

УДК 517.938.5

В. В. Ведюшкина, С. Е. Пустовойтов

Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических бильярдов в магнитном поле

В работе изучена топология слоений Лиувилля интегрируемых магнитных топологических бильярдов – систем движения шара по кусочно-гладким двумерным поверхностям в постоянном магнитном поле. Вычислены инварианты Фоменко-Цишанга лиувиллевой эквивалентности возникающих гамильтоновых систем, а также изучена топология трехмерных инвариантных многообразий – изоинтегральных и изоэнергетических. Также обнаружена лиувиллева эквивалентность таких бильярдов с уже известными гамильтоновыми системами, такими как геодезические потоки на двумерных поверхностях и системы динамики твердого тела. В частности, обнаружены интересные седловые особенности с разным направлением особых окружностей, которые также встречались ранее в механических системах с магнитным полем на поверхностях вращения, гомеоморфных двумерной сфере.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: интегрируемые системы, магнитное поле, топологический бильярд, слоение Лиувилля, инвариант Фоменко-Цишанга

§ 1. Введение

Естественным расширением плоских интегрируемых бильярдов является конструкция топологических бильярдов [1], которая позволяет сохранить интегрируемость системы. Топологический бильярд – это ориентируемое многообразие, полученное изометричной склейкой плоских элементарных бильярдов вдоль общих границ. Материальная точка, попадая на ребро склейки такого бильярда, после отражения продолжает движение по другому листу бильярда. При этом, как правило, предполагается, что проекции каждого из двух склеиваемых листов бильярда на плоскость расположены по одну сторону от проекции их общего сегмента границы – дуги некоторой кривой из софокусного семейства кватрик: эллипса или гиперболы. Основным объектом изучения нашей работы является слоение Лиувилля, т.е. разбиение соответствующего фазового четырехмерного многообразия на совместные поверхности двух независимых интегралов движения – функций, сохраняющихся на траекториях. Напомним, что в случае нерезонансных гладких и вещественно-аналитических интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем почти каждая такая поверхность является замыканием объединения траекторий, которые соответствуют

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-71-00155 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

некоторому уровню интегралов, и при некоторых дополнительных условиях почти все они гомеоморфны двумерным торам.

В своей недавней работе [2] А. Е. Миронов и М. Бялый доказали, что плоский бильярд с магнитным полем интегрируем, если и только если он ограничен концентрическими окружностями за исключением, быть может, конечного числа значений индукции магнитного поля. Поэтому в качестве плоских элементарных бильярдов (“кирпичей”, из которых склеивается стол, являющийся двумерным многообразием) рассматривается бильярд в диске, ограниченном окружностью, и в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями. Путем всевозможных склеек, очевидно, можно получить бильярдный стол-комплекс, гомеоморфный либо диску, либо кольцу (цилиндру), либо сфере, либо тору. Для каждого из таких топологических бильярдов изучается топология возникающего слоения Лиувилля на изоэнергетической поверхности. Напомним, что в качестве энергии в данных системах выступает квадрат радиуса окружности Лармора.

Основным результатом настоящей работы является алгоритм, который вычисляет классифицирующий инвариант Фоменко-Цишанга для любого топологического магнитного бильярда каждого из четырех описанных типов, а также строит их бифуркационную диаграмму. Помимо этого, вычислен топологический тип изоэнергетических многообразий для элементарных магнитных бильярдов, а также обнаружены лиувиллево эквивалентные им системы динамики твердого тела, такие как случай Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского и пр.

Здесь возникают два эффекта. Во-первых, в магнитных топологических бильярдах могут меняться свойства траекторий для выпуклых и невыпуклых дуг склейки. Как известно, в локально-плоских топологических бильярдах без потенциала или магнитного поля наличие невыпуклой склейки (например, склейка двух одинаковых колец по их внутренней окружности) порождает невозможность однозначно определить (по непрерывности) продолжение траектории, каустикой которой является сама окружность склейки. Выпуклая же склейка гарантирует возможность продолжить каждую траекторию. Тем не менее, отметим, оба случая позволяют корректно определить слоение Лиувилля (его двумерный особый слой остается гомеоморфным [3] особому слою невырожденной полулокальной особенности ранга 1, задаваемой 3-атомом Фоменко (см. [4]).

Теперь же, при добавлении магнитного поля, становится возможной обратная ситуация: выпуклые линии склейки перестают порождать однозначное продолжение некоторых траекторий, а в системе с невыпуклой склейкой, наоборот, такое свойство появляется. Это связано с тем, что в магнитном бильярде сегменты траектории — не отрезки, а дуги окружности. Свойство продолжения траектории после касания линии склейки определяется характером касания: внешнего или внутреннего. Топология 3-атомов, возникающих в системе магнитного бильярда, найдена ниже в зависимости от формы стола.

Во-вторых в магнитных топологических бильярдах удалось реализовать интересный класс особенностей. А именно, в некоторых изоэнергетических 3-поверхностях были обнаружены седловые особенности, критические окружности которых ориентированы по-разному движением частицы (т.е. гамильто-

новым потоком энергии системы). В таком случае слоение Лиувилля определено, но не определен инвариант Фоменко-Цишанга. Такой эффект встречается в некоторых известных задачах математической физики. Данная ситуация возникает, если окружность Лармора одновременно касается внешним и внутренним образом двух окружностей – дуг склейки стола-комплекса, одна из которых выпукла, а вторая невыпукла. Любое малое изменение значений интегралов (радиуса окружности центров и радиуса окружности Лармора) разрушает данную особенность.

Отметим, что другой класс интегрируемых гамильтоновых систем с магнитным полем был исследован в работе Е. А. Кудрявцевой и А. А. Ошемкова [5] при рассмотрении геодезического потока на двумерной поверхности вращения в магнитном поле. В этой работе рассмотрены системы на поверхности, гомеоморфной сфере (в нашей работе рассмотрены локально-плоские столы, гомеоморфные тору, сфере, диску или кольцу) с неплоской метрикой. Оказалось, что в том классе систем также встретились невырожденные расщепленные особенности.

§ 2. Необходимые определения

Напомним ряд необходимых определений. Гладкое многообразие M^4 называется *симплектическим*, если на нем задана *симплектическая структура*: невырожденная, замкнутая 2-форма ω . Косым градиентом гладкой функции H назовем векторное поле, задаваемое по формуле $sgrad H = \Omega^{-1}grad H$, где Ω есть матрица формы ω в локальных координатах. Динамическая система $v = sgrad H$ называется гамильтоновой динамической системой с гамильтонианом H . Если у гамильтоновой системы v на M^4 есть две функционально независимые, находящиеся в инволюции функции f_1, f_2 , которые являются первыми интегралами (сохраняются вдоль траекторий системы, что эквивалентно $\{H, f_i\} = 0$) и находятся в инволюции, т. е. $\{f_1, f_2\} = 0$, а их гамильтоновы векторные поля $sgrad f_i$ полны, то говорят, что такая система *вполне интегрируема по Лиувиллю* (см. [4]). *Слоением Лиувилля* называется разбиение многообразия M^4 на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1 и f_2 . Несложно заметить, что каждая такая поверхность инвариантна относительно потока v . Согласно теореме Лиувилля регулярная, компактная, связная компонента поверхности уровня интегралов f_1, f_2 диффеоморфна тору T^2 . Этот тор называется *тором Лиувилля*. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности тора Лиувилля в M^4 диффеоморфно прямому произведению тора на диск D^2 . В дальнейшем будем полагать, что функция f_1 совпадает с H – энергией или гамильтонианом системы. Потребуем также выполнения условия Ботта: критические точки интеграла f_2 на Q^3 должны быть невырождены и образовывать критические подмногообразия. Более того, будем предполагать, что все эти подмногообразия гомеоморфны окружности. Рассмотрим неособое (т.е. $dH \neq 0$) изоэнергетическое многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$. В теории интегрируемых гамильтоновых систем используется несколько отношений эквивалентности между системами, ограниченными на неособый уровень энергии. Одним из важнейших является вопрос об их эквивалентности с точки

