

Биллиарды с потенциалом Гука внутри трёхмерных софокусных столов

Белозеров Г. В.
МГУ им. М. В. Ломоносова

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-71-00155 в МГУ имени М.В.Ломоносова

Аннотация. В этой работе рассматривается задача о движении материальной точки под действием силы Гука внутри биллиардного стола, ограниченного софокусными кватриками. Нами выписаны первые интегралы этой задачи, а также уравнения движения в эллиптических координатах. Нами изучены биллиарды внутри двух столов: стол, ограниченный эллипсоидом и двумя “чашечками” двуполостного гиперboloида, и стол, полученный из первого путём отсечения однополостным гиперboloидом двух одинаковых частей. Для обоих столов найдены области возможного движения и построены бифуркационные диаграммы. Точки бифуркационных диаграмм мы разделили на два класса: правильные и неправильные. Правильные особые точки соответствуют боттовским особенностям. Для всякой правильной особой точки образа отображения момента, а также для всякой неособой точки нами определены классы гомеоморфности прообразов их малых окрестностей при отображении момента. Для небифуркационных значений энергии найдены классы гомеоморфности соответствующих изоэнергетических поверхностей.

§1 Семейство софокусных квадрик и его свойства

Определение. Семейством софокусных квадрик в \mathbb{R}^3 называется множество квадрик, заданных уравнением

$$(b - \lambda)(c - \lambda)x^2 + (a - \lambda)(c - \lambda)y^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)z^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda),$$

где $a > b > c > 0$ — фиксированные константы, а λ — вещественный параметр. Если параметр квадрики этого семейства равен a , b или c , то она называется вырожденной, в противном случае квадрика называется невырожденной.

Замечание. Отметим, что вырожденные квадрики — это в точности координатные плоскости. Если же $\lambda \in (-\infty; c)$, то соответствующая квадрика является эллипсоидом, если $\lambda \in (c; b)$, то однополостным гиперboloидом, если $\lambda \in (b; a)$, то двуполостным гиперboloидом.

Семейство софокусных квадрик обладает многими замечательными свойствами, например, касательные плоскости в точке пересечения двух софокусных квадрик ортогональны. Также хорошо известно, что через каждую точку, лежащую внутри любого координатного октанта, проходит ровно три софокусные квадрики, более того, одна из них — эллипсоид, вторая — однополостный гиперboloид, а третья — двуполостный гиперboloид. Если сопоставить каждой такой точке тройку чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — параметры эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперboloидов, проходящих через данную точку, соответственно, то в каждом координатном октанте мы зададим гладкую регулярную систему координат. Функции $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можно однозначно продолжить до гладких функций в \mathbb{R}^3 , при этом будет верно, что $\lambda_1 \in (-\infty; c]$, $\lambda_2 \in [c, b]$, $\lambda_3 \in [b, a]$. Тройка координат $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ называется *системой эллиптических координат*.

Семейству софокусных квадрик можно сопоставить две кривые: эллипс F_1 , лежащий в плоскости Oxy и заданный уравнением $\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1$, и гиперболу F_2 , лежащую в плоскости Oxz и заданную уравнением $\frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1$. Эти кривые называются *фокальными кривыми* семейства софокусных квадрик. Они очень похожи по своей структуре с фокусами семейства софокусных квадрик на плоскости. В этом мы убедимся далее. В эллиптических координатах эллипс F_1 задаётся уравнениями $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = c$, а гипербола F_2 — уравнениями $\lambda_2 = b$, $\lambda_3 = b$.

§2 Постановка задачи. Первые интегралы

Как уже было сказано, мы будем рассматривать движение материальной точки внутри областей, называемых бильярдными столами. Давайте дадим определение этого объекта.

Определение. *Бильярдным столом в \mathbb{R}^3 будем называть компактное множество с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом софокусных квадратов и имеющее двугранные углы илома на границе, равные $\frac{\pi}{2}$.*

Итак, пусть D — бильярдный стол. Мы будем рассматривать следующую динамическую систему: материальная точка единичной массы движется внутри стола D под действием упругого поля сил, центр которого расположен в начале координат. Будем считать, что отражение от границы стола абсолютно упругое. Эту динамическую систему мы будем называть *бильярдом с потенциалом Гука* внутри стола D .

Замечание. *Поскольку все двугранные углы излома границы бильярдного стола равны $\frac{\pi}{2}$, отражение в точках излома корректно определено. Следовательно, рассматриваемая нами система является детерминированной.*

Оказывается, что бильярд с потенциалом Гука является кусочно-гладкой интегрируемой гамильтоновой системой. Давайте выпишем её первые интегралы.

Одним из первых интегралов рассматриваемой системы является её полная механическая энергия H . В нашей задаче она задаётся следующей формулой:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

А как найти ещё два дополнительных первых интеграла? Для этого мы воспользуемся методом В. В. Козлова, описанного им в работе [1]. Согласно этому методу дополнительные первые интегралы F_1, F_2 этой задачи следует искать в виде $F_1 = I_1 + f_1, F_2 = I_2 + f_2$, где I_1, I_2 — дополнительные первые интегралы задачи без потенциала, а f_1, f_2 — функции, зависящие только от пространственных переменных. В качестве дополнительных первых интегралов бильярда без потенциала удобно взять следующие функции:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{c+b}{2}\dot{x}^2 + \frac{a+c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a+b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2); \\ I_2 &= \frac{cb}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2), \end{aligned}$$

где K_x, K_y, K_z — компоненты вектора кинетического момента.

Заметим, что если мы найдём F_1 и F_2 , как первые интегралы задачи без отражения, то эти же функции будут первыми интегралами бильярда. Действительно, при отражении функции I_1 и I_2 не меняются, так как это первые интегралы задачи без потенциала, а функции f_1 и f_2 не поменяются, так как они зависят только от пространственных переменных.

Приравняв к нулю производные функций F_1 и F_2 по времени и воспользовавшись уравнениями Ньютона задачи без отражения, получим уравнения:

$$\begin{aligned} -k((c+b)x\dot{x} + (a+c)y\dot{y} + (a+b)z\dot{z}) + \partial_x f_1 \dot{x} + \partial_y f_1 \dot{y} + \partial_z f_1 \dot{z} &= 0, \\ -k(cbx\dot{x} + acy\dot{y} + abz\dot{z}) + \partial_x f_2 \dot{x} + \partial_y f_2 \dot{y} + \partial_z f_2 \dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Переменные в обоих уравнениях разделяются, и мы легко можем найти их частные решения:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{k}{2}((b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2), \\ f_2 &= \frac{k}{2}(bcx^2 + acy^2 + abz^2). \end{aligned}$$

Значит, дополнительные первые интегралы бильярда с потенциалом Гука имеют следующий вид:

$$F_1 = \frac{c+b}{2}\dot{x}^2 + \frac{a+c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a+b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) + \frac{k}{2}((b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2),$$

$$F_2 = \frac{cb}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2) + \frac{k}{2}(bcx^2 + acy^2 + abz^2).$$

Оказывается, функции H, F_1, F_2 являются функционально независимыми попарно коммутирующими относительно стандартной скобки Пуассона первыми интегралами рассматриваемой системы.

В эллиптических координатах переменные нашей системы разделяются и уравнения движения в них переписываются следующим образом:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{4}{\sqrt{2}(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{V(\lambda_i)},$$

где $i = 1, 2, 3$, $V(z) = \left(f_2 - zf_1 + z^2h - \frac{k}{2}(a-z)(b-z)(c-z) \right) (a-z)(b-z)(c-z)$, а f_1, f_2, h — значения первых интегралов F_1, F_2, H соответственно.

Для описания областей возможного движения нам необходимо изучить свойства полинома $V(z)$. Действительно, если для заданных значений f_1, f_2, h и точки с эллиптическими координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ выполняются неравенства $V(\lambda_i) \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, то в этой точке определены векторы скорости, и следовательно, система уравнений движения имеет решение. А если, хотя бы одно из неравенств не выполнено, то через данную точку не проходит ни одна траектория.

Следующее утверждение описывает устройство корней многочлена $V(z)$.

Утверждение. *Многочлен $V(z)$ имеет 6 вещественных корней с учётом кратности.*

Доказательство. Мы докажем это утверждение только при $k > 0$. Для $k < 0$ доказательство производится схожим образом.

В первую очередь заметим, что a, b, c — корни $V(z)$.

Мы знаем, что $\lambda_1 \in (-\infty; c]$, $\lambda_2 \in [c, b]$, $\lambda_3 \in [b, a]$. Поскольку в общем случае движение точки будет происходить не в координатных плоскостях, внутри промежутков $(-\infty; c]$, $[c, b]$, $[b, a]$ должны найтись интервалы, в которых значение многочлена $V(z)$ должно быть положительным. Заметим, что при $z \rightarrow -\infty$ значения многочлена $V(z)$ стремятся к $-\infty$. Поскольку внутри промежутка $(-\infty; c]$ есть интервал, в котором $V(z)$ принимает положительные значения, у $V(z)$ есть корень $\xi_1 \in (-\infty; c)$. Можем считать, что ξ_1 — наименьший корень $V(z)$. Если на промежутке $(-\infty; c)$ есть ещё один корень этого многочлена, то утверждение доказано.

Предположим, что ξ_1 — единственный корень $V(z)$ на промежутке $(-\infty; c)$. Тогда на интервале $(\xi_1; c)$ многочлен $V(z)$ принимает положительные значения, а в точке c он должен поменять знак. Если на промежутке $(c; b)$ многочлен $V(z)$ не имеет корней, то он принимает там отрицательные значения, что противоречит тому, что внутри отрезка $[c; b]$ есть интервал, где $V(z) > 0$. Следовательно, в общем случае на промежутке $(c; b)$ многочлен $V(z)$ должен иметь корень.

Таким образом $V(z)$ в общем случае имеет 6 вещественных корней. Значит, $V(z)$ всегда имеет 6 вещественных корней. ■

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — корни многочлена $Q(z) = f_2 - zf_1 + z^2h - \frac{k}{2}(a-z)(b-z)(c-z)$. Как мы только что доказали, все эти корни вещественные. Будем считать, что $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$.

