задача классификации трехмерных бильярдных по отношению слабой эквивалентности была решена Г.В. Белозеровым в работе [63]. Впервые в аналогичных терминах слоение Лиувилля трехмерного бильярда было описано В.Драговичем и М.Раднович в работе [93] для трехмерного бильярда, ограниченного эллипсоидом. Приведем здесь один из бильярдных, изученных Г.В.Белозёровым.

Рассмотрим трехмерный бильярдный стол, ограниченный эллипсоидом и двумя участками софокусного двуполостного гиперboloида. Будем считать,

что граничный эллипсоид задан уравнением $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, где $a > b > c$. На рисунке 31а изображен стол такого вида.

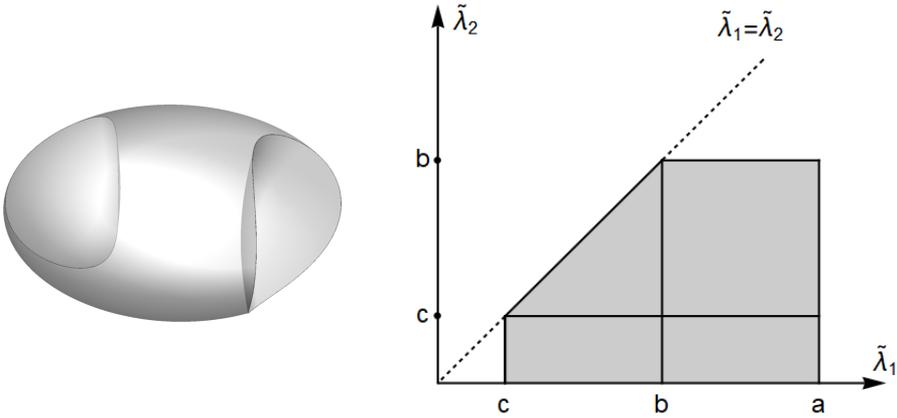
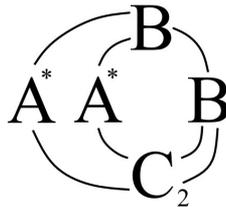


Рис. 31. а) Биллиардный стол, ограниченный эллипсоидом и двумя участками двуполостного гиперboloида; б) Серым цветом выделена область значений отображения момента, ограниченного на Q^5 . Черными сплошными линиями выделена бифуркационная диаграмма.

Зафиксируем уровень энергии $H = 1$ и рассмотрим отображение момента, ограниченное на изоэнергетическую поверхность Q^5 . Для первых интегралов Λ_1 и Λ_2 (параметры каустик) верны следующие соотношения: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$, $\Lambda_1 \in [c, a]$, $\Lambda_2 \in [0, b]$. На рисунке 31б серым выделена область значений отображения момента, а черными сплошными линиями на ней — бифуркационная диаграмма Σ .

Отметим, что в точке (b, c) возникает круговая молекула — топологический инвариант особенности, соответствующей точке пересечения двух отрезков (он нетривиален, если оба отрезка входят в бифуркационную диаграмму). Напомним, что круговой молекулой точки в образе отображения момента для системы с 2 степенями свободы называют молекулу (инвариант Фоменко) слоения Лиувилля на 3-границе инвариантной 4-окрестности прообраза этой точки. В нашем случае система имеет 3 степени свободы, но гамильтониан $H = 1$ фиксирован. Тем самым, круговой молекулой точки (b, c) естественно считать инвариант слоения на 4-границе 5-окрестности прообраза этой точки.

Для рассматриваемого биллиардного стола круговая молекула особенности, соответствующая точке (b, c) имеет следующий вид.



Вершинам этой молекулы соответствуют 3-атомы, прямо умноженные на окружность.

Однако для данного стола удастся полностью описать топологию слоения Лиувилля малой окрестности точки креста. Поскольку бильярдный стол обладает замечательным расслоением на софокусные двуполостные гиперболоиды, то малая окрестность слоя, соответствующего точке (b, c) гомеоморфна прямому произведению окружности S^1 и комплекса K^4 , где K^4 — окрестность слоя особой точки типа седло-седло слоения Лиувилля двумерного бильярда с потенциалом Гаука внутри эллипса. Из результатов В. А. Кибкало следует, что $K^4 \simeq (B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$. Следовательно, малая окрестность слоя (b, c) гомеоморфна $S^1 \times (B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$.

Авторы благодарят В. А. Кибкало за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению качества текста.