зрения послойной гомеоморфности слоений Лиувилля двух систем (отметим, что другие эквивалентности, такие как гомеоморфность Q^3 или траекторная эквивалентность интегрируемых систем, также вызывают большой интерес, см. [4]). Более точно, рассматривается следующее отношение эквивалентности: две системы v_1 и v_2 на Q_1^3 и Q_2^3 соответственно называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм из Q_1^3 на Q_2^3 , сохраняющий ориентацию как самих многообразий, так и ориентацию критических окружностей. Другими словами, так как почти все торы являются нерезонансными (т.е. их траекторная обмотка всюду плотна), то замыкание решения представляет собой тор Лиувилля. Это позволяет говорить, что лиувиллева эквивалентность есть эквивалентность замыканий почти всех решений динамической системы.

Теперь кратко опишем построение классифицирующего инварианта лиувиллевой эквивалентности систем – *инварианта Фоменко-Цишанга* (или *меченой молекулы*). Подробно данный вопрос описан в [4; гл. 4 т. 1]. Расслоим неособое изоэнергетическое многообразие Q^3 поверхностями уровня дополнительного интеграла f_2 . Напомним: согласно теореме Лиувилля, в типичный совместный уровень энергии H и интеграла f_2 будет гомеоморфен тору или несвязному объединению торов (на тех уровнях, где косые градиенты $sgrad H$ и $sgrad f_2$ линейно независимы). Вполне интегрируемая система на компактном Q^3 также обыкновенно имеет конечное число особых слоев. В предположении боттовости интеграла f_2 на Q^3 инвариантные окрестности особых слоев классифицированы А.Т.Фоменко [4; гл. 3, т. 1] с точностью до послойной гомеоморфности. Класс послойной гомеоморфности малых инвариантных окрестностей такого особого слоя называют *3-атомами*. Изоэнергетическому многообразию и слоению Лиувилля на нем можно сопоставить *инвариант Фоменко* (или *грубую молекулу*) – граф Кронрода-Риба, внутренние точки ребер которого соответствуют регулярным слоям многообразия Q^3 (то есть торам Лиувилля), а вершинам сопоставляются атомы, т.е. боттовские перестройки торов Лиувилля. *Инвариантом Фоменко-Цишанга* (или *меченой молекулой*) называется грубая молекула, некоторым подграфам которых сопоставляются числовые метки, описывающие, как именно соотносятся (т.е. каким гомеоморфизмом склеиваются) граничные торы двух атомов, соединенных данным ребром.

ТЕОРЕМА 1. (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [4]) *Системы v_1 и v_2 на Q_1^3 и Q_2^3 лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Более подробно о классификации атомов и интегрируемых гамильтоновых системах см. книгу [4], а также оригинальные работы [6] и [7]. О подробном применении описанной классификационной теории к различным системам математической физики см. [9]-[12].

§ 3. Постановка задачи. Траектории

Рассмотрим бильярд внутри окружности. При попадании материальной точки на границу бильярда, она отражается от нее абсолютно упруго, то есть угол падения равен углу отражения, а модуль скорости точки не меняется.

Пусть также на материальную точку единичной массы и заряда действует постоянное магнитное поле постоянной индукции b , ортогональное к плоскости бильярда. Как известно, в этом случае между ударами от стенки бильярда материальная точка движется по дуге окружности фиксированного радиуса L против часовой стрелки (эта окружность называется окружностью Лармора). Модуль скорости точки остается постоянным и равен bL , а гамильтониан нашей системы – кинетическая энергия – зависит от L квадратичным образом. В дальнейшем при изучении слоения Лиувилля мы будем использовать интеграл L вместо гамильтониана.

Также можно показать, что во время всего движения (как между ударами, так и во время отражения) сохраняется расстояние от центра граничной окружности (центра бильярда) до центра соответствующей окружности Лармора. Обозначим это расстояние буквой R . Аналитическая запись этой функции имеет следующий вид:

$$R = \frac{1}{b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + b^2(x^2 + y^2) - 2b(x\dot{y} - y\dot{x})}. \quad (3.1)$$

Следовательно, траектория движения материальной точки внутри кругового бильярда является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора с равными радиусами L , центры которых равноудалены от центра бильярда на расстояние R (рис. 1, а).

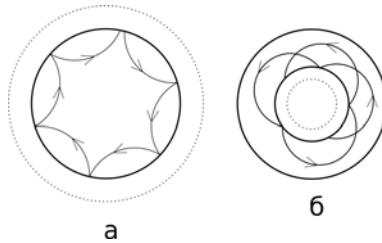


Рис. 1. Примеры траекторий движения для кругового и кольцевого магнитного бильярда

Отметим, что бильярд в области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, допускает те же первые интегралы L и R , и траектория движения также будет состоять из дуг окружностей равного радиуса, центры которых равноудалены от центра граничных окружностей (рис. 1, б).

ЛЕММА 3.1. *Функции L и R являются первыми интегралами магнитного бильярда в круговой (кольцевой) области. Эти функции функционально независимы почти всюду и находятся в инволюции относительно стандартной симплектической структуры на M^4 . Кроме того, интеграл R является функцией Ботта (то есть критические подмногообразия функции R являются невырожденными). Таким образом, магнитный бильярд в круговой (кольцевой) области является вполне интегрируемым по Лиувиллю.*

§ 4. Области возможного движения. Бифуркационные диаграммы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Областью возможного (допустимого) движения уровня интегралов L и R называется образ соответствующего слоя слоения Лиувилля при проекции $p : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ на бильярдный стол. Иными словами, это замкнутая область на бильярде, в которой материальная точка может находиться при фиксированных значениях интегралов L и R .

Найдем всевозможные области возможного движения при любых значениях интегралов L и R для кругового и кольцевого бильярдных столов.

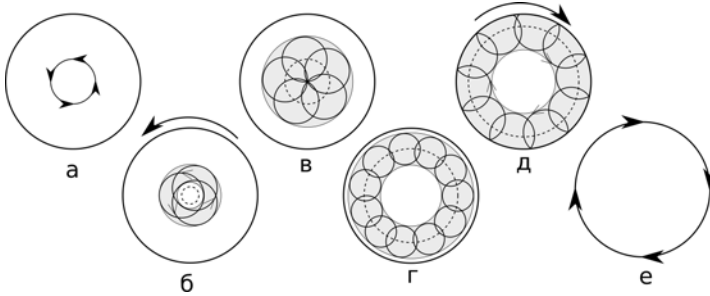


Рис. 2. Области возможного движения при $0 < L < \frac{1}{2}R_0$

Начнем с кругового бильярда. Обозначим радиус граничной окружности за R_0 . Зафиксируем значение $0 < L < \frac{1}{2}R_0$. При $R = 0$ область возможного движения является одномерной и состоит из окружности Лармора радиуса L (рис. 2, а).

При $0 < R < L$ траекториями движения являются замкнутые окружности Лармора, которые целиком лежат внутри бильярдной области и обходят центр бильярда. Следовательно, областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $L + R$, при этом движение точки в этой области происходит против часовой стрелки (рис. 2, б).

При $L = R$ траекториями также являются окружности Лармора, которые однако проходят через центр бильярда. Областью возможного движения является круговая область, ограниченная окружностью радиуса $L + R$ (рис. 2, в).

При $L < R \leq R_0 - L$ траекториями также являются окружности Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и $R + L$ (рис. 2, г). Отметим, что вплоть до значения $R = R_0 - L$ все траектории были замкнутыми (в определениях выше это означает что все торы являются резонансными).

При $R_0 - L < R < L + R_0$ траектория становится кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 2, д).

При $R = L + R_0$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и затем при $R > L + R_0$ окружности Лармора на пересекаются

с билиардной областью, а область возможного движения является пустым множеством (рис. 2, е).

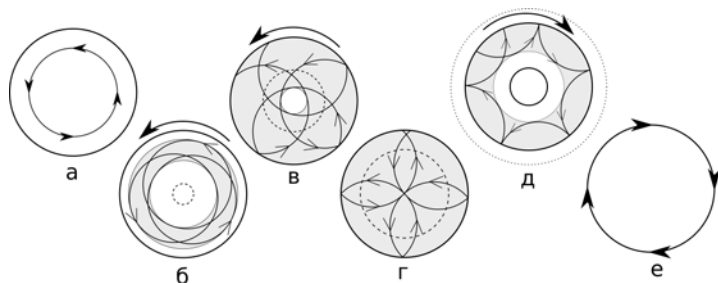


Рис. 3. Области возможного движения при $\frac{1}{2}R_0 \leq A < R_0$

Зафиксируем теперь $\frac{1}{2}R_0 \leq L < R_0$. При $0 < R \leq R_0 - L$ траекториями движения являются замкнутые окружности Лармора, целиком лежащие внутри билиардной области. Следовательно, областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 3, б).

При $R_0 - L < R < L$ траектория становится кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и R_0 , при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 3, в).

При $L = R$ каждая дуга окружностей Лармора проходит через центр билиарда. Областью возможного движения является вся билиардная область (рис. 3, г).

При $L < R < L + R_0$ областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 3, г).

При $R = L + R_0$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и затем при $R > L + R_0$ окружности Лармора на пересекаются с билиардной областью, а область возможного движения является пустым множеством (рис. 3, е).

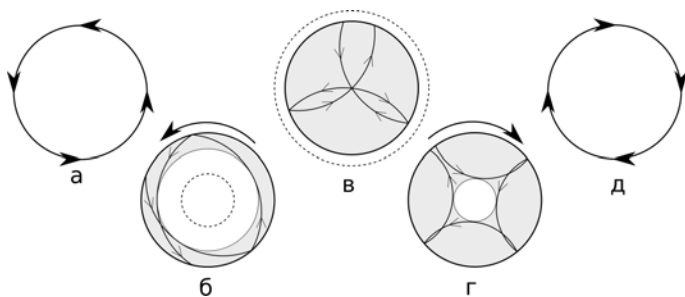


Рис. 4. Области возможного движения при $L \geq R_0$

Наконец, зафиксируем значение $L \geq R_0$. При $R < L - R_0$ окружности Лармора не пересекают бильiardную область, и область возможного движения пуста.

При $R = L - R_0$ область возможного движения одномерна и является граничной окружностью бильiardа (рис. 4, а).

При $L - R_0 < R < L$ траектория является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и R_0 , при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 4, б).

Далее при дальнейшем росте значения интеграла R траектории и области возможного движения повторяют случай $\frac{1}{2}R_0 \leq L < R_0$.

ЛЕММА 4.1. *Прообраз любой двумерной области возможного движения кругового магнитного бильiardа при проекции p (т.е. соответствующий слой слоения Лиувилля) гомеоморфен двумерному тору в M^4 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим область возможного движения, не содержащую центр бильiardа, и граница которой не содержит границы бильiardа (рис. 5, а). Каждая точка во внутренности области возможного движения принадлежит двум окружностям Лармора. Следовательно, каждой точке соответствуют два вектора скорости. Аналогично, каждой граничной точке соответствует один вектор скорости. Разобьем область возможного движения радиальными отрезками, каждой точке которых сопоставлены соответствующие вектора скорости. Прообраз каждого такого отрезка в M^4 , очевидно, гомеоморфен окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен двумерному тору.

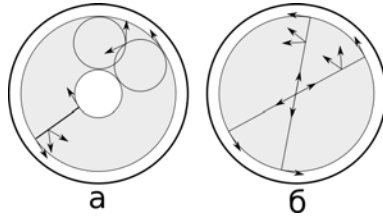


Рис. 5

Теперь рассмотрим область возможного движения, внутренность которой содержит центр бильiardа, но граница которой также не содержит границы бильiardа (рис. 5, б). Как и в прошлом случае, граничным точкам соответствует один вектор скорости, а каждой точке внутренности соответствует два вектора скорости, кроме центра бильiardа, которому соответствует целая окружность векторов. Разобьем область возможного движения на диаметры, каждой точке которых сопоставлены соответствующие вектора скорости, при этом центру каждого диаметра сопоставлены два вектора, параллельные этому диаметру. Несложно заметить, что прообраз каждого такого диаметра в M^4 гомеоморфен окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен цилиндру, граничные окружности которого должны

быть склеены определенным образом, причем их ориентации при склейке совпадают. Таким образом, вновь получили двумерный тор.

Оставшиеся случаи областей возможного движения, границы которых содержат границу бильярда, разбираются аналогично. Единственное отличие заключается в том, что точкам, лежащим на границе бильярда, соответствуют не один, а два вектора скорости, которые, однако, отождествляются согласно закону отражения.

Лемма доказана.

Таким образом, при $0 < L < R_0$ и $0 < R < L + R_0$ и при $L \geq R_0$ и $L - R_0 < R < L + R_0$ прообраз соответствующей области возможного движения гомеоморфен двумерному тору.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображением момента интегрируемой системы называется отображение $F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $F(x) = (L(x), R(x))$. Бифуркационной диаграммой $\Sigma(F)$ называется образ критических точек отображения момента на \mathbb{R}^2 . При этом точка в M^4 называется критической, если в ней падает ранг дифференциала отображения момента. Иначе точка называется регулярной.

В нашем случае образ отображения момента имеет вид, изображенный на рис. 6. Бифуркационной диаграммой является граница изображенной области.

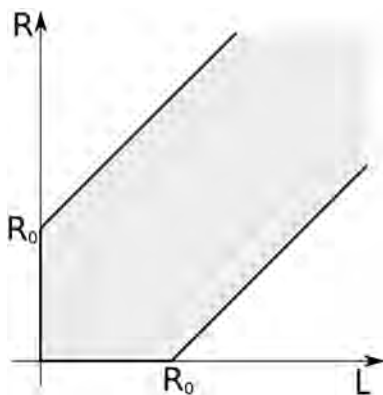
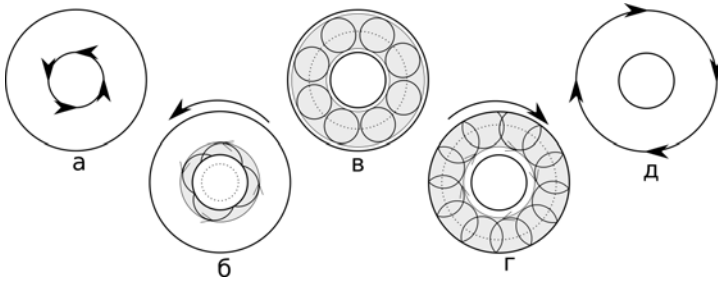


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма кругового магнитного бильярда.

Рассмотрим теперь бильярд в кольцевой области. Пусть радиус внешней окружности равен R_0 , а радиус внутренней — r_0 . Проведем аналогичные рассуждения. Зафиксируем $L < r_0$. При $R < r_0 - L$ окружности Лармора на пересекаются с бильярдной областью, а область возможного движения является пустым множеством. При $R = r_0 - L$ область возможного движения одномерна и является окружностью радиуса r_0 (рис. 7, а).

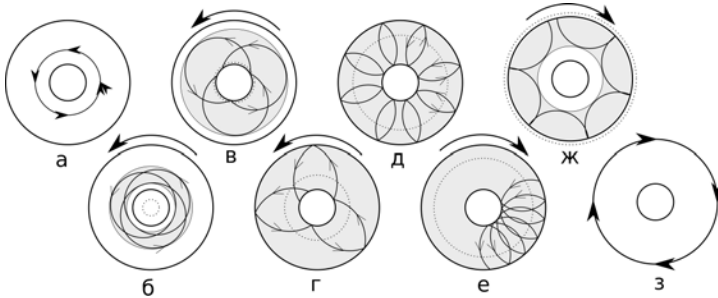
При $r_0 - L < R < L + r_0$ траектория является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов r_0 и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 7, б).

При $L + r_0 < R < R_0 - L$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в бильярдной области. Областью возможного движения

Рис. 7. Области возможного движения при $L < r_0$

является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и $R + L$ (рис. 7, в).

При $R_0 - L < R < L + R_0$ траектории опять становятся кусочно гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 7, г). При $R = L + R_0$ область возможного движения вырождается в одномерную окружность, а при дальнейшем росте R она становится пустым множеством.

Рис. 8. Области возможного движения при $r_0 < L < \frac{1}{2}(r_0 + R_0)$

Теперь рассмотрим случай $r_0 < L < \frac{1}{2}(r_0 + R_0)$. При $R = 0$ область возможного движения является окружность Лармора радиуса L (рис. 8, а).

При $0 < R \leq L - r_0$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в билиардной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $L + R$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 8, б).

При $L - r_0 < R \leq R_0 - L$ траектории становятся кусочно-гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов r_0 и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 8, в).

При $R_0 - L < R < L + r_0$ материальная точка соударяется как с внутренней стенкой билиарда, так и с внешней. Областью возможного движения становится вся билиардная область, при этом характер движения в ней меняется

из движения против часовой стрелки в движение по часовой стрелке (рис. 8, г, д, е).

При $L + r_0 \leq R < L + R_0$ материальная точка соударяется только с внешней стенкой. Область возможного движения ограничена окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 8, ж).

При $R = L_0 + R$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и с дальнейшим ростом значения R становится пустым множеством (рис. 8, з).

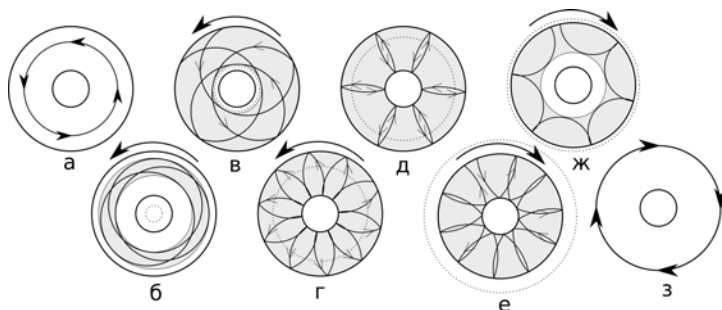


Рис. 9. Области возможного движения при $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < L < R_0$

Рассмотрим теперь случай $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < L < R_0$. При $0 < R \leq R_0 - L$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в бильярдной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 9, б).

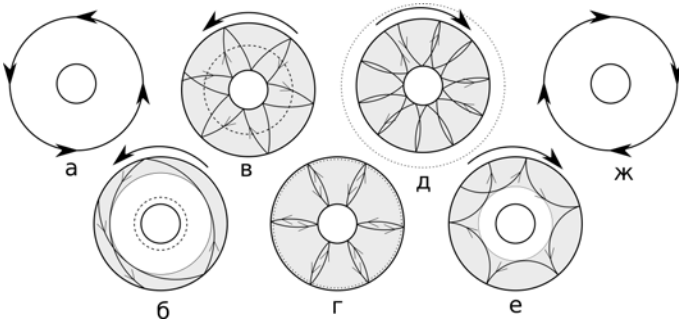
При $R_0 - L < R \leq L - r_0$ траектории становятся кусочно-гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R_0 и $L - R$, при этом точка движется в этой области также против часовой стрелки (рис. 9, в).

При $L - r_0 < R < L + r_0$ материальная точка соударяется как с внутренней стенкой бильярда, так и с внешней. Областью возможного движения становится вся бильярдная область, при этом характер движения в ней меняется из движения против часовой стрелки в движение по стрелке (рис. 9, г, д, е).

При $L + r_0 \leq R < L + R_0$ материальная точка соударяется только с внешней стенкой. Область возможного движения ограничена окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 9, ж).

Наконец, зафиксируем значение $L > R_0$. При $R < L - R_0$ окружности Лармора не пересекают бильярдную область, и область возможного движения пуста. При $R = L - R_0$ областью возможного движения является окружность радиуса R_0 .

При $L - R_0 < R < L - r_0$ траектории кусочно-гладкие, состоящие из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R_0 и $L - R$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 10, б). При дальнейшем

Рис. 10. Области возможного движения при $L > R_0$

росте значения R поведение траекторий и областей возможного движения не отличается от предыдущего случая $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < L < R_0$.

Для кольцевого билиярда верна лемма, аналогичная лемме 4.1.

ЛЕММА 4.2. *Прообраз любой двумерной области возможного движения кольцевого магнитного билиярда при проекции p (т.е. соответствующий слой слоения Лиувилля) гомеоморфен двумерному тору в M^4 .*

Аналогично круговому билиярду, построим образ отображения момента и бифуркационную диаграмму кольцевого билиярда (рис. 11).

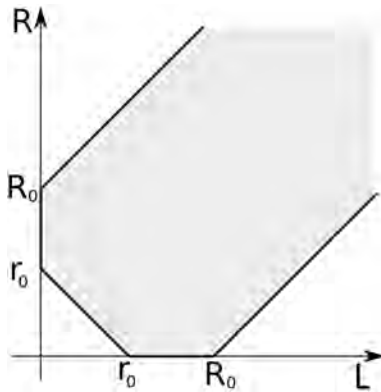


Рис. 11. Бифуркационная диаграмма кольцевого магнитного билиярда.

§ 5. Инварианты Фоменко-Цишанга. Изоэнергетические многообразия

Изучим теперь топологию слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия $Q^3 = \{x \in M^4 : L(x) = const\}$. Согласно леммам 4.1 и 4.2, регулярные слои слоения Лиувилля гомеоморфны двумерным торам. Также заметим, что как для кругового билиярда, так и для кольцевого билиярда, любому регулярному значению интеграла L соответствуют лишь два критических слоя,

гомеоморфных окружности, при этом их окрестность гомеоморфна 3-атому A . Следовательно, грубая молекула, соответствующая любому регулярному значению интеграла L , имеет вид $A - A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для кругового магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерной сфере S^3 при любом значении интеграла L . Соответствующий инвариант Фоменко-Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = 0$ и $\varepsilon = 1$.

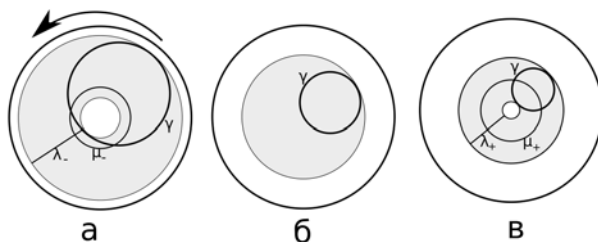


Рис. 12. Базисные циклы вблизи слоя $L = R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $0 < R < \frac{1}{2}R_0$. Разобьем Q^3 на два полнотория, соответствующие $0 < R < L$ и $L < R < L + R_0$. Эти полнотория склеиваются на граничном слое $L = R$. На рис. 12 изображена проекция этого граничного слоя на бильярд, а также проекции регулярных слоев в окрестностях атомов A с их допустимыми базисными циклами λ и μ . Заметим, что циклы γ , изображенные на рис. а и в, склеиваются с циклом γ на граничном слое (рис. б). При этом цикл γ на слое “а” гомологичен циклу $\pm\lambda_- + \mu_-$, а на слое “в” он гомологичен циклу λ_+ . Кроме того, цикл μ_+ склеивается с циклом $-\mu_-$ вследствие их противоположной ориентации (рис. 2). Следовательно, матрица склейки базисных циклов имеет следующий вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Такой матрице склейки соответствует метка $r = 0$ и метка $\varepsilon = 1$, а многообразие Q^3 гомеоморфно сфере S^3 .

Аналогичные рассуждения можно провести для случаев $\frac{1}{2}R_0 < A < R_0$ и $L > R_0$ с правильным выбором цикла γ .

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для кольцевого магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно произведению $S^1 \times S^2$ при любом значении интеграла L . Соответствующий инвариант Фоменко-Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рис. 7, 8, 9 и 10 несложно заметить, что для всевозможных значений интеграла L базисные циклы λ и μ , соответствующие окрестностям двух атомов A , склеиваются согласно правилу $\lambda_+ = \pm\lambda_-$ и $\mu_+ = -\mu_-$ (это связано с тем, что в отличие от кругового бильярда, бильярд в кольце

не обладает перестройкой областей возможного движения через центр бильярда). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = 1$, а изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно $S^1 \times S^2$.

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, мы полностью завершили топологический анализ интегрируемых магнитных бильярдных систем на плоских (элементарных) столах. Были вычислены их меченые молекулы для каждого значения энергии и определены классы гомеоморфности соответствующих изоэнергетических многообразий Q^3 .

§ 6. Лиувиллево эквивалентные системы

Покажем теперь, какие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы лиувиллево эквивалентны плоским интегрируемым магнитным бильярдам. Для этого воспользуемся приведенной ранее теоремой Фоменко-Цишанга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В следующей таблице перечислены обнаруженные нами лиувиллевы эквивалентности между магнитными плоскими бильярдами и некоторыми известными случаями интегрируемости в динамике твердого тела. Условными обозначениями в скобках указаны те уровни энергии, для которых доказана лиувиллева эквивалентность с бильярдами.

Случай магнитного бильярда	Молекула	Случаи динамики твердого тела
Круговой бильярд	$A \frac{r=0}{\varepsilon=1} A$	Лагранж (1), Ковалевская (1), Жуковский (7), Эйлер (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1)
Кольцевой бильярд	$A \frac{r=\infty}{\varepsilon=1} A$	Лагранж (2), Жуковский (1)

Таблица 1. Системы динамики твердого тела, эквивалентные плоским круговым магнитным бильярдам. Числами в скобках условно обозначены соответствующие зоны энергии.

Напомним, что список вычисленных меченых молекул для многих интегрируемых систем механики и математической физики приведен в [4; т. 2].

§ 7. Изоинтегральное многообразие Q_R^3

Рассмотрим теперь изоинтегральное многообразие $Q_R^3 = \{x \in M^4 : R(x) = \text{const}\}$ и проведем для него аналогичный анализ. Начнем с кругового бильярда. На рис. 13, 14 и 15 изображены перестройки областей возможного движения при фиксированном значении интеграла R и возрастающем значении интеграла L . Заметим, что как и в случае изоэнергетического многообразия

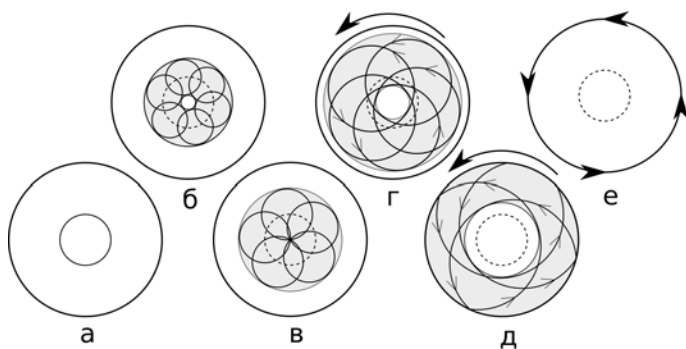


Рис. 13. Перестройка областей возможного движения при $0 < R < \frac{1}{2}R_0$

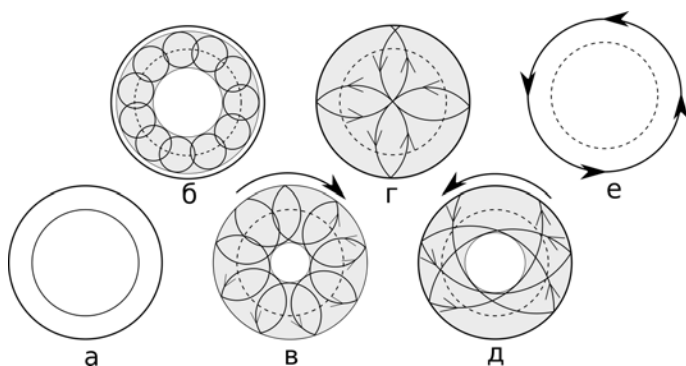


Рис. 14. Перестройка областей возможного движения при $\frac{1}{2}R_0 < R < R_0$

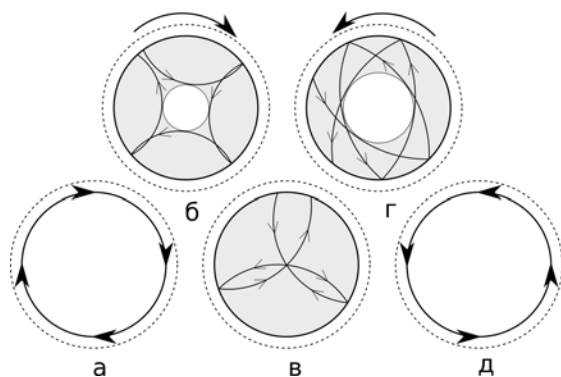


Рис. 15. Перестройка областей возможного движения при $R_0 < R$

Q^3 , соответствующая грубая молекула имеет тот же вид $A-A$. Как и раньше, метка $r = 0$, однако при $0 < R < R_0$ ориентация цикла μ_- вблизи минимального атома A не определена. Следовательно, метка ε не определена. Тем не менее, многообразие Q_R^3 также гомеоморфно трехмерной сфере S^3 .

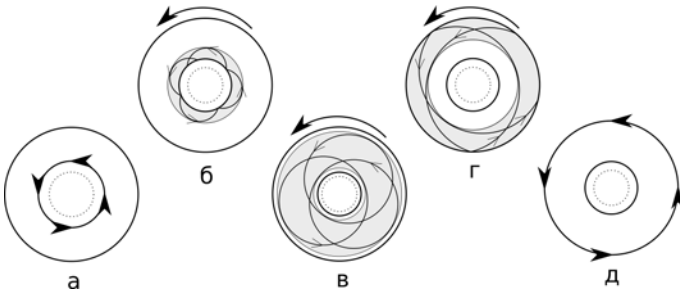


Рис. 16. Перестройка областей возможного движения при $0 < R < r_0$

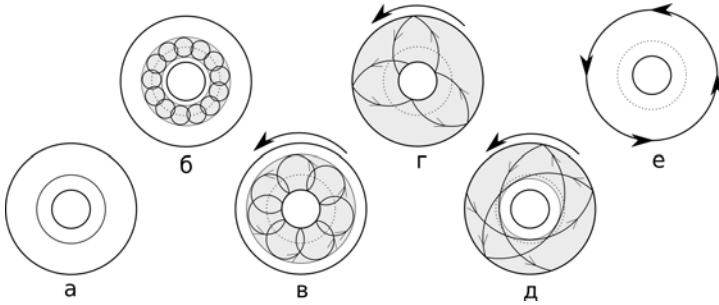


Рис. 17. Перестройка областей возможного движения при $r_0 < R < \frac{1}{2}(R_0 + r_0)$

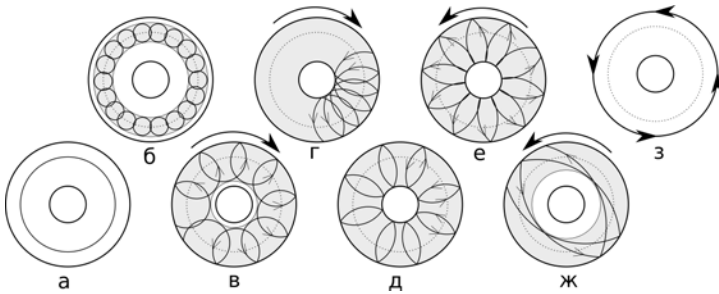


Рис. 18. Перестройка областей возможного движения при $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < R < R_0$

Рассмотрим теперь кольцевой бильярд. Перестройки областей возможного движения при всевозможных фиксированных значениях интеграла R приведены на рис. 16, 17, 18 и 19. Как и в предыдущих случаях, грубая молекула имеет вид $A-A$. В случае $r_0 < R < R_0$ матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$, при этом знак невозможно определить в силу неопределенности ориентации цикла μ_- . Следовательно, метка $r = \infty$, а метка ε не определена. Изоинтегральное многообразие гомеоморфно произведению $S^1 \times S^2$.

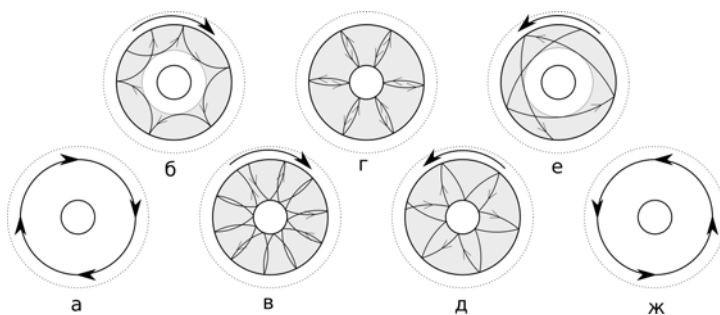


Рис. 19. Перестройка областей возможного движения при $R_0 < R$

В случае $R > R_0$ циклы μ имеют противоположную ориентацию. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = 1$.

При $R < r_0$ циклы μ имеют одинаковую ориентацию. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = -1$.

§ 8. Топологические бильярды

В предыдущих разделах мы увидели, что класс интегрируемых плоских магнитных бильярдов достаточно мал (он состоит только из кругового и кольцевого бильярда). Следовательно, количество типов слоения Лиувилля изоэнергетических многообразий таких бильярдов также невелик. Это означает, что такие “простые” бильярды реализуют лишь немногие известные динамические системы с точки зрения лиувиллевой эквивалентности (см. таблицу 1). Для того, чтобы класс магнитных бильярдов стал богаче (иными словами, чтобы было реализовано значительно больше интегрируемых систем, описанных, например, в [9]-[12]), необходимо обобщить понятие магнитного бильярда. Одним из таких обобщений плоских интегрируемых бильярдов является понятие интегрируемых топологических бильярдов, введенное В. В. Ведюшкиной в статье [1]. Первоначально оно было введено для классических бильярдов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Если рассмотреть два таких бильярда, границы которых содержат некоторый сегмент, лежащий на одной и той же гиперболе или на одном и том же эллипсе, то области этих двух бильярдов можно склеить по этому граничному сегменту. Более того, для упрощения всегда можно полагать, что склеиваемые бильярды расположены по одну сторону от этого сегмента. Материальная точка, двигаясь по одному бильярдному столу, после отражения от сегмента склейки продолжит движение по другому столу. В результате, топологический бильярд определяется как ориентируемое многообразие, склеенное в вышеописанном смысле из плоских интегрируемых бильярдов, принадлежащих к одному и тому же классу интегрируемости. Подробно о склейках и ограничениях на них см. работу В.В.Ведюшкиной [8].

Такая конструкция, во-первых, сохраняет интегрируемость, а с другой стороны, существенно расширяет класс интегрируемых плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик (напомним, что имеется лишь конечное число неэквивалентных плоских бильярдов, см. [1]).

В нашем случае также можно воспользоваться данной конструкцией. В качестве интегрируемых элементарных бильярдных листов, из которых будет склеен топологический бильярд, выступают бильярды всего двух типов, рассмотренных ранее: бильярд, ограниченный одной окружностью и бильярд, ограниченный двумя окружностями. Очевидно, что полученный в результате таких склеек кусочно-плоский ориентируемый стол-комплекс будет гомеоморфен одному из следующих двумерных многообразий: диску, цилиндру, сфере или тору. Более того, во всех таких бильярдах можно выделить цилиндр, склеенный из колец, границы которого либо остаются ни с чем не склеенными, либо склеиваются между собой (получается тор), либо заклеиваются дисками – одним или двумя. Нам в дальнейшем будет удобно изначально работать с этим цилиндром.

Более подробно, рассмотрим несколько кольцевых бильярдных столов, пронумерованных натуральными числами от 1 до n . Положим также, что любые два соседних стола имеют внешние или внутренние границы равного радиуса, и границы этой пары отождествлены друг с другом. Иными словами, склеим имеющиеся бильярдные столы по общим границам, при этом потребуем, чтобы никакие три стола не были склеены по одной границе. Полученный комплекс гомеоморфен цилиндру $[0, 1] \times S^1$, а бильярдное движение на каждом столе зададим как и ранее с той лишь разницей, что при попадании материальной точки на границу одного стола, она переходит на соседний стол с той же границей и продолжает движение в нем. Построенный таким образом бильярд bC является топологическим бильярдом. Пример такого топологического бильярда приведен на рис. 20.

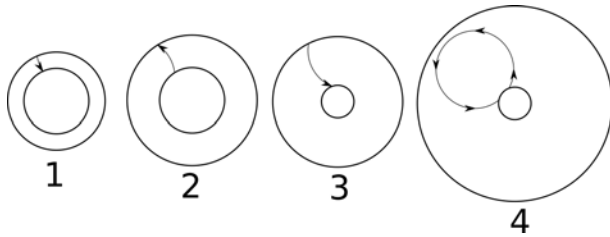


Рис. 20. Топологический бильярд bC на столе, гомеоморфном цилиндру. Изображена траектория, которая начинается на первом кольце и после ряда отражений переходит на кольцо с номером 4.

Бильярд bC допускает те же первые интегралы L и R , то есть является интегрируемым по Лиувиллю. Заметим, что область возможного движения при фиксированных значениях этих интегралов также является пересечением бильярдной области и области W , ограниченной окружностями радиусов $R + L$ и $|R - L|$ на каждом элементарном “листе” (назовем ее исходной областью возможного движения). Заметим, что область возможного движения состоит из

нескольких связных частей, гомеоморфных цилиндрам. При этом прообраз каждой такой компоненты связности регулярной области возможного движения также гомеоморфен двумерному тору Лиувилля в фазовом пространстве M^4 . Доказательство этого факта может быть получено следующим образом. Необходимо разрезать торы Лиувилля, соответствующего каждому кольцу по точкам, лежащим на ребрах склейки. Эти разрезы превращают каждый тор в кольцо. Склейка колец в цилиндр объединяет эти “кольца Лиувилля” обратно в единый тор. Однако бифуркации этих торов и описывающие их 3-атомы имеют более сложный вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть τ – конечная последовательность натуральных чисел. Символом $n = \sum \tau_i$ обозначим седловой 3-атом B_τ типа прямого произведения окружности на базу (2-атом) следующего вида: разрежем 2-атом B_n трансверсально на $|\tau|$ связных частей таким образом, чтобы в каждой i -ой части находилось ровно τ_i критических точек, склеим обратно эти части по местам разрезов с перекруткой (рис. 21), и на основе полученного 2-атома прямым произведением на окружность получим 3-атом. Такой 3-атом перестраивает $k = \sum_{2|i} \tau_i + 1$ торов Лиувилля в $l = \sum_{2\bar{i}} \tau_i + 1$ торов Лиувилля.



Рис. 21. 2-Атом B_τ для $\tau = (2, 2, 1, 1)$

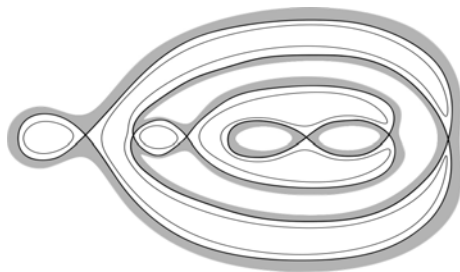


Рис. 22. Вложение 2-атома B_τ в плоскость.

Заметим, что 2-атом B_τ при любом τ является плоским (один из вариантов вложения в плоскость изображен на рис. 22), а также имеет вид, изображенный на рис. 23, г. Также отметим, что класс 3-атомов B_τ в точности совпадает с классом атомов $V_n^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ (т.н. атомы с плюсами и минусами), возникающими в работе [5] при описании потоков на поверхностях вращения в магнитном поле. Наше переобозначение обусловлено тем, что атом $V_n^{0,0, \dots, 0}$ совпадает с атомом B_n , а также тем, что в дальнейшем нам будет удобнее работать именно с последовательностью τ .

Опишем теперь алгоритм, как по заданному топологическому бильярду вида bC построить грубую молекулу, соответствующую некоторому уровню интеграла L .

Шаг 1. Занумеруем границы склейки бильярда в соответствии с их принадлежностью элементарным столам-листам, то есть границы одного листа должны быть занумерованы последовательными натуральными числами.

Шаг 2. Построим на плоскости $(0xy)$ следующую ломаную (ломаная K_0 на рис. 23, а): последовательно соединим точки с координатами (i, R_i) , где R_i –

радиус i -ой границы. Затем отразим полученный график симметрично оси Ox (ломаная M на рис. 23, а). Иными словами, вместе ломаные K_0 и M образуют профиль бильярда (сечение плоскостью, содержащей ось симметрии нашего топологического бильярда). Наконец, отразим относительно прямой $y = L$ ту часть ломаной K_0 , которая расположена выше этой прямой (ломаная K на рис. 23, а).

Шаг 3. Разобьем область между двумя ломаными K и M на горизонтальные отрезки и стянем каждый из них в точку. В полученном графе припишем свободным вершинам индекс A . Заметим, что остальным вершинам полученного графа соответствуют несколько локальных минимумов ломаной K и несколько локальных максимумов ломаной M , лежащих на соответствующем горизонтальном отрезке. Пусть последовательность таких экстремумов слева направо задается последовательностью τ (τ_1 подряд идущих минимумов, затем τ_2 подряд идущих максимумов и т.д.). Пример такой последовательности для $\tau = (2, 2, 1, 1)$ изображен на рис. 23, в. Припишем такой вершине графа индекс B_τ .

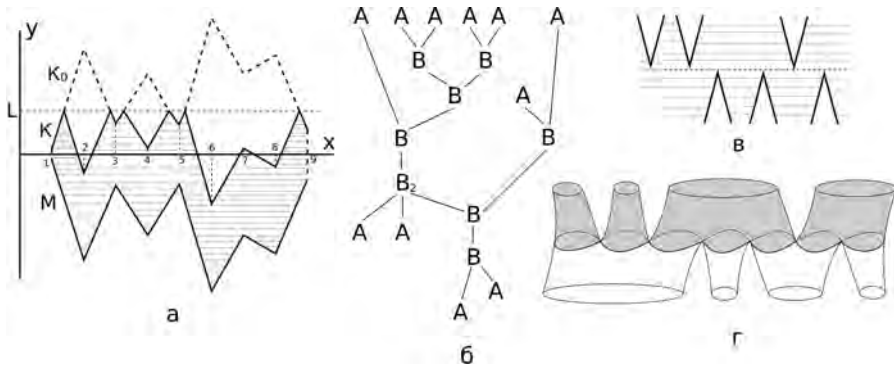


Рис. 23. Построение грубой молекулы

ЛЕММА 8.1. *Построенный выше граф с индексированными вершинами (рис. 23, б) является грубой молекулой топологического бильярда BC для зафиксированного уровня энергии L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что экстремумы ломаной K принадлежат к одному из четырех типов. Первый тип – это максимумы, лежащие на прямой $y = L$. Движение на соответствующем уровне интеграла $R = 0$ – это критические движения по окружностям Лармора, лежащим на разных столах-листах. При локальном увеличении значения интеграла эти окружности как области возможного движения расширяются в кольца (см. рис. 24, а). Следовательно, каждой такой точке соответствует атом A . Также к этому типу можно приписать максимумы ломаной K , которые изначально в ломаной K_0 лежали ниже прямой $y = L$. Они соответствуют выпуклым склейкам бильярдных столов вдоль окружностей, радиус которых меньше окружности Лармора. Следовательно, движение в окрестности этих склеек возможно с момента касания

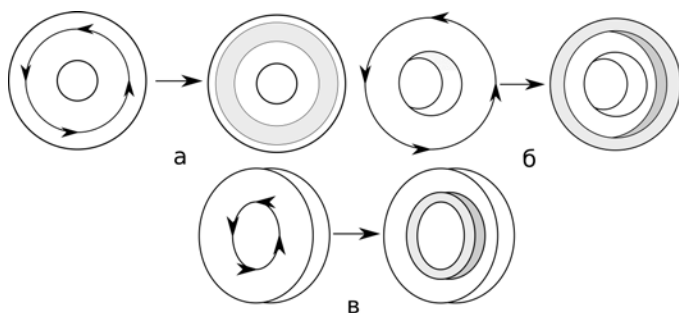


Рис. 24. Перестройки областей возможного движения. На рис. б локально изображены два бильярдных стола, склеенных по выпуклой (внешней) границе. На рис. в изображена склейка двух столов по невыпуклой (внутренней) границе.

внутренней окружности радиуса $|L - R|$ области W (исходной области возможного движения) и окружности, соответствующей данной склейке. Дальнейшее увеличение приводит к движению сразу по двум склеенным столам-листам (см. рис. 24, б).

Второй тип — это точки максимума ломаной K , которые на ломаной K_0 были локальными минимумами. Несложно заметить, что они соответствуют невыпуклым склейкам вдоль окружностей, радиусы которых больше значения L . Следовательно, до тех пор, пока интеграл R не примет такое значение, что внешняя граница области W радиуса $R + L$ достигнет этой окружности склейки, движения в окрестности этой склейки нет. В момент достижения возникает одна критическая окружность, которая впоследствии разрастается до области возможного движения, лежащей на двух бильярдных столах. В молекуле это также будет соответствовать атому A (см. рис. 24, в).

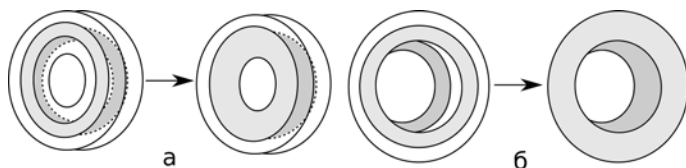


Рис. 25. Перестройки областей возможного движения. На рис. а локально изображены два бильярдных стола, склеенных по невыпуклой (внутренней) границе. На рис. б изображена склейка двух столов по выпуклой (внешней) границе.

Третий тип критических точек графика ломаной K — это точки минимума, которые изначально лежали на ломаной K_0 под прямой $y = L$. Они соответствуют невыпуклым склейкам бильярдных столов, причем радиус окружности склейки этих колец меньше радиуса ларморовских окружностей. При увеличении значения R прохождение прямой $y = L - R$ через эту точку соот-

ветствует слиянию двух колец в области возможного движения, находящихся на соседних листах, вдоль общей невыпуклой окружности (см. рис. 25, а).

Четвертый тип критических точек графика K – это минимумы, полученные отражением максимумов ломаной K_0 . Этим максимумам соответствуют выпуклые склейки листов друг с другом. В момент, когда область W своей внешней окружностью совпадет с окружностью этой выпуклой склейки, произойдет бифуркация – слияние областей возможного движения. Она соответствует прохождению прямой $y = R + L$ через точку описываемого типа (см. рис. 25, б).

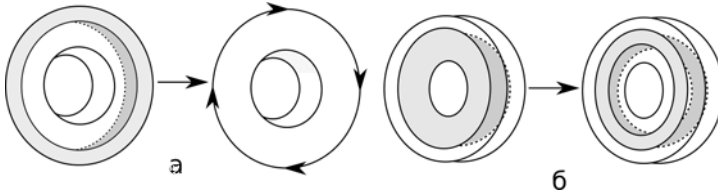


Рис. 26. Перестройки областей возможного движения. На рис. а локально изображены два бильярдных стола, склеенных по невыпуклой (внутренней) границе. На рис. б изображена склейка двух столов по выпуклой (внешней) границе.

Экстремумы графика M также делятся на два типа – минимумы и максимумы. Минимумам соответствуют выпуклые склейки бильярдных столов. При достижении соответствующего значения R внутренняя граница области W выходит на границу склейки. При дальнейшем увеличении значения R область W не пересекается с соответствующими бильярдными столами, а следовательно, движения нет. Таким образом, мы получили атом A (см. рис. 26, а).

Максимумам графика M соответствуют невыпуклые склейки бильярдных столов. Внутренняя граница области W достигает эту границу склейки, а область возможного движения рвется по окружности склейки (см. рис. 26, б).

Мы показали, как изменяется область возможного движения вблизи образов критических циклов по-отдельности. Для вычисления 3-атомов необходимо рассмотреть такие изменения в совокупности. Как уже было показано, свободным вершинам в полученном графе соответствуют атомы A . В оставшихся случаях существуют две возможности: на соответствующем уровне $y = const$ лежат k экстремумов третьего типа и l экстремумов четвертого типа ломаной K (возможен при $R < L$); или же на уровне $y = const$ лежат k экстремумов четвертого типа ломаной K и l максимумов ломаной M (возможен при $R > L$). Заметим, что в обоих этих случаях критический слой искомого седлового атома гомеоморфен критическому слою атома B_{k+l} . Действительно, разобьем соответствующую область возможного движения на радиальные отрезки. Каждой точке таких отрезков соответствуют два вектора скорости (см. лемму 4.2), кроме двух точек – границ области возможного движения, и $k+l$ точек, соответствующих критическим окружностям. В первом случае, оба вида бифуркаций, как было показано выше, являются слиянием областей возможного

движения. Следовательно, в изоэнергетическом многообразии Q^3 это соответствует 3-атому B_{k+l} . