

УДК 517.938.5

Траекторные инварианты плоских бильярдov, ограниченных дугами софокусных квадрик и содержащих фокусы.

В. В. Ведюшкина¹

Вычислены функции вращения для плоских бильярдov, ограниченных дугами софокусных квадрик и содержащих фокусы. Также вычислены траекторные инварианты Болсинова-Фоменко данных динамических систем.

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярд, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко-Цишанга, траекторная эквивалентность.

The rotation functions for flat billiards bounded by arcs of confocal quadrics and containing focuses are calculated. The orbital Bolsinov-Fomenko invariants of these dynamical systems are also calculated.

Key words: integrable system, billiard, Liouville equivalence, Fomenko-Zieschang invariant, orbital equivalence.

Фиксируем в \mathbb{R}^3 семейство софокусных коник следующим соотношением

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda} = 1.$$

Здесь λ – параметр коники, а $a > b > c > 0$ – параметры семейства. Рассмотрим задачу Якоби – геодезический поток на эллипсоиде, заданном соотношением $\lambda = 0$. Согласно теореме Якоби-Шаля, такая динамическая система интегрируема: касательные к геодезической линии эллипсоида касаются фиксированного гиперboloида – однополостного или двуполостного, принадлежащего описанному выше семейству квадрик. Параметр λ этой квадрики и является дополнительным интегралом динамической системы. Инвариант Фоменко-Цишанга лиувиллевой эквивалентности этой динамической системы, а также траекторные инварианты были вычислены в работе [1] А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко. На рис. 1 изображен результат – меченая молекула Фоменко-Цишанга, на ребрах и седловом атоме которой указаны траекторные инварианты. Согласно Дж.Д. Биркгофу [2] при стремлении к нулю c – параметра малой полуоси эллипсоида

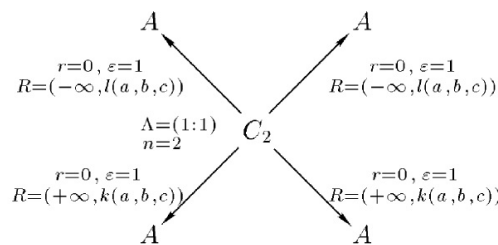


Рис. 1: Топологический траекторный инвариант задачи Якоби – геодезического потока на эллипсоиде.

¹Ведюшкина Виктория Викторовна – канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: arinir@yandex.ru.

Vedyushkina Viktoria – candidate of physical and mathematical sciences, assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Application.

— геодезические на нем переходят в траектории бильярда в эллипсе. При этом, траектории, лежащие на торах, соответствующие однополостным гиперболоидам перейдут в траектории бильярда, касающиеся эллипсов, а траектории, лежащие на торах, соответствующих двуполостным гиперболоидам — гиперболам. Отметим, что строго говоря, траектория “помнит” на какой половине эллипсоида (верхней или нижней) она была до этого преобразования. Поэтому можно говорить, что в этом случае геодезический поток эллипсоида непрерывно траекторно эквивалентен топологическому бильярду, склеенному из двух дисков, ограниченных эллипсом, принадлежащему семейству софокусных квадрик с параметрами a , b , заданных на плоскости Oxy соотношением

$$x^2(b + \lambda) + y^2(a + \lambda) = (a + \lambda)(b + \lambda).$$

Спроектируем траектории бильярда из пары склеенных эллипсов в траектории бильярда в эллипсе. Тогда “эллиптические” торы топологического бильярда двулистно накроют “эллиптические” торы плоского бильярда. Для “гиперболических” торов ситуация иная — в этом случае по траектории на эллипсе можно однозначно восстановить траекторию на фиксированном торе геодезического потока. Отсюда можно сделать вывод, что в базисе $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$ функция вращения на торах Лиувилля будет записана следующим образом (здесь λ_1 , λ_2 — эллиптические координаты на плоскости):

$$\widetilde{\rho}(t) = \frac{\int_{-t}^0 \Phi(u, t) du}{2 \int_{-a}^{-b} \Phi(u, t) du} \quad \text{при } 0 \leq t \leq b, \quad \widetilde{\rho}(t) = \frac{\int_{-a}^0 \Phi(u, t) du}{\int_{-a}^{-t} \Phi(u, t) du} \quad \text{при } b \leq t \leq a,$$