Список литературы

- [1] С. Смейл, “Топология и механика”, УМН., 27:2(164) (1972), 77–133.
- [2] А.Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю” // Функциональный анализ и его приложения, 22:4 (1988), 38–51.
- [3] А.Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем” // УМН, 44:1(265) (1989), 145–173.
- [4] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы” // Изв. АН СССР. Серия Матем., 54:3 (1990), 546–575.
- [5] А.В. Болсинов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности” // УМН., 45:2 (1990), 49–77.
- [6] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация”. Т. 1 и 2. — Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [7] А.Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем” // Доклады АН СССР, 287:5 (1986), 1071–1075.
- [8] А.Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости” // Изв. АН СССР. Серия матем., 50:6 (1986), 1276–1307.
- [9] В.В. Козлов, “Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике”. — Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995, 429с.
- [10] Н.Н. Нехорошев, “Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым”, УМН., 32:6(198) (1977), 5–66.
- [11] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. “Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела”// Доклады РАН, 339:3 (1994), 293–296.
- [12] N.T. Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold-Liouville with singularities” // Compositio Math., 101:2 (1996), 179–215.
- [13] A.A. Oshemkov, “Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems” // Sb. Math., 201:8 (2010), 1153–1191.
- [14] E.A. Kudryavtseva, A.A. Oshemkov, “Structurally stable nondegenerate singularities of integrable systems” // Rus. J. of Math. Phys., 29:1 (2022), 57–75.
- [15] A.V. Bolsinov, L. Guglielmi, E.A. Kudryavtseva, “Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom” // Philos. Trans. Royal Soc. A: Math., Phys. and Engin. Sc., 376:2131 (2018), 20170424.

- [16] D.A. Fedoseev, A.T. Fomenko, “Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems” // *J. Math. Sc.*, 248 (2020), 810–827.
- [17] А.А. Глуцюз, “О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны” // *ДАН*, 481:6 (2018), 594–598.
- [18] A.A. Glutsyuk, “On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature” // *J. Eur. Math. Society*, 23:3 (2021), 994–1049.
- [19] A. Avila, J. De Simoi, V. Kaloshin, “An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse” // *Ann. of Math. (2)*, 184:2 (2016), 527–558.
- [20] V. Kaloshin, A. Sorrentino, “On the local Birkhoff conjecture for convex billiards” // *Ann. of Math. (2)*, 188:1 (2018), 315–380.
- [21] H. Poritsky, “The billiard ball problem on a table with a convex boundary – an illustrative dynamical problem” // *Ann. of Math. (2)*, 51 (1950), 446–470.
- [22] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», 1999
- [23] V. Dragović, M. Radnović, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, 14:4-5 (2009), 479–494
- [24] V.V. Fokicheva, “Description of singularities for system “billiard in an ellipse”” // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 67:5-6 (2012), 217–220
- [25] V. V. Fokicheva, “Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas” // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 69:4 (2014), 148–158
- [26] V. V. Fokicheva, “Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas” // *Sb. Math.*, 205:8 (2014), 1201–1221
- [27] В.В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик” // *Матем. сб.*, 206:10 (2015), 127–176.
- [28] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем” // *Матем. сб.*, 209:12 (2018), 17–56.
- [29] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов” // *Матем. сб.*, 210:3 (2019), 17–74
- [30] A.T. Fomenko, V.A. Kibkalo, “Topology of Liouville foliations of integrable billiards on table-complexes” // *Europ. J. of Math.*, 8 (2022), 1392–1423.
- [31] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности” // *Вестник Моск. Универ. Матем. Механ.*, 2019, №3, с.15–25.
- [32] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами” // *ДАН*, 479:6 (2018), 607–610.
- [33] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, А.Т. Фоменко, “Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов” // *Доклады Академии Наук (РАН)*, 493 (2020), 9–12.
- [34] В.В. Ведюшкина, “Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2021, 2, 28–32.
- [35] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Реализация бильярдами числового инварианта расщепления Зейферта интегрируемых систем” // *Вестник Моск. унив. Серия 1: Матем. Механ.*, 2020, № 4, 22–28.
- [36] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, 212:8 (2021), 89–150.

