

УДК 517.938.5

## Топология изоэнергетических 5-поверхностей трёхмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука

Г. В. Белозеров<sup>1</sup>

Рассматривается бильярд внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука (как притягивающим, так и отталкивающим). Для каждой зоны небифуркационных значений энергии определен класс гомеоморфности соответствующей изоэнергетической 5-поверхности в фазовом пространстве. Данный результат не использует интегрируемость бильярда. Следуя методу В. В. Козлова, также приведен явный вид  $n$  находящихся в инволюции первых интегралов для многомерного обобщения рассмотренной задачи: для бильярда с потенциалом Гука внутри  $n$ -осного эллипсоида в  $n$ -мерном пространстве.

*Ключевые слова:* интегрируемая система, гамильтонова система, бильярд, интегрируемый бильярд, геодезический поток, софокусные квадрики, топологические инварианты, слоение Лиувилля, изоэнергетическая поверхность.

Billiard inside a triaxial ellipsoid in a Hooke potential field (both attractive and repulsive) is considered. For every zone of non-bifurcational values of the energy the homeomorphism class of the corresponding isoenergy 5-surface in the phase space is determined. This result was obtained without using the integrability of the system. Following the V. V. Kozlov method we also show an explicit form of  $n$  involutive first integrals for the multidimensional generalization of studied problem, i.e. the billiard in a Hooke potential field inside an  $n$ -axial ellipsoid in  $n$ -dimensional space.

*Key words:* integrable system, Hamiltonian system, billiard, integrable billiard, geodesic flow, confocal quadrics, topological invariants, Liouville foliation, isoenergy surface.

**1. Введение.** Применение теории Морса к изучению гамильтоновых систем было во многом мотивировано программной работой С. Смейла [1]. Фазовое пространство многих таких систем является двойственным пространством к некоторой алгебре Ли, например,  $e(3)$ , и естественным образом расслаивается на изоэнергетические поверхности. Так называют совместные поверхности уровня энергии  $H$  и функций Казимира алгебры Ли (во многих задачах из динамики твердого тела это геометрический интеграл и интеграл площадей). В рассматриваемом нами случае под ними понимаем множество уровня энергии  $H = h$  в фазовом пространстве.

Наличие критических точек  $dH|_x = 0$  зачастую влечет различие классов гомеоморфности  $Q_h^3$  гамильтоновой системы  $v = \text{sgrad } H$  для  $h$ , лежащих по разные стороны от значения  $h_0 = H(x)$ .

В случае интегрируемости системы оказалось возможно провести более тонкий анализ системы. Аналог теории Морса для интегрируемых гамильтоновых систем был построен в работах А. Т. Фоменко [2, 3]. На ее основе, совместно с соавторами и учениками, была построена теория топологической классификации таких систем, см. [4] и, подробнее, монографию [5]. Данная теория была применена к различным интегрируемым системам из механики и математической физики, что позволило обнаружить ряд взаимосвязей между ними с точки зрения топологии замыканий их решений, см. например, [6, 7].

В последние годы данную теорию успешно применили к изучению интегрируемых бильярдов, ограниченных софокусными квадриками, см. программную работу А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной [8]. В ней был сформулирован ряд актуальных задач по топологии интегрируемых бильярдов и перечислены недавно достигнутые результаты в этих направлениях, см. также последующие работы [9-11]. При этом А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной были введены и рассмотрены новые классы интегрируемых бильярдов: топологические бильярды [12, 13], бильярдные книжки [14], бильярды с проскальзыванием [15], эволюционные силовые бильярды [16, 17]. Отметим, что в большинстве этих работ изучаются свойства слоений на изоэнергетических 3-поверхностях для кусочно-плоских бильярдов.

<sup>1</sup> Белозеров Глеб Владимирович — студент. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb0511beloz@yandex.ru.

Belozerov Gleb Vladimirovich — master student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Тем не менее, многие поставленные в [8] задачи связаны с объектами, имеющими большую чем 3 размерность или нетривиальную метрику. Таковы, например, геодезические потоки на квадраках в  $\mathbb{R}^3$ , изученные Г. В. Белозеровым в [18], или промоделированные бильярдами интегрируемые геодезические потоки на сфере и торе, см. [19]. Бильярды в трехмерных областях изучались В. Драговичем и М. Раднович в [20] и Г. В. Белозеровым в [21]. Другой интересной темой является моделирование бильярдами особенностей ранга 0 (окрестностей слоев с положениями равновесия, классифицированных в [22]) отображения момента в системах с 2 степенями свободы, см. [23].

Еще один важный класс бильяров получается добавлением потенциала или магнитного поля. В бильярдах с потенциалом слоевание на  $Q_h^3$  может существенно зависеть от  $h$ , см. [24-26]. Весьма близка к ним и работа [27]: бильярд в эллипсе получается как результат предельного перехода от системы геодезического потока на эллипсоиде при стремлении малой полуоси к нулю.

**2. Постановка задачи и основные результаты.** Рассмотрим движение частицы в поле потенциала Гука внутри эллипсоида  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ , заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad \text{где } 0 < c < b < a.$$

Указанную область в  $\mathbb{R}^3$  назовем *бильярдным столом* и обозначим  $D$ .

*Бильярдом* назовем следующую динамическую систему. Пусть материальная точка единичной массы движется внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$  под действием упругой силы коэффициента  $k$ , чей центр совпадает с центром эллипсоида. Указанную силу и соответствующий гуковский потенциал назовем *отталкивающим* или *притягивающим* в случаях  $k < 0$  и  $k > 0$  соответственно.

Фазовое пространство системы  $M^6 = T^*D / \sim$  задается склейкой границ, соответствующей закону отражения частицы от  $\mathcal{E}$ :

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \quad x_1 = x_2 = x, \quad |v_1| = |v_2|, \quad (v_1 - v_2) \perp T_x^* \mathcal{E} \subset T_x^* D.$$

Иными словами, склеиваются пары “точка-вектор”  $(x, v_1)$ ,  $(x, v_2)$ , у которых вектор  $v_1$  получен из  $v_2$  упругим отражением относительно касательной плоскости  $T_x \mathcal{E}$  с равенством углов падения и отражения. Фазовое пространство, заметим, является лишь кусочно-гладким многообразием: имеются склейки “далеких” точек.

Полная механическая энергия материальной точки имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Заметим, что эта функция является первым интегралом бильярда. Действительно, полная механическая энергия является первым интегралом задачи без отражения, а поскольку отражение от  $\mathcal{E}$  абсолютно упругое, то  $H$  является первым интегралом рассматриваемой системы. Рассматриваемый нами бильярд является кусочно-гладкой интегрируемой гамильтоновой системой. В третьем пункте мы обсудим бильярд внутри  $n$ -осного эллипсоида в  $n$ -мерном пространстве и приведем вид набора первых интегралов, удобный для наших последующих исследований.

Непустое множество  $Q_h = \{(x, v) \in M^6 | H(x, v) = h\}$  назовем *изоэнергетической поверхностью*, а соответствующее ему значение  $h$  *допустимым значением* энергии. Заметим, что при  $k > 0$  множество допустимых значений энергии — это промежуток  $[0; +\infty)$ , а при  $k < 0$  — промежуток  $[ka/2; +\infty)$ .

Рассмотрим проекцию  $\pi : M^6 \rightarrow D$  из фазового пространства на конфигурационное. Она определена корректно, т.к. пары “точка-вектор” с  $x_1 \neq x_2$  не склеиваются друг с другом. *Область возможного движения*, соответствующей значению  $h$ , назовем образ  $Q_h$  под действием  $\pi$ , т.е. проекцию изоэнергетической поверхности на бильярдный стол.

Заметим, что при  $k > 0$  область возможного движения есть шар радиуса  $\sqrt{2h/k}$ , пересеченный с бильярдным столом. При  $k < 0$  область возможного движения — либо внешность шара радиуса  $\sqrt{2h/k}$ , пересеченного с бильярдным столом (при  $h \leq 0$ ), либо весь бильярдный стол (при  $h > 0$ ). При  $hk > 0$  сферу радиуса  $\sqrt{2h/k}$  будем называть *граничной сферой*. Действительно, эта сфера входит в состав границы области возможного движения, при этом векторы из  $Q_h$  в точках граничной сферы — нулевые.

**Определение 1.** *Значение (уровень) энергии  $h$  будем называть бифуркационным, если либо  $h = 0$ , либо соответствующая граничная сфера касается эллипсоида  $\mathcal{E}$ . Иначе уровень энергии назовем небифуркационным.*

Заметим, что граничная сфера касается эллипсоида  $\mathcal{E}$  в том и только том случае, когда одна из его полуосей совпадает с радиусом граничного шара. Таким образом, особыми уровнями энергии являются:  $h = 0$ ,  $h = ka/2$ ,  $h = kb/2$  и  $h = kc/2$ .

**Замечание.** Если мы рассмотрим задачу без отражения, то  $dH|_{(x,\dot{x})=(x_0,\dot{x}_0)} = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_0 = 0$  и  $\dot{x}_0 = 0$ . Следовательно, в задаче без отражения только  $h = 0$  является особым уровнем энергии. В задаче с отражением, помимо  $h = 0$ , мы объявили бифуркационными (особыми) уровни  $h = ka/2, kb/2, kc/2$ , потому что вид области возможного движения различается для значений энергии из левой и правой окрестности таких значений.

Оказывается, если  $h$  — небифуркационный уровень энергии, то соответствующая ему изоэнергетическая поверхность гомеоморфна либо несвязному объединению сфер  $S^5$ , либо  $S^1 \times S^4$ , либо  $S^2 \times S^3$ . Мы докажем следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $h$  — небифуркационное значение энергии  $H$ , тогда:

1. если  $k > 0$ , то изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  гомеоморфна сфере  $S^5$ ,
2. если  $k < 0$ , то изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  гомеоморфна

- несвязному объединению двух пятимерных сфер  $S^5$  при  $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$ ;
- прямому произведению окружности и четырехмерной сферы  $S^1 \times S^4$  при  $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$ ;
- прямому произведению двумерной и трехмерной сфер  $S^2 \times S^3$  при  $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$ ;
- пятимерной сфере  $S^5$  при  $h \in (0, +\infty)$ .

Следовательно, если  $a = b = c$ , то в случае  $k > 0$  изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  неособого уровня энергии гомеоморфна сфере  $S^5$ , при  $k < 0$  и  $h \in \left(ka/2, 0\right)$  — прямому произведению сфер  $S^2 \times S^3$ . В случае  $k < 0$  и  $h > 0$  — сфере  $S^5$ .

Доказательству этой теоремы посвящен четвертый пункт.

В сформулированной и доказанной ниже основной теореме мы не используем явно интегрируемость бильярда. Класс гомеоморфности  $Q^5$  полностью определяется классом гомеоморфности области возможного движения, т.е. проекции изоэнергетической поверхности  $Q_h^5$  на стол — на конфигурационное пространство системы. Такой эффект уже встречался ранее:

- Если стол плоского компактного бильярда гомеоморфен диску, то  $Q_h^3$  бильярда гомеоморфна сфере  $S^3$  для любого конечного числа точек негладкости границы, см. [28].
- Для трехмерных бильярдных систем без потенциала (в случае  $k = 0$  и  $h > 0$  можно) класс гомеоморфности  $Q_h^5$  определялся только классом гомеоморфности стола (совпадающего с областью возможного движения) и не зависит от выбора  $h > 0$ , см. [21].

Вообще, вопрос о классе гомеоморфности  $Q_h$  в бильярдах нетривиален. Например, для систем на бильярдных книжках — кусочно-плоских клеточных комплексах с перестановками [14], факт того, что  $Q_h^3$  является многообразием, показан в [29].

Из теоремы и несложной проверки следует, что бильярд с притягивающим потенциалом Гука внутри эллипсоида имеет не критические значения  $H = h_i$ , являющиеся бифуркационными. По разные стороны от них класс гомеоморфности  $Q^5$  различается. Заметим, что при этих значениях меняется класс гомеоморфности области возможного движения, т.е. проекции изоэнергетической поверхности  $Q_h^5$  на стол (конфигурационное пространство).

Напомним, что схожая ситуация имеет место в более простой системе. Класс гомеоморфности  $Q_h^3$  системы бильярда внутри эллипса  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$  с потенциалом Гука  $\frac{k}{2}(x^2 + y^2)$  не зависит от выбора  $h > 0$  в случае притягивающего потенциала, т.е. если  $k > 0$ . В то же время, в случае  $k < 0$  этот класс меняется при переходе энергии через каждое из трех значений:  $ka/2 < kb/2 < 0$ .

Данный факт имеет следующее объяснение. При предельном переходе (путем устремления малой полуоси к нулю) от геодезического потока на эллипсоиде к бильярду мы “теряем” половину фазового пространства, соответствовавшую верхней или нижней половине эллипсоида. До перехода к пределу класс

гомеоморфности области возможного движения для системы потока на эллипсоиде  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ , где  $0 < c < b < a$ , в поле притягивающего потенциала Гука  $\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$  меняется при достижении  $h = \frac{kb}{2}$ . При этом две компоненты связности, лежащие на верхней и нижней половинах эллипсоида, пересекаются по двум точкам — концам средней полуоси. После предельного перехода ситуация меняется: указанная область для плоского бильярда гомеоморфна диску при каждом  $h > 0$ . Бильярд с отталкивающим потенциалом отличается: в нем при  $h = kb/2$  и  $h = ka/2$  тип этой области меняется.

Иными словами, двумерный и трехмерный бильярды ведут себя схожим образом: в случае  $k > 0$  тип  $Q_h$  не зависит от  $h > 0$ , а в случае  $k < 0$  класс гомеоморфности области возможного движения меняется. Бифуркационными значениями трёхмерного бильярда оказываются  $h = 0, ka/2, kb/2, kc/2$ . Отметим также, что указанным значениям энергии потока на эллипсоиде соответствуют положения равновесия — точки, где  $dH = 0$ .

**3. Интегрируемость бильярда внутри  $n$ -осного эллипсоида.** К. Якоби в работе [30] указал  $n - 1$  первый интеграл геодезического потока на поверхности  $n - 1$ -мерного эллипсоида. А именно, он доказал, что касательные, проведенные к каждой точке геодезической на эллипсоиде, касаются  $n - 2$  квадрат, софокусных с данным эллипсоидом. Интегралами являются параметры этих квадрат и энергия частицы. Они функционально независимы [31] и находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона, что несложно проверить. Иными словами, данная система является вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с  $n - 1$  степенью свободы согласно определению из [5].

В той же работе [30] Якоби проинтегрировал и более общую задачу, когда движение по эллипсоиду происходит под действием центральной упругой силы, центр которой совпадает с центром эллипсоида.

Рассмотрим эту задачу для  $n$ -мерного эллипсоида в  $n + 1$ -мерном пространстве и выполним переход от нее к бильярду. Устремив меньшую полуось к нулю, получим бильярд внутри  $n - 1$ -мерного эллипсоида в  $n$ -мерном пространстве. Интегрируемость этой кусочно-гладкой гамильтоновой системы следует из результата Якоби [30].

Следуя методу В. В. Козлова, укажем явный вид ее интегралов. Сначала мы приведем первые интегралы  $I_k$  задачи без потенциала, то есть при  $k = 0$ , а затем вычислим первые интегралы  $F_k$  нашей задачи, считая, что  $F_k = I_k + f_k$ , где функции  $f_k$  зависят только от пространственных переменных.

Рассмотрим бильярд с потенциалом Гука внутри эллипсоида, заданного уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \dots + \frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}} = 1, \quad a_1 > a_2 > \dots > a_{n+1} > 0.$$

Пусть сначала  $k = 0$ . В этом случае найдутся  $n - 1$  софокусных с эллипсоидом квадрат, которых одновременно касаются все прямые, содержащие звенья произвольной выбранной траектории бильярдного шара. Приведем неявное выражение параметров этих квадрат через координаты точек и направляющих векторов. Будем считать, что параметр  $\lambda$  у эллипсоида  $\frac{x_1^2}{a_1} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1$  равен нулю. Рассмотрим прямую, проходящую через точку  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  в направлении вектора  $v = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ . Эта прямая касается софокусной с эллипсоидом квадратики параметра  $\lambda$  в том и только том случае, когда дискриминант квадратного относительно  $\tau$  уравнения

$$\frac{(x_1 + \tau \dot{x}_1)^2}{a_1 - \lambda} + \frac{(x_2 + \tau \dot{x}_2)^2}{a_2 - \lambda} + \dots + \frac{(x_n + \tau \dot{x}_n)^2}{a_n - \lambda} = 1$$

равен нулю. Это равносильно тому, что:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\dot{x}_i^2}{a_i - \lambda} - \sum_{i < j} \frac{(x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i)^2}{(a_i - \lambda)(a_j - \lambda)} = 0.$$

Пусть  $K_{ij} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i$ . Перепишем последнее уравнение, домножив его на  $(a_1 - \lambda) \dots (a_n - \lambda)$ .

$$\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \prod_{j \neq i} (a_j - \lambda) - \sum_{i < j} K_{ij}^2 \prod_{k \neq i, j} (a_k - \lambda) = 0$$

Заметим, что все корни этого уравнения вещественные и являются первыми интегралами. Также заметим, что коэффициент при старшей степени этого уравнения пропорционален энергии, то есть является первым интегралом. Следовательно, по теореме Виета коэффициенты при всех степенях многочлена

слева являются первыми интегралами. Поскольку по теореме Абеля уравнение степени 5 и выше, вообще говоря, не разрешимо в радикалах, то вместо параметров квадратик и энергии рассмотрим в качестве первых интегралов коэффициенты при всех степенях этого многочлена.

Обозначим через  $\sigma_k^{ij}$  элементарный симметрический многочлен степени  $k$  от переменных  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ , а через  $\rho_k^i$  — элементарный симметрический многочлен степени  $k$  от переменных  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ . Положим  $\sigma_0^{ij} = \rho_0^i = 1$ , а  $\sigma_{-1}^{ij} = 0$ . Выпишем коэффициенты многочлена выше с точностью до константы.

$$I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_k^i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_{k-1}^{ij} K_{ij}^2, \text{ где } k = 0, \dots, n-1$$

Заметим, что  $I_0 = H$ .

Несложно убедиться, что эти первые интегралы функционально независимы и попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

Теперь приведем дополнительные первые интегралы  $F_i, i = 1, \dots, n-1$  при  $k \neq 0$ . Мы будем искать их в виде  $F_i = I_i + f_i(x, y, z)$ , где  $f_i$  — неизвестная гладкая функция, зависящая только от пространственных переменных. Пусть мы нашли  $f_i$  такую, что  $F_i$  первый интеграл задачи без отражения. Поскольку  $f_i$  зависит только от пространственных переменных,  $I_i$  — первые интегралы задачи с отражением, а при отражении меняется только направление вектора скорости, то  $F_i$  будет первым интегралом задачи с отражением. Следовательно,  $f_i$  можно искать, рассматривая  $F_i$  в качестве первого интеграла задачи без отражения. Заметим, что  $K_{ij}$  — первые интегралы задачи без отражения. Поэтому:

$$0 = \dot{F}_j = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i \dot{x}_i \rho_j^i + \partial_{x_i} f_j \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^n (-k \dot{x}_i x_i \rho_j^i + \partial_{x_i} f_j \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i (-k x_i \rho_j^i + \partial_{x_i} f_j)$$

В этом уравнении все переменные разделяются, и мы легко получаем частное решение  $f_j = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n \rho_j^i x_i^2$ . Обозначив энергию через  $F_0$ , получаем систему функционально независимых первых интегралов

$$F_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_l^i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_{l-1}^{ij} K_{ij}^2 + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n \rho_l^i x_i^2, \text{ где } l = 0, \dots, n-1$$

Можно показать, что найденные первые интегралы  $F_0, \dots, F_{n-1}$  попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

**4. Доказательство основной теоремы.** Докажем несколько лемм, из которых будет следовать утверждение теоремы.

**Лемма 1.** Пусть  $k > 0$  и  $h$  — небифуркационный уровень энергии, тогда изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  гомеоморфна сфере  $S^5$ .