где функция $\Phi(u, t)$ имеет следующий вид

$$\Phi(u, t) = \sqrt{\frac{1}{(u + a)(u + b)(u + t)}}.$$

Эти формулы получены из формул для геодезического потока в эллипсоиде. Так как торы и траектории этой системы накрывают двулистно торы и траектории бильярда в эллипсе, при этом цикл, соответствующий циклу $\lambda_1 = 0$ переходит в себя, а цикл, соответствующий циклу $\lambda_2 = 0$ накрывает его двулистно. Это приводит к тому, что первая функция получена из соответствующей функции задачи Якоби делением на два. Эти же функции были непосредственно вычислены в книге В.В. Козлова и Д.В. Трещева [3], используя разделение переменных. Там, однако, было произведено интегрирование не по целому циклу $\lambda_2 = 0$, а его половине.

Лемма 1. *Функция вращения $\rho(t)$ на всех трех ребрах молекулы W^* бильярда в эллипсе строго монотонна. В частности, вектор вращения на каждом ребре полностью определяется двумя числами C пределами функции вращения на концах ребра. При стремлении к седловому атому B предел функций равен “плюс бесконечности” на нижних и “минус бесконечности” на верхних ребрах. При стремлении к минимаксным атомам на нижних ребрах равен 0, а на верхнем*

$$l(a, b) = -1 - \frac{\int_{-b}^0 \Phi(u, a) du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u, a) du}.$$

Доказательство. Воспользуемся техникой и результатами статьи [1], в которой вычислены траекторные инварианты задача Якоби. Инвариант Фоменко–Цишанга для бильярда в эллипсе был вычислен в работах автора [4, 5], там же явно были указаны матрицы склейки. Для вычисления функции вращения, участвующей в построении траекторного инварианта [6], необходимо переписать функцию вращения $\widetilde{\rho}(t)$ в базисе из двух циклов (λ^- , λ^+) на торе, где λ^- — цикл, возникающий из критической седловой окружности атома C_2 а цикл λ^+ — это исчезающий цикл, т.е. цикл, стягивающийся в точку, когда тор стремится к концевому атому A (данного ребра). При этом если

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 = \text{const} \\ \lambda_2 = \text{const} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \lambda^+ \end{pmatrix}$$

то

$$\rho = (\rho' c_1 + c_3) / (\rho' c_2 + c_4).$$

Как показано в работе [5] на нижних ребрах цикл λ^+ совпадает с циклом λ_2 , а цикл $\lambda^- = \lambda_1 + 2\lambda_2$. Отсюда получаем, при $0 \leq t \leq b$ следующие соотношения на функцию вращения:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{\tilde{\rho}}{1 - 2\tilde{\rho}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - 2\tilde{\rho})} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(1 - \frac{\int_{-t}^0 \Phi(u,t)du}{\int_{-a}^{-b} \Phi(u,t)du}\right)} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\int_{-a}^{-b} \Phi(u,t)du}{2\left(\int_{-a}^{-b} \Phi(u,t)du - \int_{-t}^0 \Phi(u,t)du\right)}. \end{aligned}$$

Отметим, что предел этой функции при $t \rightarrow 0$ равен 0. Покажем монотонность функции $\rho(t)$ при $0 < t < b$. Имеем $\rho'(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-2\tilde{\rho})}\right)' = \frac{\tilde{\rho}'}{(1-2\tilde{\rho})^2}$. монотонность функции $\rho(t)$ следует теперь из монотонности функции $\tilde{\rho}$.

На единственном верхнем ребре молекулы функция вращения совпадает с таковой для случая “плоского” эллипсоида в следствие непрерывной траекторной эквивалентности. Поэтому на верхнем ребре молекулы имеем

$$\rho(t) = -1 - \frac{\int_{-b}^0 \Phi(u,t)du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u,t)du} \quad \text{при } b \leq t \leq a.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Функция вращения $\rho(t)$ на обоих ребрах молекулы W^* бильярда, ограниченного эллипсом с параметром $\lambda = 0$ и гиперболой с параметром $\lambda = -\tilde{\lambda}$ строго монотонна. В частности, вектор вращения на каждом ребре полностью определяется двумя числами — пределами функции вращения на концах ребра. При стремлении к седловому атому A^* предел функций равен “плюс бесконечности” на нижних и “минус бесконечности” на верхних ребрах. При стремлении к минимаксным атомам ребрах пределы конечны. На нижнем ребре предел равен*

$$k(a, b, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\int_{-\tilde{\lambda}}^{-b} \Phi(u, 0)du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u, 0)du} - 1 \right),$$

a на верхнем ребре

$$l(a, b, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{\int_{-b}^0 \Phi(u, \tilde{\lambda})du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u, \tilde{\lambda})du} \right).$$