Отметим, что ξ_1, ξ_2, ξ_3 — корни многочлена, зависящего от значений первых интегралов H, F_1, F_2 и констант a, b, c, k . Значит, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — первые интегралы нашей задачи. Заметим, что первые интегралы ξ_1, ξ_2, ξ_3 связаны с F_1, F_2, H формулами Виета:

$$\begin{cases} (a + b + c) - \frac{2H}{k} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ (ab + bc + ca) - \frac{2F_1}{k} = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 \\ abc - \frac{2F_2}{k} = \xi_1\xi_2\xi_3 \end{cases}$$

При этом условие $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ гарантирует взаимнооднозначное соответствие между допустимыми значениями троек (H, F_1, F_2) и (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Из этого факта и формул Виета следует, что ξ_1, ξ_2, ξ_3 — функционально независимые попарно коммутирующие относительно стандартной скобки Пуассона первые интегралы. Доказательство этого факта мы опустим, так как оно является техническим.

§3 Биллиард с потенциалом Гука внутри стола, образованного эллипсоидом и двумя “чашечками” двуполостного гиперboloида. Области возможного движения

В этом и следующих параграфах (а именно в 3–9) мы рассмотрим биллиард с потенциалом Гука внутри стола D , граница которого состоит из участка эллипсоида с параметром $\lambda = 0$ и двумя “чашечками” софокусного с ним двуполостного гиперboloида с параметром $\lambda = \lambda_0 \in (b, a)$. Этот стол проиллюстрирован на рисунке 1. Он содержит фокальный эллипс F_1 , при этом фокальная гипербола F_2 не входит в его состав. Как оказалось, топология слоения Лиувилля биллиарда внутри этого стола устроена гораздо сложнее, чем внутри стола, полученного из данного путём отсечения однополостным гиперboloидом двух равных частей. Это обусловлено тем, что однополостный гиперboloид отрезает от стола D фокальный эллипс F_1 . Тем самым стол, ограниченный двумя участками однополостного и двумя участками двуполостного гиперboloидов, не содержит участки фокальных кривых, и топологию слоения Лиувилля соответствующего ему биллиарда можно описать в терминах прямых проведений 2-атомов. В параграфе 10 мы сформулируем основные результаты, полученные для этого стола.

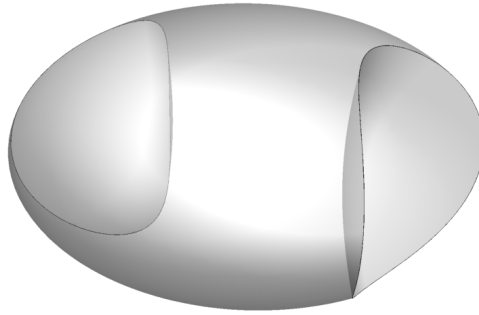


Рис. 1: Биллиардный стол, образованный эллипсоидом и софокусным с ним двуполостным гиперboloидом.

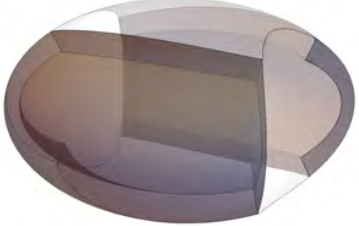
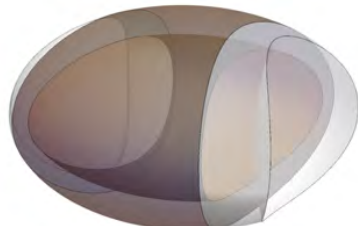

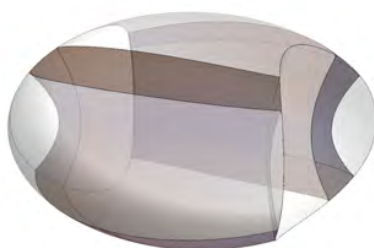
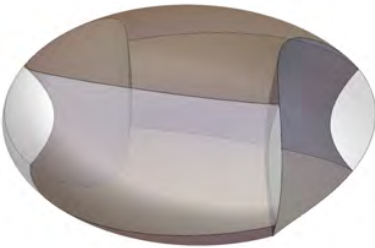

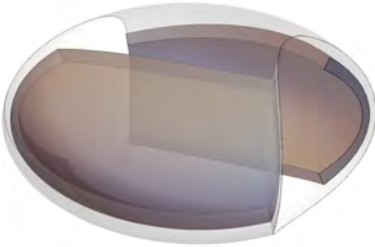


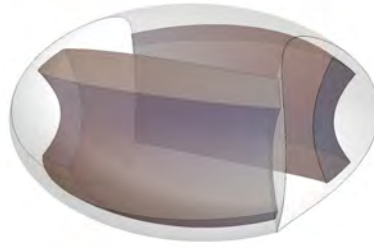
Как уже было сказано, для того чтобы описать области возможного движения, нужно знать промежутки знакопостоянства многочлена $V(z)$. Чтобы определить эти промежутки, мы должны знать расположение корней этого многочлена. Отметим, что в эллиптических координатах наша область задаётся двумя неравенствами: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_3 \geq \lambda_0$. Поэтому в случае общего положения мы должны потребовать выполнения следующего условия: внутри промежутков $[0; c]$, $[c; b]$, $[\lambda_0; a]$ должны найтись интервалы, где многочлен $V(z)$ принимает положительные значения.


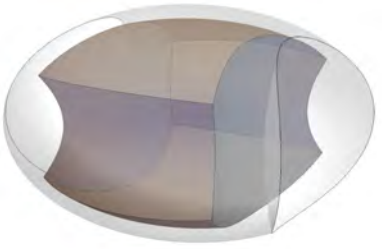
Итак, для нахождения областей возможного движения нам необходимо перебрать всевозможные варианты расположения корней многочлена $V(z)$. Поскольку a, b, c — постоянные корни этого многочлена, нам необходимо перебрать всевозможные варианты расположения корней ξ_1, ξ_2, ξ_3 с учётом требований. Следует помнить, что старший коэффициент многочлена

$V(z)$ равен $-\frac{k}{2}$. Поэтому случаи $k > 0$ и $k < 0$ принципиально разные, и мы разберём их по отдельности.

Начнём с притягивающего потенциала, то есть со случая $k > 0$.

Таблица 1. Классификация областей возможного движения при $k > 0$

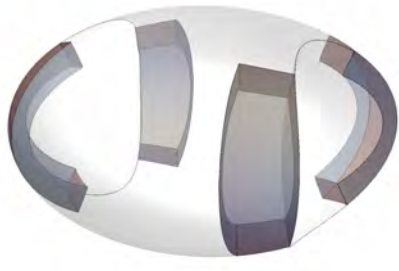


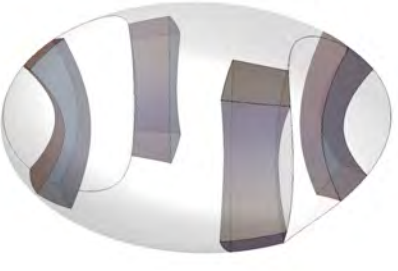
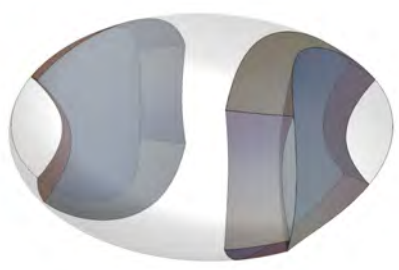

<p>1. $\xi_1 \leq 0 < \xi_2 < c < \xi_3 < b$</p> 	<p>2. $\xi_1 \leq 0 \leq \xi_2 < c < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$</p> 
<p>3. $\xi_1 \leq 0 < \xi_2 < c < b < \xi_3 \leq \lambda_0$</p> 	<p>4. $\xi_1 \leq 0 < c < \xi_2 < \xi_3 < b$</p> 
<p>5. $\xi_1 \leq 0 < c < \xi_2 < b < \xi_3 \leq \lambda_0$</p> 	<p>6. $\xi_1 \leq 0 < c < \xi_2 < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$</p> 
<p>7. $0 < \xi_1 < \xi_2 < c < \xi_3 < b$</p> 	<p>8. $0 < \xi_1 < \xi_2 < c < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$</p> 
<p>9. $0 < \xi_1 < \xi_2 < c < b < \xi_3 \leq \lambda_0$</p> 	<p>10. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < \xi_3 < b$</p> 

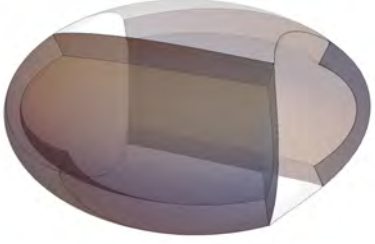
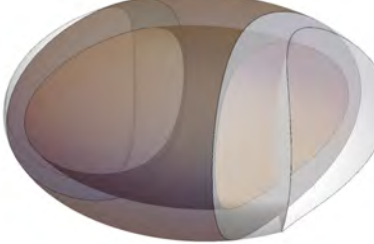

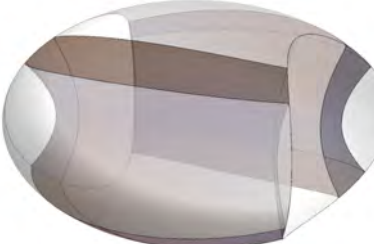
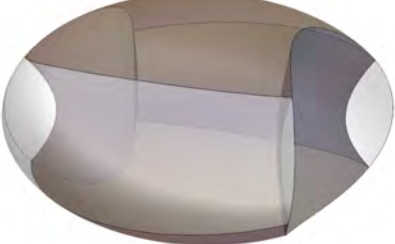
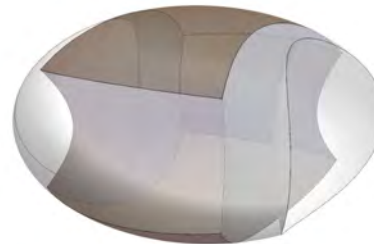
11. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < \xi_3 \leq \lambda_0$ 	12. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$ 
---	---

Заметим, что все эти области из таблицы 1 можно объединить в 4 группы $I = \{1, 7\}$, $II = \{2, 3, 8, 9\}$, $III = \{4, 10\}$, $IV = \{5, 6, 11, 12\}$. Любые две области из одной группы эквивалентны в следующем смысле: любую область можно получить из другой путём непрерывной деформации участков границы в классе софокусных квадрик, так чтобы значение изменяемого параметра границы не было бы равно a , b или c .