**Доказательство.** Пусть  $h$  зафиксировано. Как уже было отмечено, область возможного движения есть пересечение бильярдного стола и шара, ограниченного граничной сферой. Рассмотрим сферу радиуса  $R < \min\{1, \sqrt{c}, \sqrt{2h/k}\}$ . Она разбивает область возможного движения на две компоненты, одна из которых гомеоморфна замкнутому диску  $D^3$ , а другая — прямому произведению сферы  $S^2$  и отрезка. Изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  в этом случае также разбивается на две компоненты  $Q_{h,1}, Q_{h,2}$ . Будем считать, что  $Q_{h,1}$  соответствует компоненте области возможного движения, гомеоморфной шару. Мы определим отображение  $\varphi : Q_h \rightarrow S^5$  отдельно на каждой из компонент  $Q_{h,1}, Q_{h,2}$ , а далее покажем, что оно согласовано в точках склейки  $Q_{h,1}$  и  $Q_{h,2}$  и является гомеоморфизмом. Будем предполагать, что сфера  $S^5$  стандартно вложена в  $\mathbb{R}^6$ .

Пусть  $e \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$  — единичный вектор. Тогда для любого фиксированного  $\alpha \in [0, R]$  пары  $(\alpha e, v) \in Q_{h,1}$  образуют сферу  $S^2$ , при этом квадраты длин всех таких векторов  $v$  равны  $2h - k\alpha^2$ . Положим  $\varphi(\alpha e, v) = \left(\alpha e, \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{2h - k\alpha^2}} v\right)$ . Заметим, что  $\|\varphi(\alpha e, v)\| = 1$ . Таким образом, мы определили отображение  $\varphi$  на  $Q_{h,1}$ . Отметим, что построенное отображение непрерывно на  $Q_{h,1}$  и инъективно.

Теперь продолжим  $\varphi$  на  $Q_{h,2}$ . Для произвольного единичного вектора  $e$  определим число  $g(e) > 0$  такое, что луч  $Oe$  пересекает эллипсоид  $\mathcal{E}$  в точке  $g(e)e$ . Для этого рассмотрим линейный оператор  $A(x, y, z) = (x/a, y/b, z/c)$  и соответствующую ему векторную норму  $\|e\|_A = \sqrt{\langle Ae, e \rangle}$ . Луч  $Oe$  пересекает

эллипсоид  $\mathcal{E}$  в точке  $g(e)e$  тогда и только тогда, когда  $1 = \langle Ag(e)e, g(e)e \rangle = g^2(e)\|e\|_A^2$ , то есть  $g(e) = 1/\|e\|_A$ .

Возможны два случая: луч  $Oe$  пересекает границу области возможного движения либо в точке эллипсоида  $\mathcal{E}$ , то есть  $2h - k/\|e\|_A^2 \geq 0$ , либо в точке граничной сферы, то есть  $2h - k/\|e\|_A^2 \leq 0$ . Для обоих случаев построим вспомогательный гомеоморфизм  $f_e$ , который сопоставляет каждой точке ограничения множества  $Q_{h,2}$  на луч  $Oe$  точку трёхмерного диска  $D^3$ .

Пусть сначала  $2h - k/\|e\|_A^2 \leq 0$ . В таком случае параметр  $\alpha$  изменяется на отрезке  $[R, \sqrt{2h/k}]$ . Сопоставим точке  $(\alpha e, v) \in Q_{h,2}$  точку  $f_e(\alpha, v) = \frac{1}{\sqrt{2h - kR^2}}v \in D^3$ . Заметим, что это отображение при

фиксированном  $\alpha \neq \frac{2h}{k}$  переводит сферу направлений в точке  $\alpha e$  в сферу радиуса  $\sqrt{\frac{2h - k\alpha^2}{2h - kR^2}}$  в  $\mathbb{R}^3$ . При этом  $f_e$  биективно и, очевидно, непрерывно в обе стороны. Следовательно,  $f_e$  — гомеоморфизм.

Пусть теперь  $2h - k/\|e\|_A^2 > 0$ , то есть луч  $Oe$  пересекает границу области возможного движения в точке эллипсоида  $\mathcal{E}$ . Следовательно, параметр  $\alpha$  изменяется на отрезке  $[R, 1/\|e\|_A]$ . Отметим, что при  $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$  в точке  $\alpha e$  возникает сфера направлений радиуса  $\sqrt{2h - k\alpha^2}$ , а при  $\alpha = 1/\|e\|_A$  — полусфера направлений радиуса  $\sqrt{2h - k/\|e\|_A^2}$ . Для построения отображения  $f_e$  нам понадобятся вырожденные эллиптические координаты. Рассмотрим семейство квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x^2}{p - \mu} + \frac{y^2}{p - \mu} + \frac{z^2}{q - \mu} = 1,$$

где  $p > q > 0$ . Добавим к этому семейству все плоскости, проходящие через ось  $Oz$ . Полученное множество назовём *вырожденным семейством софокусных квадрик*. Можно показать, что через каждую точку, лежащую внутри координатного октанта, проходит ровно три квадрики этого семейства, причём одна из них — эллипсоид, другая — однополостный гиперболоид, а третья — плоскость. Это семейство квадрик порождает *вырожденные эллиптические координаты*  $(\mu_1, \mu_2, \psi)$ , где  $\mu_1$  — параметр эллипсоида данного семейства, проходящего через данную точку,  $\mu_2$  — параметр однополостного гиперболоида,  $\psi$  — угол между плоскостью, проходящей через данную точку и ось  $Oz$ , и осью  $Ox$ . На рисунке [1] проиллюстрированы квадрики из вырожденного семейства софокусных, а также сетка соответствующих вырожденных эллиптических координат. Отметим также, что если параметр  $\mu$  устремить к  $q$  слева, то эллипсоиды с параметром  $\mu$  сожмутся в круг радиуса  $\sqrt{p - q}$ , лежащей в плоскости  $Oxy$ .