Доказательство. Рассмотрим бильярд в половине эллипса, а именно, бильярд, ограниченный эллипсом с параметрами a, b и прямой $x = 0$ (вырожденный случай гиперболы, соответствующей значению параметра $\lambda = -a$). Траектории бильярда в эллипсе накрывают траектории такого бильярда естественным образом. При этом на эллиптическом уровне каждой траектории соответствует однозначно определенная траектория в эллипсе на фиксированном торе, а на гиперболическом — две. Если посмотреть на торы Лиувилля, фиксировав на них базис ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$) то в этом базисе эллиптические торы преобразуются тождественно, а на гиперболическом цикл $\lambda_1 = 0$ в эллипсе двулистно накрывает соответствующий цикл в половине эллипса. В результате рассуждений, аналогичных рассуждениям выше, имеем

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\int_{-a}^{-b} \Phi(u,t)du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u,t)du} - 1 \right) \quad \text{при } 0 \leq t \leq b, \quad \rho(t) = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{\int_{-b}^0 \Phi(u,t)du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u,t)du} \right) \quad \text{при } b \leq t \leq a.$$

Если же бильярд ограничен гиперболой с параметром $\lambda = -\tilde{\lambda}$ то формулы примут следующий вид

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\int_{-\tilde{\lambda}}^{-b} \Phi(u,t)du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u,t)du} - 1 \right) \quad \text{при } 0 \leq t \leq b, \quad \rho(t) = \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{\int_{-b}^0 \Phi(u,t)du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u,t)du} \right) \quad \text{при } b \leq t \leq \tilde{\lambda}.$$

Теорема. Топологический траекторный инвариант, т.е. t -молекула плоского интегрируемого бильярда, ограниченного дугами софокусных квадрик и содержащего фокусы изображена на рис. 2, а) для бильярда, ограниченного эллипсом и рис. 2, б) для бильярда, ограниченного эллипсом и гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$.

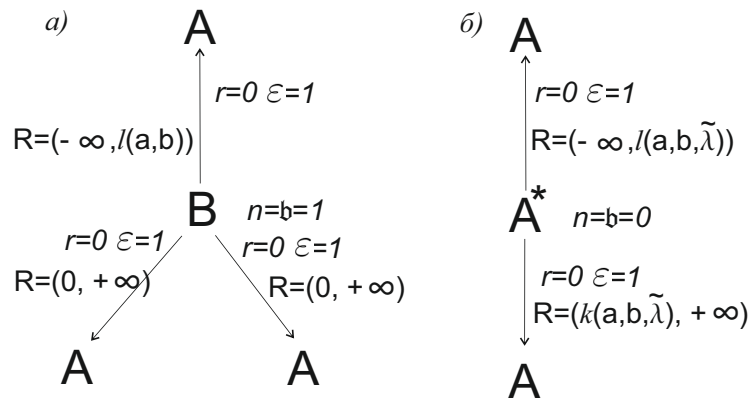


Рис. 2: Топологический траекторный инвариант бильярда, ограниченного эллипсом (а), бильярда, ограниченного эллипсом и гиперболой с параметром $\tilde{\lambda}$ (б).

В заключение отметим, что ранее для интегрируемых бильярдов функции вращения неоднократно вычислялись (см., например, книгу В. Драговича и М. Раднович [7]), однако не была вычислена полная t -молекула.

Автор приносит благодарность А.Т. Фоменко за множество ценных замечаний и внимание к работе. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01303) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т., Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела. // Функ. анализ и прил., 1995. **29**, №3. 1–15.
2. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
3. Козлов В.В., Трещев Д.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
4. Фокичева В.В. Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе” // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2012. №5. 31–34.
5. Фокичева В.В. Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб., 2015. **206**, №10. 127–176.
6. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
7. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.: Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010.

Поступила в редакцию
08.11.2019