- [37] I.M. Nikonov, “Description of degenerate two-dimensional singularities with single critical point” // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 74:3 (2019), 87–97.
- [38] И.С. Харчева, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020, № 4, 12–22.
- [39] В.В. Ведюшкина, “Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек”, *Матем. сб.*, 212:12 (2021), 3–19.
- [40] F. Waldhausen, “Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I” // *Invent. Math.*, 3:4 (1967), 308–333.
- [41] F. Waldhausen, “Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II” // *Invent. Math.*, 4:2 (1967), 88–117.
- [42] В.В. Ведюшкина, “Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе” // *Матем. сб.*, 211:2 (2020), 3–30.
- [43] В.А. Кибкало, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками” // *Труды Моск. матем. общ.*, 82:1 (2021), 45–78.
- [44] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Бильярдные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем” // *Чебышевский сб.*, 23:1 (2022), 53–82.
- [45] В.В. Фокичева, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела” // *ДАН*, 465:2 (2015), 1–4.
- [46] V.V. Vedyushkina, “Liouville foliation of billiard book modeling Goryachev-Chaplygin case” // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 75:1 (2020), 42–46.
- [47] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Понижение степени интегралов гамильтоновых систем с помощью бильярдных” // *Доклады Академии наук*, 486:2 (2019), 151–155.
- [48] А.В. Болсинов, В.В. Козлов, А.Т. Фоменко, “Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела” // *УМН*, 50:3 (1995), 3–32.
- [49] В.В. Козлов, “Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем” // *ДАН СССР*, 249:6 (1979), 1299–1302.
- [50] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды” // *Изв. РАН. Сер. Матем.*, 83:6 (2019), 63–103.
- [51] А.В. Болсинов, П. Рихтер, А.Т. Фоменко. “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской” // *Матем. Сб.*, 191:2 (2000), 3–42.
- [52] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко. “Силловые эволюционные бильярды и бильярдная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа” // *Доклады РАН*, 496 (2021), 5–9.
- [53] А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина, “Эволюционные силловые бильярды” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 86:5 (2022), 116–156.
- [54] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina, “Billiards with Changing Geometry and Their Connection with the Implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya Cases” // *Russ. J. Math. Phys.*, 28 (2021), 317–332.
- [55] В.В. Козлов, “Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде” // *Прикл. матем. механ.*, 59:1 (1995), 3–9.
- [56] В.В. Козлов, Д.В. Трещёв, “Тенетическое введение в динамику систем с ударами”, М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [57] M. Bialy, A.E. Mironov, “Algebraic non-integrability of magnetic billiards” // *J. Phys. A*, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.
- [58] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina, V.N. Zav’yalov, “Liouville foliations of topological billiards with slipping” // *Rus. J. of Math. Phys.*, 28 (2021), 37–55.

- [59] S.E. Pustovoitov, "Topological analysis of an elliptic billiard in a fourth-order potential field" // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 76:5 (2021), 193–205.
- [60] В.А. Кибкало, "Биллиарды с потенциалом моделируют ряд четырехмерных особенностей интегрируемых систем", *Современные проблемы математики и механики*, Т. 2, Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, МАКС Пресс, М., 2019, 563–566.
- [61] A.T. Fomenko, V.A. Kibkalo, "Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: Examples and algorithms", In: Sadovnichiy, V.A., Zgurovsky, M.Z. (eds.): "Contemp. Appr. and Methods in Fundam. Math. and Mech." // *Understanding Complex Systems*, Springer, Cham, 3–26 (2021)
- [62] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, С.Е. Пустовойтов, "Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем биллиардными книжками с потенциалом Гунка" // *Чебышевский сб.*, 22:5 (2021), 44–57.
- [63] Г.В. Белозеров, "Топологическая классификация биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками" // *Матем. сб.*, 213:2 (2022), 3–36.
- [64] A.T. Fomenko, "The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom", *Adv. in Sov. Maths.*, v. 6, 1991, p. 1–36.
- [65] А.А. Ошемков, "Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей" // *Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем*, Сборник статей // *Тр. МИАН*, **205**, Наука, М., 1994, 131–140.
- [66] С.С. Николаенко, "Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях" // *Матем. сб.*, 211:8 (2020), 68–101.
- [67] A.T. Fomenko, "Theory of rough classification of integrable non-degenerate Hamiltonian differential equations on four-dimensional manifolds. Application to classical mechanics", - In: "Topological Classification of Integrable Systems" // *Adv. in Sov. Math.*, v.6, 1991. AMS Providence, RI, pp. 305-345.
- [68] А.Т. Фоменко, "Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях" // *Функц. анализ и его прил.*, 25:44 (1991), 23–35.
- [69] А.Т. Фоменко, "Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем" // *Известия АН СССР. Серия Матем.* т.55, No.4, 1991, 747–779.
- [70] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, "О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике" // *Доклады АН СССР*, 294:2 (1987), 283–287.
- [71] A.T. Fomenko. "Symplectic Geometry", 2nd edition., — Gordon and Breach, 1995.
- [72] A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, "Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification" — CHAPMAN & HALL/CRC. A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. USA, 2004.
- [73] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, "Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы" // *Известия РАН, серия Матем.*, 81:4, 2017, 20–67.
- [74] M.P. Kharlamov, "Topological Analysis of Integrable Problems of Rigid Body Dynamics" // *LSU Publ. Leningrad*, 1988, pp. 200.
- [75] P.V. Morozov, "The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case" // *Sb. Math.*, 193:10. (2002), 1507–1533
- [76] P.V. Morozov, "Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff's equations" // *Sb. Math.*, 195:3 (2004), 369–412.
- [77] N.S. Slavina, "Topological classification of systems of Kovalevskaya-Yehia type" // *Sb. Math.*, 205:1. (2014), 101-155.

- [78] A.T. Fomenko, E.O. Kantonistova. “Topological Classification of Geodesic Flows on Revolution 2-Surfaces with Potential”. - Cont. Distr. Syst. II. Th. Appl., Chap. 2, pp.11-17. Eds: Viktor A.Sadovnichiy, Mikhail Z.Zgurovsky. Springer, Cham, 2015.
- [79] Д.С. Тимонина, “Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков в потенциальном поле на двумерных многообразиях вращения: торе и бутылке Клейна”, Матем. сб., 209:11 (2018), 103–136
- [80] Е.А. Кудрявцева, А.А. Ошемков, “Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения”, Чебышевский сборник, 21:2 (2020), 244–265
- [81] Е.О. Кантонистова, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле”, Матем. сб., 207:3 (2016), 47–92.
- [82] И.К. Козлов, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ ”, Матем. сб., 205:4 (2014), 79–120.
- [83] V.A. Kibkalo “The Topology of the Analog of Kovalevskaya Integrability Case on the Lie Algebra $SO(4)$ Under Zero Area Integral” // Moscow Univ. Math. Bull., 71:3 (2016), 119–123
- [84] V.A. Kibkalo, “Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ” // Lobachevskii J. Math., 39:9 (2018), 1396–1399.
- [85] V.A. Kibkalo, “Topological Classification of Liouville Foliations for the Kovalevskaya Integrable Case on the Lie Algebra $SO(4)$ ” // Sb. Math., 210:5 (2019), 625–662.
- [86] М.Р. Kharlamov, P.E. Ryabov, A.Yu. Savushkin, “Topological atlas of the Kowalevski-Sokolov top” // Regul. Chaotic Dyn., 21:1 (2016), 24–65.
- [87] V.A. Kibkalo, “Topological Classification of Liouville Foliations for the Kovalevskaya Integrable Case on the Lie Algebra $SO(3, 1)$ ” // Topol. Appl., 275 (2020), 107028
- [88] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces” // Rus. J. of Math. Phys., 23:4 (2016), 431–454.
- [89] V.A. Kibkalo, “Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras” // Moscow Univ. Math. Bull., 75:6 (2020), 263–267.
- [90] С.Л. Табачников, “Внешний бильярд” // Матем. просв., сер. 3, 5 (2001), 125–135
- [91] A.A. Glutsyuk, E.I. Shustin, “On polynomially integrable planar outer billiards and curves with symmetry property” // Math. Annalen, 372 (2018), 1481–1501
- [92] С.Л. Табачников, “Геометрия и бильярды”, — М.-Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
- [93] В. Драгович, М. Раднович, “Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе”, — М.; Ижевск, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010
- [94] A. Plakhov, V. Roshchina, “Invisibility in Billiards is Impossible in an Infinite Number of Directions” // J. of Dynam. and Control Syst., 25:4 (2019), 671–679.
- [95] K. Fraczek, V. Rom-Kedar, “Non-uniform ergodic properties of Hamiltonian flows with impacts” // Ergodic Theory and Dynamical Systems, First View, pp. 1 - 63, DOI:10.1017/etds.2021.106, 2021.
- [96] Г. Хуан, В. Калошин, “Интегрируемые деформации строго выпуклых интегрируемых бильярдов принадлежат конечномерным многообразиям”, Mosc. Math. J., 19:2 (2019), 307–327
- [97] A.V. Bolsinov, A.P. Veselov, Y. Ye, “Chaos and integrability in $SL(2, \mathbb{R})$ -geometry” // Rus. Math. Surveys, 76:4 (2021), 3–36,
- [98] A.V. Bolsinov, I.A. Taimanov, “Integrable geodesic flows with positive topological entropy” // Inventiones Mathematicae, 140:3 (2000), 639–650.

- [99] A.V. Bolsinov, I.A. Taimanov, “On an example of an integrable geodesic flow with positive topological entropy” // *Rus. Math. Surveys*, 54:4 (1999), 833–834.
- [100] V.V. Vedyushkina, “Orbital invariants of flat billiards bounded by arcs of confocal quadrics and containing focuses” // *Moscow Univ. Math. Bull.*, 76:4 (2021), 177–180.
- [101] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Топологические препятствия к реализуемости биллиардами интегрируемых гамильтоновых систем” // *ДАН.*, 488:5 (2018), 103–107.
- [102] Г. Хагигатдуст, А.А. Ошемков, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(4)$ ” // *Матем. сб.*, 200:6 (2009), 119–142.
- [103] Д.В. Новиков, “Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ ” // *Матем. сб.*, 205:8 (2014), 41–66.
- [104] A.A. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations”, *AMS*, V. 4, pp. 67–146. (1991)
- [105] В.Н. Колокольцов, “Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом” // *Известия АН СССР. Сер.матем.* 46:5 (1982), 994–1010.
- [106] В.С. Матвеев, “Квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе и бутылке Клейна” // *Регул. хаот. динам.*, 2:1 (1997), 96–102.
- [107] И.К. Бабенко, Н.Н. Нехорошев, “О комплексных структурах на двумерных торах, допускающих метрики и нетривиальным квадратичным интегралом” // *Мат. заметки*, 58:5 (1995), 643–652.
- [108] Е.Н. Селиванова, “Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности” // *Матем. сб.*, 183:4 (1992), 69–86
- [109] В.В. Калашников (мл.), “Топологическая классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе” // *УМН*, 50:1 (1995), 201–202.
- [110] Т.З. Нгуен, Л.С. Полякова, Е.Н. Селиванова, “Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом на двумерных ориентируемых римановых многообразиях” // *Функц. анализ*, 27:3 (1993), 42–56.
- [111] В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов, “Реализация геодезических потоков с линейным интегралом биллиардами с проскальзыванием” // *Матем. сб.*, 213:12 (2022), 31–52.
- [112] В.В.Ведюшкина, С.Е.Пустовойтов, “Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических биллиардов в магнитном поле” // *Матем. Сб.*, 2023.
- [113] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina, “Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field” // *Rus. J. Math. Phys.*, 26:3 (2019), 320–333.
- [114] В. Драгович, М. Раднович, “Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского” // *Фундам. прикл. матем.*, 20:2 (2015), 51–64.
- [115] Е.Е. Каргинова, “Слоение Лиувилля топологических биллиардов на плоскости Минковского” // *Фундам. прикл. матем.*, 22:6 (2019), 123–150.
- [116] Е.Е. Каргинова, “Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского” // *Матем. сб.*, 211:1 (2020), 3–31.
- [117] В.В. Ведюшкина, А.И. Скворцов, “Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуксовским потенциалом” // *Вестн. Москов. универ. Серия 1: Матем. Механ.*, 2022, № 1, 8–19.
- [118] V. Dragović, M. Radnović, “Pseudo-integrable billiards and arithmetic dynamics” // *Modern Dynamics*, 8:1 (2014), 109–132.
- [119] V. Dragović, M. Radnović, “Pseudo-integrable billiards and double-reflection nets” // *Russ. Math. Surveys*, 70:1 (2015), 1–31.

- [120] V. Dragović, M. Radnović, “Periods of pseudo-integrable billiards” // *Arnold Math.*, 1:1 (2015), 69–73.
- [121] В.А. Москвин, “Топология слоений Лиувилля интегрируемого бильярда в невыпуклых областях” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2018, 3, 21–29.
- [122] В.А. Москвин, “Алгоритмическое построение двумерных особых слоев атомов бильярдов в невыпуклых областях” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020, 3, 3–12.
- [123] И.Ф. Кобцев, “Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ” // *Матем. сб.*, 211:7 (2020), 93–120.
- [124] V.I. Dragovich, “Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse” // *J. Appl. Maths Mechs*, 62:1 (1998), 159–162.
- [125] И.Ф. Кобцев, “Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2018, 2, 27–33.
- [126] V. Dragović, S. Gasiorek, M. Radnović, “Billiard Ordered Games and Books” // *Regul. Chaotic Dyn.*, 27:2 (2022), 132–150.
- [127] С.Е. Пустовойтов, “Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле” // *Матем. сборник*, 212:2 (2021), 81–105.
- [128] V. Lazutkin, “KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions”, — Springer, Berlin, 1993.
- [129] M. Robnik, M. V. Berry, “Classical billiards in magnetic fields” // *J. Phys. A*, 18:9, (1985), 1361–1378.

А.Т.Фоменко (A. T. Fomenko)

акад. РАН, зав. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ

E-mail: atfomenko@mail.ru

В.В.Ведюшкина (V. V. Vedyushkina)

д.ф.-м.н., проф. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ

E-mail: arinir@yandex.ru