Вернёмся к построению отображения  $f_e$ . Положим  $p(e) = 2h - kR^2$ ,  $q(e) = -kR^2 + k/\|e\|_A^2$ . Рассмотрим новую декартову систему координат  $O'x'y'z'$ , такую, что  $O' = e/\|e\|_A$ , то есть  $O'$  — точка пересечения оси  $Oe$  и эллипсоида  $\mathcal{E}$ , а ось  $O'z'$  сонаправлена с  $e$ . В этой системе координат рассмотрим вырожденное семейство софокусных квадрик, заданных уравнением:

$$\frac{x'^2}{p(e) - \mu} + \frac{y'^2}{p(e) - \mu} + \frac{z'^2}{q(e) - \mu} = 1$$

Растянем сначала это семейство квадрик по оси  $O'z'$  так, что эллипсоид с параметром  $\mu = 0$  стал бы сферой, то есть растянем в  $\sqrt{q(e)/p(e)}$  раз. А затем сожмём это семейство в  $\sqrt{2h - kR^2}$  раз по всем осям. Считаем, что при этих трансформациях вырожденные эллиптические координаты были “вморожены” в это семейство квадрик. Теперь построим отображение  $f_e$ . Пусть  $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$  и  $(\alpha e, v) \in Q_{h,2}$ . Перепишем  $v$  в координатах  $(x', y', z')$ . Как уже отмечалось ранее,  $\|v\|^2 = 2h - k\alpha^2$ . Нормируем этот вектор. Пусть  $(0, \mu_2, \psi)$  — вырожденные эллиптические координаты конца полученного вектора. Рассмотрим сдвиг этой точки вдоль координатной линии первой координаты в точку с вырожденными эллиптическими координатами  $(-kR^2 + k\alpha^2, \mu_2, \psi)$ . Считаем, что сдвиг происходит с увеличением первой эллиптической координаты. Координаты полученной точки в системе координат  $O'xyz$  обозначим как  $f_e(\alpha, v)$ . Заметим, что сфера направлений в точке  $\alpha e$  при  $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$  гомеоморфно отображается на эллипсоид с параметром  $\mu = -kR^2 + k\alpha^2$ , а полусфера направлений в точке  $e/\|e\|_A$  — в круг с параметром  $\mu = q(e)$ . Таким образом, отображение  $f_e$  биективно отображает множество  $Q_{h,2}$ , ограниченное на луч  $Oe$ , на замкнутый диск  $D^3$ , при этом оно является непрерывным в обе стороны, то есть  $f_e$  — гомеоморфизм.

Теперь доопределим отображение  $\varphi$  на  $Q_{h,2}$ . Рассмотрим стереографическую проекцию  $\pi$  сферы  $S^3$ , стандартно вложенной в  $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ , из точки  $s(0; 0; 0; -1)$  на гиперплоскость  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Пусть  $(\alpha e, v) \in Q_{2,h}$ , рассмотрим точку  $f_e(\alpha, v) \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Сожмём все координаты этой точки в  $\sqrt{\frac{1+R}{1-R}}$

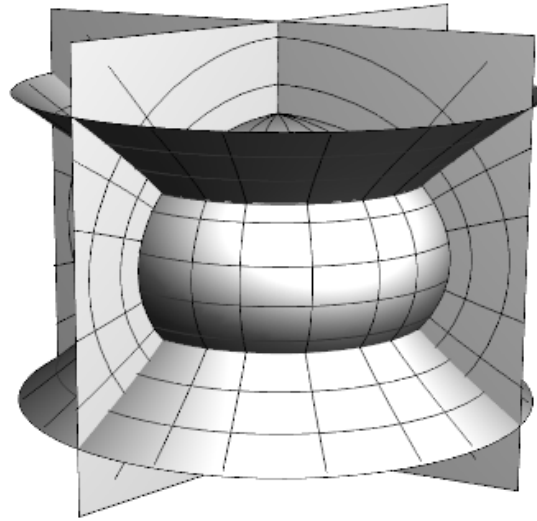


Рис. 1: Квадрики из вырожденного семейства софокусных квадрик. Черным выделена сетка вырожденных эллиптических координат

раз и рассмотрим прообраз  $P$  стереографической проекции этой точки на сфере  $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ . Тогда положим  $\varphi(\alpha e, v) = (w(P)e, x(P), y(P), z(P))$ .

Заметим, что построенное нами отображение  $\varphi$  корректно определено в точках склейки  $Q_{h,1}$  и  $Q_{h,2}$ . Действительно, по определению  $f_e(R, v) = \frac{v}{\sqrt{2h - kR^2}}$ . Следовательно, по определению  $\varphi$  на множе-

стве  $Q_{h,2}$  имеем  $\varphi(Re, v) = \left( Re, \sqrt{\frac{1 - R^2}{2h - kR^2}} v \right)$ , что совпадает со значением  $\varphi(Re, v)$  по определению  $\varphi$  на множестве  $Q_{h,1}$ . Заметим также, что по построению отображение  $\varphi$  инъективно. Проверим, что оно сюръективно. Действительно, пусть  $(v_1, v_2) \in S^5$ , где  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ . Если  $\|v_1\| \leq R$ , то рассмотрим  $\alpha = \|v_1\|$ ,  $e = v_1/\|v_1\|$  и  $v = \sqrt{\frac{2h - k\alpha^2}{1 - \alpha^2}} v_2$ . Тогда  $(\alpha e, v) \in Q_{h,1}$  и по построению  $\varphi(\alpha e, v) = (v_1, v_2)$ . Если же  $\|v_1\| > R$ , то сюръективность следует из сюръективности стереографической проекции и сюръективности отображений  $f_e$ .

Осталось доказать, что отображение  $\varphi$  непрерывно. По построению, непрерывность может нарушаться только в точках вида  $\alpha e$ , где  $e$  единичный вектор такой, что  $Oe$  пересекает границу области возможного движения в точке пересечения эллипсоида  $\mathcal{E}$  и граничной сферы, а  $\alpha \in [R, \sqrt{2h/k}]$ . Убедимся, что в этих точках отображение  $\varphi$  непрерывно. Рассмотрим последовательность единичных векторов  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  такую, что лучи  $Oe_n$  пересекают границу области возможного движения строго по эллипсоиду  $\mathcal{E}$ , то есть  $2h - k/\|e_n\|_A^2 > 0$ . Пусть существует предел этой последовательности, равный вектору  $e$ , и пусть луч  $Oe$  пересекает границу области возможного движения в точке пересечения эллипсоида  $\mathcal{E}$  и граничной сферы, то есть  $2h - 1/\|e\|_A^2 = 0$ . Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(e_n) - q(e_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2h - k/\|e_n\|_A^2 = 2h - 1/\|e\|_A^2 = 0$ , а  $p(e_n) = p(e) = 2h - kR^2$  для любого  $n$ . Значит, при  $n \rightarrow \infty$  эллипсоиды вырожденного семейства софокусных квадрик трансформируются в сферы, однополостные гиперболоиды — в конусы, а вырожденные эллиптические координаты — в сферические координаты. При этом, эллипсоид с параметром  $\mu$  станет шаром радиуса  $\sqrt{p(e) - \mu}$ . Поскольку отображение  $f_{e_n}$  переводит сферу направлений в точке  $\alpha e_n$  в эллипсоид параметра  $\mu = -kR^2 + k\alpha^2$ , то при  $n \rightarrow \infty$  эти эллипсоиды перейдут в шары радиуса  $\sqrt{2h - k\alpha^2}$ . Однако, учитывая то, что мы растягивали наши квадрики в  $\sqrt{p(e_n)/q(e_n)}$  раз по оси  $O'_n e_n$  и сжимали в  $\sqrt{2h - kR^2}$  раз по всем направлениям, предел эллипсоидов  $f_{e_n}(\alpha, v)$  при фиксированном  $\alpha$  равен сфере радиуса  $\sqrt{\frac{2h - k\alpha^2}{2h - kR^2}}$ , которая получается по определению  $f_e(\alpha e, v)$  при фиксированном  $\alpha$ . Заметим так-

же, что при  $n \rightarrow \infty$  круги параметра  $\mu = q(e)$  сжимаются в точку, поскольку их радиус  $\sqrt{p(e_n) - q(e_n)}$  стремится к нулю. Таким образом, отображение  $\varphi$  непрерывное.

Поскольку  $\varphi : Q_h \rightarrow S^5$  — непрерывная биекция, а  $Q_h$  — компактное подмножество, то  $\varphi$  является гомеоморфизмом.  $\square$

Таким образом, случай  $k > 0$  нами полностью разобран. Перейдём к случаю  $k < 0$ .

**Лемма 2.** Пусть  $k < 0$  и  $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$ , тогда соответствующая изоэнергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению сфер  $S^1 \times S^4$ .

**Доказательство.** В данном случае область возможного движения гомеоморфна полноторию и заключена между эллипсоидом  $\mathcal{E}$  и граничной сферой, радиус которой больше  $\sqrt{c}$ , но меньше  $\sqrt{b}$ . Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  цилиндрические координаты  $(r, \psi, z)$ . Доказательство этой леммы разобьём на две части. Сначала мы покажем, что прообраз полуплоскости  $\psi = const$  при проекции  $\pi : Q^5 \rightarrow D$ , построенной в первом пункте, гомеоморфен сфере  $S^4$ , построив гомеоморфизм  $\varphi_\psi(x) : Q_{h,\psi} \rightarrow S^4$ . А затем покажем, что отображение  $\Phi(x, v) : Q_h \rightarrow S^1 \times S^4$ , которое сопоставляет каждой паре  $(x, v)$  пару  $(\psi, \varphi_\psi(x, v))$ , где  $\psi$  — угловая цилиндрическая координата точки  $x$ , взятая по модулю  $2\pi$ , является гомеоморфизмом.

Рассмотрим эллипс  $F$  вида  $\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} = 1, z = 0$ , лежащий строго внутри области возможного движения. Выберем положительное  $\varepsilon < 1$  такое, что замыкание  $\varepsilon$ -окрестности этого эллипса лежало бы строго внутри области возможного движения. В каждой полуплоскости  $\psi = const$  рассмотрим окружность радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $O$ , лежащей на эллипсе  $F$ . Такие окружности образуют гладкую поверхность, гомеоморфную тору. Обозначим через  $K'$  область возможного движения шара без полнотория, ограниченного этой поверхностью.

Теперь рассмотрим тор вращения в  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ , заданный уравнениями:

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos \chi) \cos \theta \\ y = (R + \rho \cos \chi) \sin \theta \\ z = \rho \sin \chi \end{cases}$$

где  $R > \rho > 0$  — константы,  $\chi, \theta \in [0, 2\pi]$ . Пусть  $K$  — замкнутая область ограниченная торами с  $R = 2$  и  $\rho = 1, \rho = \varepsilon$ . Рассмотрим гомеоморфизм  $\beta : K \rightarrow K'$  такой, что:

- 1) для любого  $\psi_0 \in [0, 2\pi]$  отображение  $\beta$  гомеоморфно отображает  $K \cap \{\psi = \psi_0\}$  на  $K' \cap \{\psi = \psi_0\}$ ;
- 2) прообраз граничной сферы лежит на торе с  $R = 2, \rho = 1$ ;
- 3) для любого  $\psi_0 \in [0, 2\pi]$  и для любой точки  $P$  на торе с  $R = 2$  и  $\rho = \varepsilon$ , лежащей в полуплоскости  $\psi = \psi_0, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'\beta(P)}$ , где  $O'$  — точка пересечения эллипса  $F$  и полуплоскости  $\psi = \psi_0$ , а  $O$  — точка пересечения тора с  $R = 2, \rho = 0$  (это окружность) и полуплоскости  $\psi = \psi_0$ .

Это отображение проиллюстрировано на рисунке [2].

Теперь зафиксируем полуплоскость  $\psi = \psi_0$ . Обозначим прообраз полуплоскости  $\psi = \psi_0$  при отображении  $\pi : Q^5 \rightarrow D$  через  $Q_{h,\psi_0}$ , а пересечение стола  $D$  и этой полуплоскости — через  $D_{\psi_0}$ . Пусть  $O'$  — точка пересечения рассматриваемой полуплоскости и эллипса  $F$ . Рассмотрим в полуплоскости  $\psi = \psi_0$  окружность радиуса  $\varepsilon$ . Она разбивает  $D_{\psi_0}$  на две компоненты  $D_{\psi_0,1}$  и  $D_{\psi_0,2}$ . Будем считать, что  $D_{\psi_0,1}$  — часть  $D_{\psi_0}$ , лежащая внутри окружности. В таком случае  $Q_{h,\psi_0}$  также разбивается на два куска  $Q_{h,\psi_0,1}$  и  $Q_{h,\psi_0,2}$ . Будем считать, что кусок  $Q_{h,\psi_0,1}$  соответствует компоненте  $D_{\psi_0,1}$ .

Сначала построим гомеоморфизм  $\varphi(\psi_0, x)$  компоненты  $Q_{h,\psi_0}$  и сферы  $S^4$ . Как и в лемме 1, мы определим это отображение на каждом из кусков  $Q_{h,\psi_0,i}$ , проверим корректность, биективность и непрерывность. Перейдём в систему координат  $O'rz$ . Пусть  $e$  — произвольный единичный радиус-вектор в этой системе координат. Тогда для произвольного  $\alpha \in [0, \varepsilon]$  и вектора  $v$  такого, что  $(\alpha e, v) \in Q_{h,\psi_0,1}$  положим  $\varphi(\alpha e, v) = \left(\alpha e, \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\|v\|} v\right)$ , где координаты  $v$  записаны в ортонормированном базисе  $e_r, e_\psi, e_z$ . Таким образом, мы определили  $\varphi$  на  $Q_{h,\psi_0,1}$ . Заметим, что на множестве  $Q_{h,\psi_0,1}$  отображение  $\varphi$  непрерывно и инъективно.

Теперь определим  $\varphi$  на множестве  $Q_{h,\psi_0,2}$ . Для любого единичного радиус-вектора  $e$  необходимо построить вспомогательное отображение  $f_e$ , которое гомеоморфно отображает прообраз кривой  $\beta(\alpha e), \alpha \in [\varepsilon; 1]$ , при проекции  $\pi$  на замкнутый единичный диск  $D^3$ . Построение таких отображений происходит



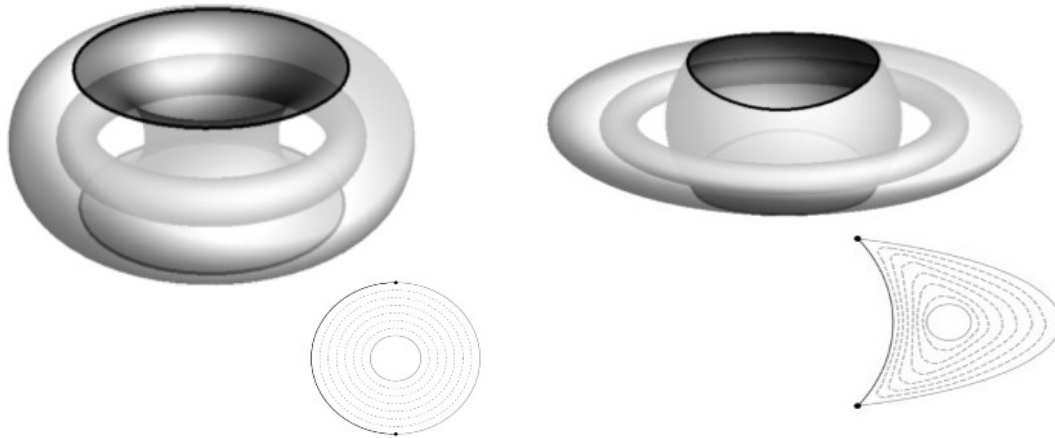


Рис. 2: Иллюстрация отображения  $\beta$ . Темно-серым справа выделены участки граничной сферы, а слева — её прообраз. Снизу слева выделено пересечение фигуры  $K$  и полуплоскости  $\psi = \psi_0$ , а снизу справа — его образ при гомеоморфизме  $\beta$ .

почти как в лемме 1, однако с некоторыми различиями. Рассмотрим отрезок  $[\varepsilon e; e]$  и применим к нему гомеоморфизм  $\beta$ . Далее мы рассмотрим два случая:  $\beta(e)$  лежит на граничной сфере,  $\beta(e)$  не лежит на граничной сфере. Для краткости рассмотрим первый случай. Положим  $f_e(\alpha, v) = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{(1 - \varepsilon^2)(2h - k\beta^2(\alpha e))}} v$ ,

где  $\alpha \in [\varepsilon; 1]$ . Во втором случае нам опять понадобится система вырожденных эллиптических координат.

Теперь рассмотрим стереографическую проекцию  $\pi$  сферы  $S^3$ , стандартно вложенной в  $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ , из южного полюса на гиперплоскость  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Пусть  $\alpha \in [\varepsilon; 1]$ , рассмотрим точку  $f_e(\alpha, v) \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Сожмём все координаты этой точки в  $\sqrt{(1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)}$  раз и рассмотрим прообраз  $P$  стереографической проекции этой точки на сфере  $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ . Тогда положим  $\varphi(\beta(\alpha e), v) = (w(P)e, x(P), y(P), z(P))$ .

Корректность, биективность и непрерывность доказывается так же, как в лемме 1. Поскольку  $Q_{h, \psi_0}$  — компактное подмножество, то отображение  $\varphi$  является гомеоморфизмом. Теперь рассмотрим отображение  $\Phi(x, v) = (\psi(x), \varphi_\psi(x, v))$ , где  $\psi(x)$  — угловая цилиндрическая координата точки  $x$ , взятая по модулю  $2\pi$ . Это отображение, очевидно, биективно. Заметим, что  $\varphi$  непрерывно относительно  $\psi$ , взятого по модулю  $2\pi$ . Действительно, отображения  $f_e$ , которые мы используем для построения  $\varphi$ , непрерывно зависят от цилиндрических координат. Функция  $\varphi(\alpha e, v) = \left( \alpha e, \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\|v\|} v \right)$  также непрерывно зависит от цилиндрических координат. Следовательно, отображение  $\Phi$  — непрерывная биекция, а поскольку множество  $Q_h$  является компактным, то  $\Phi$  — гомеоморфизм  $Q_h$  и  $S^1 \times S^4$ .  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $k < 0$  и  $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$ , тогда соответствующая изоэнергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению сфер  $S^2 \times S^3$ .

**Доказательство.** Заметим, что область возможного движения ограничена эллипсоидом  $\mathcal{E}$  и граничной сферой, радиус которой меньше  $\sqrt{c}$ . Следовательно, граничная сфера лежит внутри эллипсоида. Пусть  $\sqrt{2h/k} < R < \sqrt{c}$ . Рассмотрим сферу радиуса  $R$ . Она разбивает область возможного движения на две компоненты. Изоэнергетическая поверхность тоже разбивается на два куска  $Q_{h,1}$  и  $Q_{h,2}$ . Будем считать, что  $Q_{h,1}$  соответствует компоненте области возможного движения, ограниченной граничной сферой и сферой радиуса  $R$ . Как и в лемме 1, мы построим гомеоморфизм  $\varphi : Q_h^5 \rightarrow S^2 \times S^3$  отдельно на каждой из компонент  $Q_{h,1}$  и  $Q_{h,2}$ , а далее покажем, что оно согласовано в точках склейки  $Q_{h,1}$  и  $Q_{h,2}$  и является гомеоморфизмом. Мы будем предполагать, что  $S^2$  и  $S^3$  стандартно вложены в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^4$  соответственно.

Сначала определим  $\varphi$  на  $Q_{h,1}$ . Пусть  $e$  — единичный вектор и  $\alpha \in [\sqrt{2h/k}, R]$ . Рассмотрим вектор  $v \in T_{\alpha e} \mathbb{R}^3$  такой, что  $(\alpha e, v) \in Q_h^5$ . Положим  $\varphi(\alpha e, v) = \left( e, \left( \frac{\alpha}{2h - kR^2} v, \sqrt{\frac{k(\alpha^2 - R^2)}{2h - kR^2}} \right) \right)$ , где первая координата соответствует сфере  $S^2$ , стандартно вложенной в  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ , а оставшаяся пара координат — сфере  $S^3$ , стандартно вложенной в  $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ , причём первая координата пары — тройка  $(x, y, z)$ , а вторая —

$w$ . Отметим, что построенное отображение непрерывно и инъективно на  $Q_{h,1}$ .

Теперь доопределим отображение  $\varphi$  на  $Q_{h,2}$ . Для этого мы воспользуемся вспомогательными отображениями  $f_e(\alpha)$ , построенными в лемме 1. Рассмотрим стереографическую проекцию  $\pi$  сферы  $S^3$ , стандартно вложенной в  $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$ , из точки  $s(0; 0; 0; 1)$  на гиперплоскость  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Пусть точка  $P$  — прообраз точки  $f_e(\alpha)$  при отображении  $\pi$ . Тогда положим  $\varphi(\alpha e, v) = (e, P)$ . Заметим, что построенное отображение непрерывно и инъективно на  $Q_{h,2}$ .

Покажем, что  $\varphi$  корректно определено в точках склейки  $Q_{h,1}$  и  $Q_{h,2}$ . Согласно определению  $\varphi$ , на множестве  $Q_{h,2}$   $\varphi(Re, v) = (e, P(v))$ . Однако  $f_e(R) \in S^3$ , поэтому  $P(v) = (f_e(R), 0) = \left(\frac{v}{\sqrt{2h - kR^2}}, 0\right)$ . Следовательно,  $\varphi(Re, v) = \left(Re, \left(\frac{v}{\sqrt{2h - kR^2}}, 0\right)\right)$ , что совпадает с определением  $\varphi$  на множестве  $Q_{h,1}$ . Таким образом,  $\varphi$  — непрерывное и корректно определённое отображение.

Нетрудно доказать биективность отображения  $\varphi$ . Поскольку отображение  $\varphi$  является непрерывным биективным отображением компактного пространства, то  $\varphi$  — гомеоморфизм.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $k < 0$ . Тогда если:

- 1)  $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$ , то изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  гомеоморфна несвязному объединению двух сфер  $S^5$ ;
- 2)  $h > 0$ , то изоэнергетическая поверхность  $Q_h$  гомеоморфна сфере  $S^5$ .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Исследования выполнены при поддержке гранта РНФ 20-71-00155 в МГУ имени М. В. Ломоносова. Автор благодарит А. Т. Фоменко за внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Smale “Topology and mechanics. I” // *Inventiones mathematicae*, **10**:4 (1970), 305–331.
2. А. Т. Фоменко “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем” // Доклады АН СССР, **287**:5 (1986), 1071–1075.
3. А. Т. Фоменко “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости” // Изв. АН СССР. Сер. матем., **50**:6 (1986), 1276–1307.
4. А. Т. Фоменко, Х. Цишанг “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы” // Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**:3 (1990), 546–575.
5. А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2 (Монография) // Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999
6. А. А. Oshetkov “Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations” // *Adv. in Sov. Math.*, vol. **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–146.
7. А. В. Болсинов, П. Рихтер, А. Т. Фоменко “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской” // Матем. сб., **191**:2 (2000), 3–42.
8. А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности” // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, №3, 15–25;
9. В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами” // Докл. РАН, **479**:6 (2018), 607–610.
10. В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало “Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем” // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, №4, 22–28.
11. В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева “Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками” // Тр. Моск. Мат. Общ., 2021, 82 №1, 49–78.
12. В. В. Фокичева “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик” // Матем. сб., **206**:10 (2015), 127–176.
13. В. В. Ведюшкина “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов” // Матем. сб., **210**:3 (2019), 17–74.
14. В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем” // Матем. сб., **209**:12 (2018), 17–56.
15. А. Т. Fomenko, V. V. Vedyushkina, and V. N. Zav'yalov “Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping” // *Russ. J. Math. Phys.*, **28**:1 (2021), 37–55.

16. *V. V. Vedyushkina and A. T. Fomenko* “Force Evolutionary Billiards and Billiard Equivalence of the Euler and Lagrange Cases” // *Dokl. Math.*, **103**:1 (2021), 1–4.
  17. *A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina* “Billiards with Changing Geometry and Their Connection with the Implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya Cases” // *Russ. J. of Math. Phys*, 28 3, (2021), 317–332.
  18. *Г. В. Белозеров* “Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов на квадратах в трехмерном евклидовом пространстве” // *Матем. сб.*, **211**:11 (2020), 3–40.
  19. *В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко* “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды” *Изв. РАН. Сер. матем.*, **83**:6 (2019), 63–103.
  20. *В. Драгович, М. Раднович* *Интегрируемые бильярды, квадраты и многомерные поризмы Понселе* // НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Москва – Ижевск, 2010
  21. *Г. В. Белозеров* “Топологическая классификация бильярдов в трёхмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадратами” // *Матем. сб.*, в печати.
  22. *N. T. Zung* “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold-Liouville with singularities” // *Compositio Math.*, **101**:2 (1996), 179–215.
  23. *A. T. Fomenko, V. A. Kibkalo* “Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms” // *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics, Understanding Complex Systems*, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer, Cham, (2021), 1–24.
  24. *И. Ф. Кобцев* “Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ” // *Матем. сб.*, **211**:7 (2020), 93–120.
  25. *С. Е. Пустовойтов* “Топологический анализ бильярда в эллиптическом кольце в потенциальном поле” // *Фунд. прикл. матем.*, **22**:6 (2019), 201–225.
  26. *С. Е. Пустовойтов* “Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадратами, в потенциальном поле” // *Матем. сб.*, **212**:2 (2021), 81–105.
  27. *И. Ф. Кобцев* “Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, №2 (2018), 27–33.
  28. *В. В. Фокичева*, “Топологическая классификация интегрируемых бильярдов” // канд. дисс, МГУ, Москва, 2016.
  29. *И. С. Харчева* “Изоэнергетические многообразия бильярдных книжек.” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020, №4, 12–22
  30. *Якоби К.* *Лекции по динамике.* – М.: Гостехиздат, 1936
  31. *Козлов В. В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // *Прикладная математика и механика*, том 59, 1 1995.
-