Теперь приведём классификацию областей возможного движения для отталкивающего потенциала, то есть при $k < 0$.

Таблица 2. Классификация областей возможного движения при $k < 0$

1. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$ 	2. $0 < \xi_1 < c < b < \xi_2 \leq \lambda_0 < \xi_3 < a$ 
3. $0 < \xi_1 < c < b < \lambda_0 < \xi_2 < \xi_3 < a$ 	4. $c < \xi_1 < \xi_2 < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$ 
5. $c < \xi_1 < b < \xi_2 \leq \lambda_0 < \xi_3 < a$ 	6. $c < \xi_1 < b < \lambda_0 < \xi_2 < \xi_3 < a$ 

<p>7. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < a < \xi_3$</p> 	<p>8. $0 < \xi_1 < c < \lambda_0 < \xi_2 < a < \xi_3$</p> 
<p>9. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 \leq \lambda_0 < a < \xi_3$</p> 	<p>10. $c < \xi_1 < \xi_2 < b < a < \xi_3$</p> 
<p>11. $c < \xi_1 < b < \xi_2 \leq \lambda_0 < a < \xi_3$</p> 	<p>12. $c < \xi_1 < b < \lambda_0 < \xi_2 < a < \xi_3$</p> 

Как и в случае притягивающего потенциала, области возможного движения можно разбить на группы: $I = \{1\}$, $II = \{2, 3\}$, $III = \{4\}$, $IV = \{5, 6\}$, $V = \{7\}$, $VI = \{8, 9\}$, $VII = \{10\}$, $VIII = \{11, 12\}$. Однако количество групп увеличилось вдвое.

Используя полученные сведения о структуре областей возможного движения, перейдём к описанию топологии слоения Лиувилля нашей системы.

§4 Бифуркационные диаграммы. Классификация особенностей

Обозначим фазовое пространство нашей системы через M^6 . Поскольку в задаче присутствует отражение, M^6 является кусочно-гладким многообразием. Более того $M^6 = \widetilde{M}^6 / \sim$, где $\widetilde{M}^6 = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x \mathbb{R}^3\}$, а \sim — следующее отношение эквивалентности.

Определение. Пары (x_1, v_1) и (x_2, v_2) эквивалентны, если выполнено одно из условий:

- $x_1 = x_2, v_1 = v_2$;
- $x_1 = x_2 \in \partial D$, а v_1 получен из v_2 путём нескольких последовательных отражений от касательных плоскостей квадрик границы стола, проходящих через точку x_1 .

Для нашей задачи мы рассмотрим отображение момента Ξ , сопоставляющее каждой точке (x, v) фазового пространства M^6 тройку $(\xi_1(x, v), \xi_2(x, v), \xi_3(x, v)) \in \mathbb{R}^3$. Давайте построим бифуркационную диаграмму, соответствующую отображению момента Ξ .

Напомним, что *бифуркационная диаграмма* — это подмножество образа отображения момента, состоящее из его особых точек. В гладком случае точка образа отображения момента называется *особой*, если в её прообразе есть точка, в которой ранг дифференциала отображения

момента не является максимальным. Однако наша задача является кусочно-гладкой, и такое определение особой точки нам не подходит.

Давайте дадим определение особой точки в терминах уже имеющейся классификации областей возможного движения. Как мы уже выяснили, для притягивающего потенциала в случае общего положения все области возможного движения можно разбить на 4 класса эквивалентности, а для отталкивающего — на 8 классов.

Определение. Для бильярда с потенциалом Гука внутри стола D точку ξ^0 образа отображения момента Ξ будем называть особой, если для любого $\varepsilon > 0$ в проколотой ε -окрестности точки ξ^0 либо существует точка, прообраз которой пуст, либо есть две точки, которые соответствуют разным классам эквивалентности областей возможного движения.

Определение. Для бильярда с потенциалом Гука внутри стола D бифуркационной диаграммой отображения Ξ назовём подмножество образа отображения момента, состоящее из всех его особых точек.

Построим бифуркационные диаграммы для стола, ограниченного эллипсоидом и двумя “чашечками” двуполостного гиперболоида. Начнём с притягивающего случая. Заметим, что все виды областей возможного движения задаются совокупностью линейных неравенств. Таким образом, стенками бифуркационной диаграммы будут являться участки плоскостей. Перечислим их уравнения: $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_2 = \xi_3$, $\xi_1 = c$, $\xi_2 = 0$, $\xi_2 = b$, $\xi_2 = c$, $\xi_3 = c$, $\xi_3 = b$, $\xi_3 = a$. Отметим, что другие уравнения из описания областей возможного движения участвуют в условиях, которые либо вытекают из условий, связанных с вышеперечисленными уравнениями, либо пропадают из-за введённого ранее отношения эквивалентности областей возможного движения. В итоге бифуркационная диаграмма при $k > 0$ имеет следующий вид (см. рис. 2). У неё ровно 4 камеры, в каждой из которых реализуется класс эквивалентности областей возможного движения.

Теперь построим бифуркационную диаграмму для оттягивающего потенциала. Как и при $k > 0$ она будет состоять из участков плоскостей. Перечислим эти гиперплоскости: $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_2 = \xi_3$, $\xi_1 = 0$, $\xi_1 = c$, $\xi_1 = b$, $\xi_2 = c$, $\xi_2 = b$, $\xi_2 = a$, $\xi_3 = \lambda_0$, $\xi_3 = a$. В итоге бифуркационная диаграмма при $k < 0$ имеет следующий вид (см. рис. 3). В отличие от бифуркационной диаграммы для притягивающего потенциала эта имеет 8 камер, опять же по числу классов эквивалентности областей возможного движения.

Теперь давайте классифицируем особенности рассматриваемой динамической системы. Напомним, что в гладком случае рангом особой точки (точки бифуркационной диаграммы) называется наименьший по всем прообразам данной точки ранг дифференциала отображения момента. Поскольку бильярд с потенциалом Гука внутри стола D является кусочно-гладкой интегрируемой гамильтоновой системой, такое определение ранга особой точки мы не можем использовать. Однако мы можем классифицировать особые точки по числу стенок бифуркационных диаграмм, проходящих через них.

Определение. Кратностью особой точки P будем называть количество плоскостей бифуркационной диаграммы, содержащих эту точку. Будем обозначать это число через $N(P)$.

Из явного устройства бифуркационных диаграмм ясно, что величина $N(P)$ принимает значения от 1 до 5.

Отметим, что плоскости $\xi_1 = \xi_2$ и $\xi_2 = \xi_3$ пересекаются с некоторыми из координатных плоскостей не под прямым углом. И, как мы в дальнейшем убедимся, работать с некоторыми точками пересечения этих плоскостей с другими плоскостями бифуркационной диаграммы гораздо сложнее. Поэтому мы разделим особые точки на 2 класса: *правильные* и *неправильные*.

Определение. Особую точку P будем называть *неправильной*, если через P проходят хотя бы три плоскости бифуркационной диаграммы, пересекающиеся по одной прямой. Остальные особые точки будем называть *правильными*.

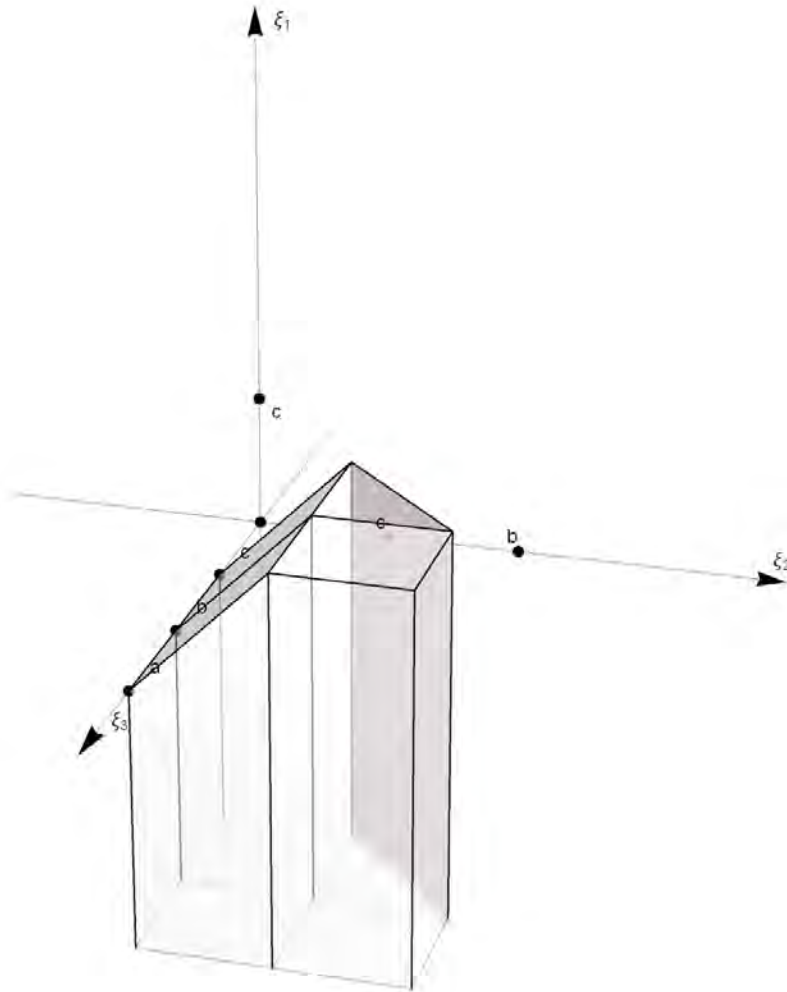


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма для притягивающего потенциала.

Из устройства бифуркационных диаграмм вытекает, что кратность правильной особой точки не превосходит трёх.

Разобъём правильные особые точки на два класса: *внешние* и *внутренние*.

Определение. Правильную особую точку P будем называть *внешней*, если она лежит на границе образа отображения момента. Иначе точку P будем называть *внутренней*.

В свою очередь внешние точки разобъём на *угловые* и *неугловые*.

Определение. Внешнюю особую точку P точку будем называть *угловой*, если она лежит на границе всех участков плоскостей бифуркационной диаграммы, пересекающихся в ней. Иначе P будем называть *неугловой*.

§5 Описание топологии слоения Лиувилля. Неособые точки

Для гладких вполне интегрируемых гамильтоновых систем справедлива теорема Лиувилля.

Теорема. (Лиувилль) Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и T_ξ – регулярная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда

1. T_ξ – гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$.

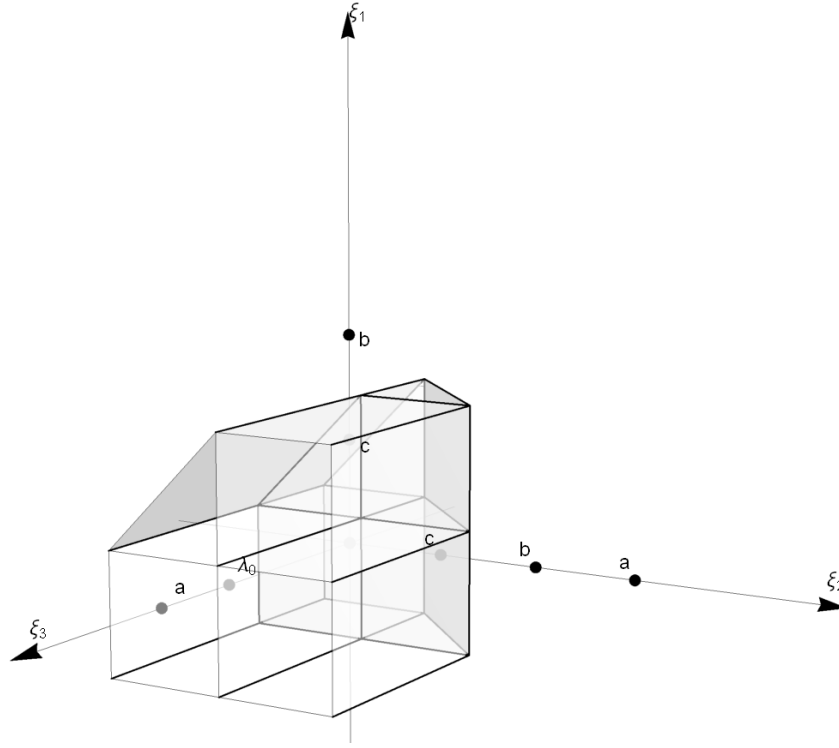


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма для отталкивающего потенциала.

2. Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору \mathbb{T}^n . (Этот тор называется тором Лиувилля.)
3. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора \mathbb{T}^n на диск D^n .

Эта теорема описывает топологию слоения Лиувилля вблизи неособых точек. Оказывается, для бильярда с потенциалом Гука внутри стола D справедлив её аналог.

Теорема 1. Пусть T_R — неособая поверхность уровня интегралов ξ_1, ξ_2, ξ_3 бильярда с потенциалом Гука внутри стола D . Тогда T_ξ гомеоморфно либо тору \mathbb{T}^3 , либо несвязному объединению нескольких торов \mathbb{T}^3 . Более того, слоение Лиувилля в некоторой окрестности U поверхности T_R тривиально, то есть гомеоморфно прямому произведению T_R на диск D^n .

Докажем теорему 1.

Доказательство. Для начала давайте обусловимся нумеровать камеры бифуркационных диаграмм номерами соответствующих им классов эквивалентности областей возможного движения. В случае $k > 0$ камеры занумерованы римскими цифрами от I до IV , а при $k < 0$ — от I до $VIII$.

Мы докажем эту теорему для притягивающего потенциала и камеры I соответствующей бифуркационной диаграммы. Остальные случаи разбираются схожим образом.

Итак, рассмотрим точку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ этой камеры. Обозначим через D_ξ соответствующую область возможного движения. В каждой точке $x \in D_\xi$ рассмотрим все векторы v такие, что $(x, v) \in T_\xi$. Согласно уравнениям движения, в каждой внутренней точке области возможного движения, не лежащей ни в одной координатной плоскости, возникает в точности 8 таких векторов. Действительно, в этих точках эллиптические координаты удовлетворяют ограничениям $\lambda_1 \in (-\infty, c)$, $\lambda_2 \in (c, b)$, $\lambda_3 \in (b, a)$, а, следовательно, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $V(\lambda_i) > 0$. А сколько векторов расположено в оставшихся точках области возможного движения?

Для начала разберёмся с внутренними точками области возможного движения, лежащими в координатных плоскостях. Рассмотрим все внутренние точки, расположенные в плоскости

$x = 0$, но не лежащие в плоскостях $y = 0$, $z = 0$. Поскольку плоскость $x = 0$ в эллиптических координатах задаётся уравнением $\lambda_3 = a$, в этих точках вырождается третья эллиптическая координата. При этом остальные эллиптические координаты не вырождаются и соответствующие значения $|\dot{\lambda}_1|$ и $|\dot{\lambda}_2|$ отличны от нуля. Поскольку плоскость $x = 0$ задаётся уравнением $\lambda_3 = a$ и эллиптические координаты ортогональны, пара координат (λ_1, λ_2) в плоскости $x = 0$ при $y, z \neq 0$ является гладкой локальной системой координат. Следовательно, если мы спроектируем векторы скорости в рассматриваемых точках на касательную плоскость $T_{(0,y,z)}Oyz$, то в проекции мы получим 4 вектора. Давайте теперь покажем, что $|\dot{x}| \neq 0$. Для этого отметим, что в области невырожденности эллиптических координат справедлива формула:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \dot{\lambda}_1 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_3} \dot{\lambda}_3,$$

при этом, если $\lambda_3 \rightarrow a$, производные $\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}$ и $\frac{\partial x}{\partial \lambda_2}$ стремятся к нулю. Значит, верна формула

$\dot{x}^2 = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_3} \dot{\lambda}_3 \right)^2$. Воспользовавшись уравнениями движения и формулами перехода к эллиптическим координатам, получим:

$$\dot{x}^2 = \frac{k(a - \xi_1)(a - \xi_2)(a - \xi_3)}{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $a > \xi_3$, верно, что $|\dot{x}| \neq 0$. А значит, в точках области возможного движения, лежащих в плоскости $x = 0$, но не лежащих в других координатных плоскостях снова возникают 8 векторов скорости. Оставшиеся случаи внутренних точек разбираются аналогично.

Теперь разберёмся с точками на границе области возможного движения. Заметим, что в нашем случае её граница состоит из двух эллипсоидов, однополостного и двуполостного гиперболоидов. В каждой граничной точке, не являющейся точкой излома, в силу бильярдного отражения возникают в точности 4 пары неэквивалентных векторов. В точках, где пересекаются две квадрики границы, возникают 2 четвёрки неэквивалентных векторов, а в угловых точках — 1 восьмёрка.

Давайте, используя знания о расположении векторов скорости, опишем топологию слоя T_ξ . Но для начала отметим, что область возможного движения в нашем случае состоит из двух симметричных компонент связности, расположенных в полупространствах $y > 0$ и $y < 0$. Давайте опишем топологию слоя T_ξ для компоненты связности области возможного движения, расположенной в полупространстве $y > 0$. Топология слоя на другой компоненте будет такой же.

Итак, сперва введём обозначения векторов скорости для внутренних точек рассматриваемой компоненты, не лежащих в плоскостях $x = 0$, $z = 0$. Отметим, что эти плоскости разбивают нашу компоненту на 4 куска. Причём для всякой точки любого из этих 4 кусков каждому вектору скорости в ней можно взаимнооднозначно сопоставить тройку знаков его компонент в эллиптических координатах: $(\text{sign } \dot{\lambda}_1, \text{sign } \dot{\lambda}_2, \text{sign } \dot{\lambda}_3)$. Используя эту кодировку векторов скорости, заполним таблицу обозначений.

Отметим, что одному и тому же набору знаков соответствуют разные обозначения векторов. Однако благодаря такому подходу, обозначения векторов скорости можно однозначно продолжить на всю компоненту области возможного движения. При этом векторные поля v_i будут гладкими внутри D_ξ .

	(+, +, +)	(-, +, +)	(-, -, +)	(+, -, +)	(+, +, -)	(-, +, -)	(-, -, -)	(+, -, -)
$x > 0$ $z > 0$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$x > 0$ $z < 0$	v_5	v_6	v_7	v_8	v_1	v_2	v_3	v_4
$x < 0$ $z > 0$	v_2	v_1	v_3	v_3	v_6	v_5	v_8	v_7
$x < 0$ $z < 0$	v_6	v_5	v_8	v_7	v_2	v_1	v_3	v_3

Теперь давайте расслоим рассматриваемую компоненту области возможного движения на софокусные двуполостные гиперболоиды. Рассмотрим слой этого расслоения с векторами v_1, v_2, v_3, v_4 в точках этого слоя. Нетрудно показать, что слой с этими векторами в M^6 образует комплекс, гомеоморфный тору \mathbb{T}^2 . Доказательство этого факта производится с помощью расслоения этого слоя софокусными эллипсоидами.

Будем двигаться по слоям расслоения с векторами $v_1 - v_4$ в направлении увеличения координаты x пока не упрёмся в границу области возможного движения. Каждый такой слой тоже будет гомеоморфен тору \mathbb{T}^2 . На границе области возможного движения происходит склейка векторов: v_1 склеивается с v_5 , v_2 — с v_6 , v_3 — с v_7 , v_4 — с v_8 , но слой по-прежнему будет гомеоморфен тору \mathbb{T}^2 . Отразившись от границы области возможного движения, мы будем двигаться по слоям расслоения с векторами $v_5 - v_8$ в направлении уменьшения координаты x пока снова не упрёмся в границу области возможного движения. Там мы снова отразимся в слой расслоения с векторами $v_1 - v_4$, который через некоторое время вернётся в исходное положение. Отметим, что, двигаясь по слоям расслоения с векторами, мы постоянно получали на M^6 тор \mathbb{T}^2 . Поскольку после полного обхода все точки и соответствующие им векторы скорости вернулись в исходное положение, ограничение T_ξ на рассматриваемую компоненту области возможного движения гомеоморфно тору \mathbb{T}^3 . А так как область возможного движения состоит из двух однокровых компоненты связности, T_ξ гомеоморфна несвязному объединению двух торов \mathbb{T}^3 .

Осталось отметить, что при малом изменении ξ область возможного движения не меняет свой тип и при этом векторные поля v_i будут непрерывно меняться. Значит, вблизи T_ξ слоение Лиувилля является тривиальным. Что и требовалось доказать. ■

Теперь перейдём к описанию топологии слоения Лиувилля в окрестностях особых точек.

§6 Описание топологии слоения Лиувилля. Правильные особенности кратности 1

Теорема 2. Пусть P — правильная особая точка кратности 1 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если P — внутренняя точка, то T_P гомеоморфно несвязному объединению прямых произведений особого слоя седлового 3-атома и окружности. Более того, прообраз малой окрестности точки P при отображении момента гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида $V \times S^1 \times D^2$, где D^2 — диск, а V один из следующих седловых 3-атомов: $A^*, C_2^{(3)}, B^{(3)}$.
2. Если P — внешняя точка, то T_P гомеоморфно несвязному объединению торов \mathbb{T}^2 , количество которых равно числу торов \mathbb{T}^3 в прообразе неособой точки, лежащей в прилегающей камере. Более того, прообраз малой окрестности такой точки гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида: $A^{(2)} \times \mathbb{T}^2 \times D^2$.

Доказательство. 1. Докажем только для притягивающего потенциала и точки $P = (\xi_1, c, \xi_3)$, где $\xi_1 < c, c < \xi_3 < b$. Область возможного движения D_ξ в этом случае включает в себя участок фокального эллипса F_1 и имеет вид, представленный на рисунке 4.

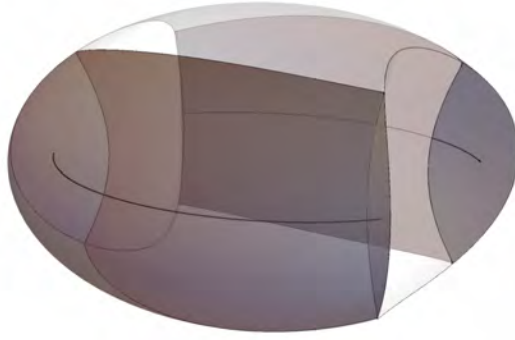


Рис. 4: Область возможного для совместного уровня интегралов $\xi = (\xi_1, c, \xi_3)$, где $\xi_1 < c$, $c < \xi_3 < b$. Черным выделены участки фокального эллипса F_1 , входящие в состав области возможного движения.

Она состоит из двух симметричных компонент связности. Давайте рассмотрим ту, которая лежит в полупространстве $y > 0$. В каждой точке x этой компоненты области возможного движения рассмотрим все векторы v такие, что $(x, v) \in T_\xi$. Как и в предыдущей теореме в каждой внутренней точке, не лежащей в координатных плоскостях возникает 8 векторов скорости. Будем обозначать их точно так же, как в предыдущей теореме. Используя рассуждения предыдущей теоремы, несложно показать, что в каждой внутренней точке, лежащей в плоскости $x = 0$, но не лежащей в плоскости $z = 0$ тоже возникает 8 векторов скорости. А как устроены векторы скорости в точках плоскости $z = 0$?

Оказывается, что в любой внутренней точке, лежащей в плоскости $z = 0$, но не лежащей на фокальном эллипсе F_1 возникает ровно 4 вектора скорости. Более того, если эллиптические координаты этой точки удовлетворяют условиям $\lambda_1 = c$ и $\lambda_2 > c$, то в ней совпадают некоторые непрерывные продолжения векторных полей v_i , а именно: $v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$, $v_5 = v_6$, $v_7 = v_8$. А если эллиптические координаты этой точки удовлетворяют условиям $\lambda_1 < c$ и $\lambda_2 = c$, то в ней $v_1 = v_4$, $v_2 = v_3$, $v_5 = v_8$, $v_6 = v_7$. Давайте выясним расположение векторов скорости во внутренних точках, лежащих на фокальном эллипсе F_1 .

Чем характерны точки фокальных кривых? В них вырождаются сразу две эллиптические координаты, поэтому чтобы найти векторы скорости в точках фокальных кривых необходимо совершить предельный переход сразу по двум параметрам. Для наглядности мы опишем множество векторов скорости только в одной точке. В остальных точках расположение векторов скорости будет похожим. Для простоты рассмотрим точку P эллипса F_1 с координатами $(0, \sqrt{b-c}, 0)$. Она лежит в рассматриваемой компоненте области возможного движения. Как уже было отмечено в предыдущей теореме, первая компонента вектора скорости в декартовых координатах удовлетворяет следующему соотношению:

$$\dot{x}^2 = \frac{k(a - \xi_1)(a - \xi_3)}{a - c}.$$

Из этой формулы становится очевидным, что $\dot{x} \neq 0$. Более того, оказывается, если вектор скорости $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ таков, что $(P, v) \in T_\xi$, то и вектор $v' = (-\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ обладает этим же свойством (то есть $(P, v') \in T_\xi$).

Поскольку плоскость $x = 0$ в эллиптических координатах задаётся уравнением $\lambda_3 = a$, и при этом сами эллиптические координаты ортогональны, в плоскости Oyz эллиптические координаты λ_1, λ_2 задают при $\lambda_1 < c$ и $\lambda_2 \in (c, b)$ гладкую локально-регулярную систему координат. Для того чтобы определить компоненты \dot{y}, \dot{z} вектора скорости в точке P , мы отступим от этой точки в полуплоскости $x = 0, z > 0$ и возьмём предел векторов скорости по двум координатам

λ_1, λ_2 . Будем считать, что

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= c - \alpha^2\tau + \bar{d}(\tau), \\ \lambda_2 &= c + \beta^2\tau + \bar{d}(\tau),\end{aligned}$$

при $\tau \rightarrow 0+$, где α и β — произвольные вещественные числа, одновременно отличные от нуля.

Поскольку на декартовы координаты мы наложили условия $x = 0, y > 0, z > 0$, якобиан замены от (λ_1, λ_2) к (y, z) имеет следующий вид:

$$J = -\frac{1}{2\sqrt{b-c}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b-\lambda_2}{b-\lambda_1}} & \sqrt{\frac{b-\lambda_1}{b-\lambda_2}} \\ \sqrt{\frac{\lambda_2-c}{c-\lambda_1}} & -\sqrt{\frac{c-\lambda_1}{\lambda_2-c}} \end{pmatrix}.$$

Компоненты $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2$ векторов скорости вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(a-\lambda_1)} \sqrt{k(\lambda_1-\xi_1)(\xi_3-\lambda_1)(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2(\lambda_2-c)}{(\lambda_2-\lambda_1)(a-\lambda_2)} \sqrt{k(\lambda_2-\xi_1)(\xi_3-\lambda_2)(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)}.\end{aligned}$$

При замене переменных координаты в касательном пространстве меняются по формуле

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix}.$$

При заданных значениях α и β (в наших предположениях α и β одновременно не равны 0) вычислим предел выражения в правой части последней формулы. Получим:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \left(\pm \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \pm \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \sqrt{\frac{k(c-\xi_1)(\xi_3-c)}{a-c}}, \\ \dot{z} &= \left(\pm \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \mp \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \sqrt{\frac{k(c-\xi_1)(\xi_3-c)}{a-c}}.\end{aligned}$$

Здесь красным цветом выделены знаки, которые нужно выбирать разными, а синим, которые нужно брать одинаковыми. Отметим, что если для \dot{y} красный синий знаки совпадают, то в пределе мы получим только два вектора, которые можно получить, взяв разные знаки и $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Поэтому можем считать, что в формуле для \dot{y} знаки разные.

Положим:

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Отметим, что, в то время как α и β пробегают все значения (кроме одновременного равенства нулю), пара $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ пробегает всю единичную окружность. Пользуясь формулами синуса и косинуса двойного угла получаем:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \pm \cos 2\varphi \sqrt{\frac{k(c-\xi_1)(\xi_3-c)}{a-c}}, \\ \dot{z} &= \pm \sin 2\varphi \sqrt{\frac{k(c-\xi_1)(\xi_3-c)}{a-c}}.\end{aligned}$$

Избегая повторения, можем выписать координаты получившихся векторов:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \pm \sqrt{\frac{k(a - \xi_1)(a - \xi_3)}{a - c}}, \\ \dot{y} &= \cos \psi \sqrt{\frac{k(c - \xi_1)(\xi_3 - c)}{a - c}}, \\ \dot{z} &= \sin \psi \sqrt{\frac{k(c - \xi_1)(\xi_3 - c)}{a - c}}, \end{aligned}$$

где $\psi \in [0; 2\pi)$. Таким образом, в точке с координатами $(0, \sqrt{b - c}, 0)$ векторы скорости образуют несвязное объединение двух окружностей. Аналогично устроены векторы скорости в других точках фокального эллипса F_1 внутри компоненты области возможного движения.

На границе области возможного движения всё устроено гораздо проще из-за отражения.

Давайте теперь, используя знания о расположении векторов скорости в точках области возможного движения, опишем топологию слоя T_ξ . Для этого мы снова расслоим рассматриваемую компоненту области возможного движения на софокусные двуполостные гиперболоиды. Рассмотрим слой этого расслоения, соответствующий плоскости $x = 0$, со всеми такими векторами скорости в этих точках, у которых компонента \dot{x} больше нуля. Спроецируем эти векторы на касательные подпространства к плоскости Oyz . Схематично нарисуем получившиеся проекции векторов скорости на этом слое (см. рис 5).

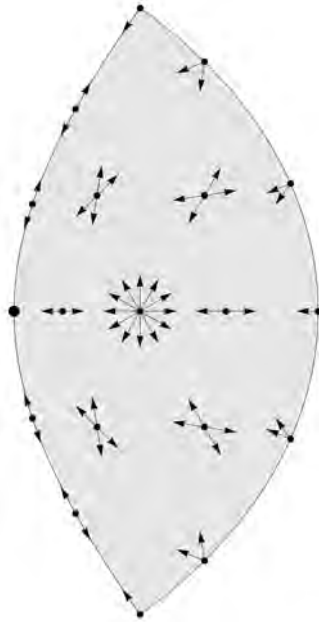


Рис. 5: Схематичное расположение проекций векторов скорости на слое $x = 0$.

Расположение этих проекций совпадает с расположением векторов скорости плоского бильярда без потенциала внутри рассматриваемого слоя при особом значении дополнительного интеграла (см. [2]). Аналогичными рассуждениями соответствующей теоремы из [Ved] можно показать, что слой нашего расслоения с проекциями рассматриваемых векторов образует комплекс, гомеоморфный особому слою 3-атома A^* . Однако отображение проекции взаимно однозначно для слоя $x = 0$ с векторами скорости, у которых компонента \dot{x} отлична от нуля. Поэтому слой $x = 0$ с этими векторами гомеоморфен критическому слою 3-атома A^* .

Теперь будем двигаться по слоям расслоения в направлении увеличения координаты x , пока не упруемся в границу области возможного движения. На каждом таком слое мы будем

рассматривать соответствующие заданному уровню интегралов векторы скорости, у которых компонента $\dot{\lambda}_3$ меньше нуля.

Каждый такой слой, с рассматриваемыми векторами скорости тоже будет гомеоморфен критическому слою 3-атома A^* . На границе области возможного движения происходит склейка векторов, но слой по-прежнему будет гомеоморфен критическому слою 3-атома A^* . Отразившись от границы области возможного движения, мы будем двигаться по слоям расслоения с векторами скорости, у которых компонента $\dot{\lambda}_3$ больше нуля, пока не вернёмся к слою $x = 0$. На этом участке обхода $\dot{\lambda}_3 > 0$, поэтому, вернувшись к слою $x = 0$, мы придём со всеми векторами, у которых $\dot{x} < 0$. Двигаясь далее по слоям в направлении уменьшения координаты x , мы будем получать критический слой атома A^* . Отразившись во второй раз от границы области возможного движения, мы снова будем двигаться в направлении увеличения координаты x , и через некоторое время вернёмся к слою $x = 0$ с тем же расположением векторов, которое было в начале обхода. Более того, все пары (x, v) после полного обхода вернуться в исходное положение. Поскольку при таком обходе на каждом слое с выбранными векторами мы получали критический слой 3-атома A^* , и область возможного движения состоит из двух симметричных относительно плоскости Oxz компонент связности, T_ξ гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений окружности и критического слоя 3-атома A^* .

Мы доказали первую часть первого пункта. Давайте теперь покажем, что прообраз малой окрестности точки (ξ_1, c, ξ_3) , где $\xi_1 < c$, $c < \xi_3 < b$, гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений вида $A^* \times S^1 \times D^2$, где D^2 — двумерный диск.

Давайте выберем $\varepsilon > 0$ такое, что окрестность $U_\varepsilon(\xi_1, c, \xi_3) = [\xi_1 - \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon] \times [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \times [\xi_3 - \varepsilon, \xi_3 + \varepsilon]$ пересекала бы только одну стенку бифуркационной диаграммы. Зафиксируем произвольные $\xi'_1 \in [\xi_1 - \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon]$, $\xi'_3 \in [\xi_3 - \varepsilon, \xi_3 + \varepsilon]$ и рассмотрим прообраз отрезка $\xi'_1 \times [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \times \xi'_3$ при отображении момента. Для этого мы параметризуем его следующим образом $(\xi'_1, c + t, \xi'_3)$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Отметим, что для любого t мы можем расслоить нашу область на софокусные двуполостные гиперболоиды. Благодаря наличию этого расслоения мы с уверенностью можем сказать, что прообраз рассматриваемого отрезка гомеоморфен прямому произведению окружности и ограничения прообраза этого отрезка на слой $x = 0$ с векторами скорости, у которых компонента \dot{x} больше нуля. Давайте опишем эволюцию изменения этих векторов в зависимости от t . Для этого мы спроектируем их на соответствующие касательные подпространства к плоскости $x = 0$. Поскольку $\dot{x} > 0$, никакие два вектора скорости при такой проекции не склеятся, и, следовательно, структура расположения векторов тоже не изменится. Схематично изобразим проекции этих векторов при $t < 0$, $t = 0$, $t > 0$ (см. рис 6).

Становится ясным, что расположение проекций совпадает с расположением векторов скорости биллиарда плоского биллиарда внутри рассматриваемого слоя вблизи критического значения. Поэтому согласно результатам работы [Ved] прообраз отрезка $(\xi'_1, c + t, \xi'_3)$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, ограниченного на слой $x = 0$, с векторами скорости, для которых $\dot{x} > 0$, гомеоморфен несвязному объединению двух 3-атомов A^* . Значит, прообраз самого отрезка гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений вида $A^* \times S^1$.

Осталось заметить, что при изменении ξ'_1 и ξ'_3 , прообразы соответствующих отрезков меняются непрерывно и всегда гомеоморфны несвязному объединению двух прямых произведений вида $A^* \times S^1$. Поскольку, эти прообразы никогда не пересекаются в M^6 , а параметры ξ'_1 и ξ'_3 пробегает множество, гомеоморфное замкнутому диску D^2 , прообраз окрестности $U_\varepsilon(\xi_1, c, \xi_3)$ при отображении момента гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений вида $A^* \times S^1 \times D^2$.

Аналогично разбираются остальные случаи. Тем самым первый пункт теоремы доказан.

2. Опять же докажем только один частный случай. Рассмотрим точку $(\xi_1, 0, \xi_3)$ бифуркационной диаграммы для притягивающего потенциала, где $\xi_1 < 0$ и $c < \xi_3 < b$. Эта точка граничит с камерой I . Областью возможного движения, соответствующей этой точке, является несвязное объединение двух областей на эллипсоиде границе стола, ограниченных граничным двуполостным гиперболоидом и однополостным гиперболоидом параметра ξ_3 . Эти две области симметричны

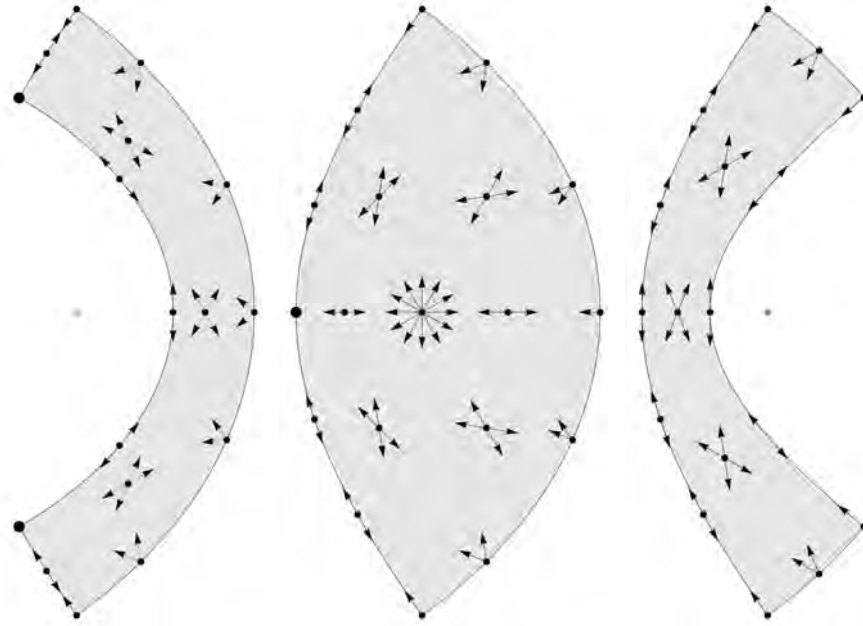


Рис. 6: Эволюция расположения проекций векторов скорости на слое $x = 0$ при $t < 0$, $t = 0$, $t > 0$.

друг другу относительно плоскости $y = 0$. Ясно, что поверхность T_ξ будет представлять собой несвязное объединение двух гомеоморфных друг другу двумерных комплексов. Покажем, что этими комплексами являются двумерные торы \mathbb{T}^2 .

Рассмотрим компоненту связности области возможного движения, лежащую в полупространстве $y > 0$, и опишем расположение векторов скорости в точках этой компоненты. В каждой внутренней точке этой компоненты расположено ровно 4 вектора скорости, на граничных дугах в силу отражения, либо касания возникает по два вектора скорости, в угловых точках — по одному вектору.

Расслоим рассматриваемую компоненту связности области возможного движения на софокусные двуполостные гиперboloиды. И рассмотрим слой этого расслоения, соответствующий плоскости $x = 0$, с векторами скорости, у которых $\dot{x} > 0$. Очевидно, что этот слой с векторами будет гомеоморфен окружности. Совершив полный обход по слоям расслоения (такой обход как и в предыдущем пункте), мы вернёмся в исходное положение: все точки и векторы скорости в них станут на место. Более того, на каждом слое при таком обходе мы будем получать окружность S^1 . Таким образом, ограничение T_ξ на рассматриваемую компоненту области возможного движения гомеоморфно двумерному тору \mathbb{T}^2 . Следовательно, T_ξ гомеоморфно несвязному объединению двух торов \mathbb{T}^2 . Тем самым, первая часть второго пункта доказана.

Теперь покажем, что малая окрестность этой точки гомеоморфна несвязному объединению двух прямых произведений вида $A \times S^1 \times D^2$, где A — 3-атом A , D^2 — двумерный диск.

Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что окрестность $U_\varepsilon(\xi_1, 0, \xi_3) = [\xi_1 - \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon] \times [0, \varepsilon] \times [\xi_3 - \varepsilon, \xi_3 + \varepsilon]$ пересекалась бы с бифуркационной диаграммой только по стенке $\xi_2 = 0$. Зафиксируем $\xi'_1 \in [\xi_1 - \varepsilon; \xi_1 + \varepsilon]$ и $\xi'_3 \in [\xi_3 - \varepsilon; \xi_3 + \varepsilon]$. Отрезок, соединяющий точки $(\xi'_1, 0, \xi'_3)$ и $(\xi'_1, \varepsilon, \xi'_3)$, запараметризуем так: (ξ'_1, t, ξ'_3) , где $t \in [0; \varepsilon]$. Поскольку рассматриваемый бильярдный стол обладает расслоением на софокусные двуполостные гиперboloиды, чтобы найти прообраз этого отрезка нам достаточно прямо умножить окружность S^1 на прообраз этого отрезка, ограниченный на слой $x = 0$ с векторами скорости, у которых $\dot{x} > 0$. Поскольку при всех t область возможного движения будет состоять из двух компонент связности, симметричных друг другу относительно плоскости $y = 0$, нам достаточно рассмотреть те из них, которые находятся в полпространстве $y > 0$. Давайте посмотрим на эволюцию этих векторов при изменении параметра t . Для этого мы спроектируем эти векторы на касательные плоскости к плоскости $x = 0$. Схематично изобразим эволюцию

этих проекций (см рис 7).

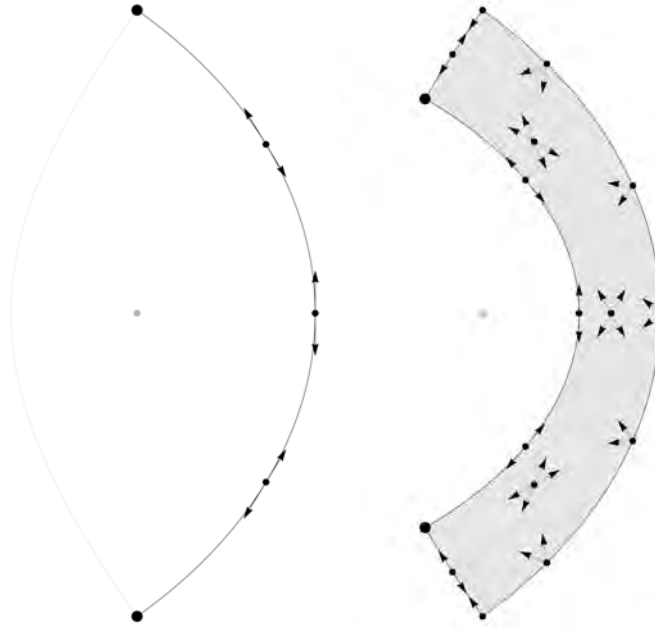


Рис. 7: Эволюция расположения проекций векторов скорости на слое $x = 0$. Слева изображён случай $t = 0$, справа — $t > 0$. Жирными чёрными точками выделены нулевые векторы скорости.

Видим, что эта эволюция совпадает с эволюцией векторов скорости плоского бильярда, внутри стола ограниченного эллипсом и одной ветвью софокусной с ним гиперболы, когда значение дополнительного интеграла принимает наименьшее значение. Согласно результатам работы [Ved] прообраз отрезка (ξ'_1, t, ξ'_3) , где $t \in [0; \varepsilon]$, ограниченного на слой $x = 0$ с векторами скорости, у которых $\dot{x} > 0$, гомеоморфен 3-атому A . Следовательно, прообраз самого отрезка гомеоморфен прямому произведению 3-атома A и окружности S^1 . Поскольку области возможного движения состоят из двух компонент связности и параметры ξ'_1 и ξ'_3 пробегает множество гомеоморфное замкнутому диску D^2 . Следовательно, прообраз окрестности $U_\varepsilon(\xi_1, 0, \xi_3)$ гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений вида $A \times S^1 \times D^2$. Теорема доказана. ■

§7 Описание топологии слоения Лиувилля. Правильные особенности кратности 2

Для начала сформулируем результат для правильных внешних точек.

Теорема 3. Пусть P — правильная внешняя особая точка кратности 2 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если P — угловая точка, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида $A^{(2)} \times A^{(2)} \times S^1 \times D^1$.
2. Если P — неугловая точка, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида $V \times A^{(2)} \times D^1$, где V один из следующих седловых 3-атомов: A^* , $C_2^{(3)}$, $B^{(3)}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 1, 2.

Куда более интересен случай правильных внутренних точек.

Теорема 4. Пусть P — правильная внутренняя особая точка кратности 2 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если $k > 0$, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен прямому произведению вида $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times S^1 \times D^1$.
2. Если $k < 0$, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен несвязному объединению одного или двух прямых произведений вида:

- $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times S^1 \times D^1$;
- $B^{(3)} \times B^{(2)} \times D^1$;
- $C^{(3)} \times B^{(2)} \times D^1$;
- $A^* \times B^{(2)} \times D^1$.

Доказательство. 1. В случае положительного k правильными особенностями кратности 2 являются точки вида (ξ_1, c, b) , где $\xi_1 < c$. Рассмотрим одну из этих точек и обозначим её через P . Опишем прообраз малой окрестности точки P . Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что кубическая окрестность $U_\varepsilon(P) = [\xi_1 - \varepsilon, \xi_1 + \varepsilon] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [b - \varepsilon; b + \varepsilon]$ точки P пересекалась бы с бифуркационной диаграммой только по внутренним особенностям кратности 2. В теоремах 1 и 2 мы пользовались расслоением нашего стола на софокусные двуполостные гиперboloиды. Воспользуемся им снова. Мы получим, что прообраз окрестности $U_\varepsilon(P)$ представится в виде прямого произведения окружности S^1 и некоторого пятимерного комплекса K^5 , где K^5 есть ограничение прообраза окрестности $U_\varepsilon(P)$ на слой, соответствующий плоскости $x = 0$, с касательными векторами, у которых $\dot{x} > 0$. Далее мы будем рассматривать это ограничение. Заметим, что для всякого $t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ прообразы 2-дисков $U_\varepsilon(P, t) = [\xi_1 - t, \xi_1 + t] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [b - \varepsilon; b + \varepsilon]$, ограниченные на K^5 будут попарно гомеоморфны. Следовательно, K^5 гомеоморфно прямому произведению окружности S^1 и 4-комплекса K_1^4 , где K_1^4 — ограничение 2 диска $U_\varepsilon(P, t) = [\xi_1 - t, \xi_1 + t] \times [c - \varepsilon; c + \varepsilon] \times [b - \varepsilon; b + \varepsilon]$ на плоскость $x = 0$ с касательным векторами, у которых $\dot{x} > 0$.

Теперь опишем топологию комплекса K_1^4 . В плоскости $x = 0$ у нас “живут” две эллиптические координаты: λ_1, λ_2 . Эллиптическая координата λ_3 вырождается и равна a . Напишем уравнения движения точки внутри этой плоскости.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - a)} \sqrt{k(\lambda_1 - \xi_1)(\lambda_1 - \xi_2)(\lambda_1 - \xi_3)(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - a)} \sqrt{k(\lambda_2 - \xi_1)(\lambda_2 - \xi_2)(\lambda_2 - \xi_3)(a - \lambda_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_1, \lambda_2 < a$ и $\xi_1 < c$ в окрестности точки P , величины $\lambda_1 - a, \lambda_i - \xi_1$ не обращаются в ноль. Исключив эти множители из уравнения, мы не поменяем топологию слоения Лиувилля в окрестности точки. Значит, K_1^4 гомеоморфен окрестности слоя, соответствующего точке (b, c) , слоения Лиувилля динамической системы с двумя степенями свободы, уравнения движения которой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{k(\lambda_1 - \xi_2)(\lambda_1 - \xi_3)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{k(\lambda_2 - \xi_2)(\lambda_2 - \xi_3)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Отметим, что такими же уравнениями описывается бильярд внутри эллипса (с полуосями b, c) с отгалкивающим потенциалом Гаука величины $-k$. Первыми интегралами этой системы являются функции ξ_2, ξ_3 . Причём прообраз малой окрестности точки (b, c) при соответствующем отображении момента гомеоморфен полупрямому произведению вида $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2$. Доказательство этого факта изложено в [3]. Следовательно, K_1^4 гомеоморфен этому произведению.

Значит, прообраз $U(P)$ гомеоморфен произведению следующего вида $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times S^1 \times D^1$. Что и требовалось.

2. В кратце обсудим идею доказательства этого пункта. Для точек вида (c, b, ξ_3) , $\xi_3 \in (\lambda_0; a) \cup (a; +\infty)$ доказательство проводим по аналогии с пунктом 1. Для других точек можно весьма нетрудно представить прообраз их окрестностей в виде прямых произведений описанных в условии теоремы. Доказательство этого факта проводится по аналогии с доказательствами предыдущих теорем. ■

§8 Описание топологии слоения Лиувилля. Правильные особенности кратности 3

Теорема 5. Пусть P — правильная особая точка кратности 3 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если P является внешней точкой, то P является угловой точкой и прообраз её малой окрестности гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида:

$$A^{(2)} \times A^{(2)} \times A^{(2)}.$$

2. Если P является внутренней точкой и $k < 0$, то $P = (c, b, a)$ и прообраз её малой окрестности гомеоморфен прямому произведению вида $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times B^{(2)}$. При $k > 0$ внутренних особых точек кратности 3 нет.

Доказательство. Первый пункт теоремы доказывается несложно. Нужно воспользоваться той же техникой, которую мы использовали при доказательстве пункта 2 теоремы 2. Поэтому мы сразу перейдём к доказательству второго пункта этой теоремы.

Очевидно, что внутренняя правильная особенность кратности 3 только одна и она возникает в точке $P = (c, b, a)$ и только при $k < 0$. Итак, рассмотрим малую кубическую ε -окрестность точки P ($U_\varepsilon(P) = [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \times [b - \varepsilon; b + \varepsilon] \times [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$) и опишем её прообраз. Рассмотрим кусочно-заданную функцию $f(t)$, определённую при $t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ по формуле:

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{при } t \leq 0, \\ a - t & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Заметим, что для всякого $t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ в прообразе среза $U_\varepsilon(t, P) = [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \times [b - \varepsilon; b + \varepsilon] \times [t - \varepsilon; t + \varepsilon]$ всегда будут присутствовать точки на двуполостном гиперboloиде $\lambda_3 = f(t)$. Более того при всех t ограничения прообраза среза $U_\varepsilon(t, P)$ на слой двуполостного гиперboloида $\lambda_3 = f(t)$ (может быть даже вырожденного) при $x \geq 0$ с векторами скорости, у которых $\dot{\lambda}_3 > 0$ (для вырожденных $\dot{x} > 0$), гомеоморфно комплексу K_1^4 , описанному в прошлой теореме. Иными словами это ограничение гомеоморфно полупрямому произведению вида $(B^{(2)} \times C^{(2)}) / \mathbb{Z}_2$. Доказательство этого факта производится по аналогии с теоремой 4. Кроме того это верно для любого слоя, высекаемого софокусными двуполостными гиперboloидами на этом столе с векторами скорости, у которых λ_3 имеет постоянный знак.

В силу того, что наш слой расслаивается на софокусные двуполостные гиперboloиды, для завершения доказательства осталось разобраться со структурой этих слоёв, соответствующих им. При $t < 0$ эти слои образуют окружность, которая при $t = 0$ рашепляется на две окружности путём перехода через восьмёрку. Таким структура слоёв следующая: слои как точки образуют атом $B^{(2)}$. Таким образом, прообраз точки P есть ни что иное как произведение вида $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times B^{(2)}$. ■

§9 Неправильные особенности

Теперь обсудим неправильные особенности. Эти особенности, вообще говоря, не являются боттовскими. Однако их прообразы довольно легко описываются. Сформулируем без доказательства структуру прообразов неправильных особых точек.

Теорема 6. Пусть P — неправильная особая точка кратности 3, тогда её прообраз гомеоморфен несвязному объединению торов \mathbb{T}^2 .

В случае $k > 0$ есть ровно 3 особые точки кратности 4 (это (c, c, a) , (c, b, b) , (c, c, b)) и одна особая точка кратности 5 (это (c, c, c)).

В случае $k < 0$ есть ровно 8 особых точек кратности 4 (это (c, c, a) , (b, b, a) , (b, a, a) , (c, a, a) , $(0, a, a)$, (c, c, λ_0) , (b, b, λ_0) , (c, b, λ_0)) и одна особая точка кратности 5 (это (b, b, λ_0)).

Прообразы этих особых точек представляют собой одномерные и двумерные комплексы.

§10 Биллиард внутри стола, ограниченного эллипсоидом, двумя стенками однополостного гиперboloида и двумя стенками двуплостного гиперboloида.

Итак, давайте разберёмся, как устроены области возможного движения, бифуркационные диаграммы и прообразы окрестностей особых точек образа отображения момента для биллиардного стола, ограниченного эллипсоидом, двумя участками однополостного гиперboloида и двумя участками двуплостного гиперboloида. Этот стол представлен на рисунке 8.

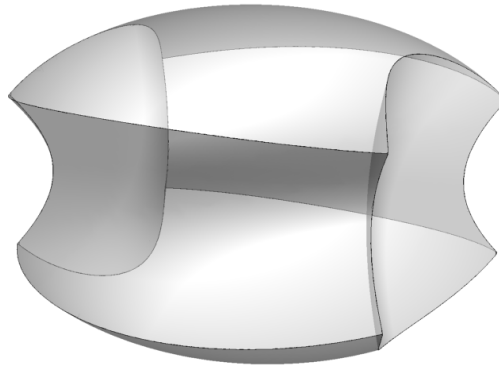


Рис. 8: Биллиардный стол, образованный эллипсоидом, софокусными с ним однополостным и двуплостным гиперboloидами.

Количество типов областей возможного движения не поменяется, и оно будет равно четырём для притягивающего потенциала, восьми — для отталкивающего. Для того чтобы описать эти типы, достаточно пересечь типы столов из классификации для биллиардного стола, изученного выше, с нашим биллиардным столом.

Как будет выглядеть бифуркационные диаграммы для этого биллиарда? Оказывается, что при $k > 0$ бифуркационная диаграмма будет та же. А в бифуркационной диаграмме одно, хотя и несущественное, изменение стенка $\xi_2 = c$ сдвинется и будет задаваться уравнением $\xi_2 = \mu_0$, где μ_0 — параметр однополостного гиперboloида, входящего в состав границы стола. На количестве камер и на устройстве самой бифуркационной диаграммы это никак не отразится.

Теперь обсудим топологию слоения Ливилля этого биллиарда. Как уже отмечалось в параграфе 3, это биллиардный стол в отличие от ранее рассмотренного не содержит в себе точек фокальных кривых. Благодаря этому свойству, описание топологии слоения Лиувилля производится легче. Перечислим, как изменятся формулировки теорем 1–6 для этого биллиарда.

- Теорема 1 остаётся верной.
- Первый пункт теоремы 2 можно уточнить: седловой атом V , фигурирующий в прямом произведении, гомеоморфен либо 3-атому B , либо 3-атому C_2 . Второй пункт теоремы верен для нашего стола.
- Первый пункт теоремы 3 верен, а второй можно уточнить: седловой атом V , фигурирующий в прямом произведении, гомеоморфен либо 3-атому B , либо 3-атому C_2 .

- В первом пункте теоремы 4 прообраз малой окрестности точки P будет гомеоморфен прямому произведению вида $B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1 \times D^1$. Во втором пункте все прямые произведения нужно заменить на одно: $B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1 \times D^1$.
- Первый пункт теоремы 5 остается верным. во втором пункте этой теоремы прямое произведение будет следующим: $B^{(2)} \times B^{(2)} \times B^{(2)}$.
- Теорема 6 остаётся верной.

Доказательство этих изменений происходит с помощью методов, описанных выше.

Хочется отметить, что для этого бильярдного стола представляется возможным описать прообразы малых окрестностей неправильных точек. Эту задачу оставим для будущих исследований.

§11 Классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей бильярдов с потенциалом Гука, ограниченных софокусными квадриками.

Чем больше стенок возникает у бильярдного стола, тем проще получается описать топологию слоения Лиувилля самого бильярда. Однако наличие дополнительных стенок усложняет задачу о нахождении класса гомеоморфности изоэнергетической поверхности. Отметим, что задача о нахождении класса гомеоморфности изоэнергетических поверхностей для небифуркационных значений энергии бильярда с потенциалом Гука внутри эллипса была решена Белозеровым Г. В. Ответ к этой задаче приведён в работе [4].

Теперь постараемся ответить на вопрос о классификации изоэнергетических поверхностей рассматриваемых бильярдных столов. Зафиксируем допустимый уровень энергии h (то есть берём произвольное h , для которого $Q_h^5 \neq \emptyset$).

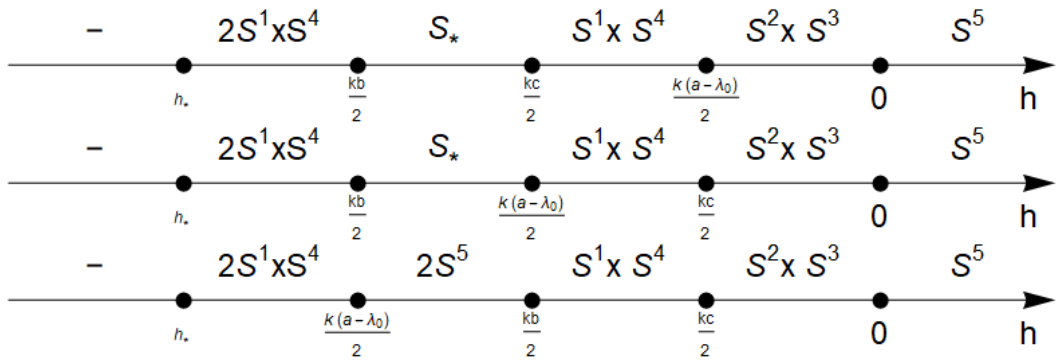
Определение. Пусть $hk \geq 0$, тогда сферу в \mathbb{R}^3 радиуса $\sqrt{\frac{2h}{k}}$ будем называть *граничной*.

Определение. Значение энергии h будем называть *бифуркационным*, если выполнено одно из следующих условий:

- $h = 0$;
- $hk \geq 0$ и *граничная сфера пересекает бильярдный стол лишь в нескольких точках.*

Сначала рассмотрим стол, ограниченный эллипсоидом и двумя “чашечками” двуполостного гиперболоида. Для $k > 0$ бифуркационными значениями энергии будут следующие: $0, \frac{kc}{2}, \frac{kb}{2}, \frac{kb}{2}, \frac{k(a - \lambda_0)}{2}$, λ_0 — параметр двуполостного гиперболоида, входящего в состав границы стола. Однако возникает проблема. Число $\frac{k(a - \lambda_0)}{2}$ может находиться на любом из следующих отрезков: $\left[0; \frac{kc}{2}\right], \left[\frac{kc}{2}; \frac{kb}{2}\right], \left[\frac{kb}{2}; \frac{ka}{2}\right]$. Расположение этой точки зависит не только от значения λ_0 , но и от устройства семейства софокусных квадрик границы стола. Тем не менее ответ будет следующий: любая изоэнергетическая поверхность при небифуркационном значении энергии гомеоморфна сфере S^5 . Доказательство этого факта использует методы описанные в работе [Белозеров]. Отметим сразу, что для другого рассматриваемого нами стола ответ будет таким же при $k > 0$.

Теперь обсудим случай $k < 0$. В зависимости от расположения точки $\frac{k(a - \lambda_0)}{2}$ на оси h ответ будет таким.



Здесь h_* — наименьшее допустимое значение энергии, а S_* — связанная сумма двух сфер, где суммирование идёт не с помощью одного диска, а с помощью четырёх дисков.

Для бильярда внутри стола, ограниченного эллипсоидом и парой гиперboloидов ответ ещё сложнее. Поскольку для него бифуркационным значением энергии будет также являться число $\frac{k(b - \mu_0)}{2}$, где μ_0 — параметр однополостного гиперboloида, входящего в состав границы стола.

Литература

- [1] *В. В. Козлов* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. // Прикладная математика и механика, том 59, 1 1995.
- [2] *В. В. Фокичева*, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами”, Вестник Московского университета. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, 4, 18–27
- [3] *A. T. Fomenko, V. A. Kibkalo*, “Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms”, Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics, Understanding Complex Systems, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer, Cham, 2021, 1–24
- [4] *Г. В. Белозеров*, “Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука”, Вестник Московского университета, принята к печати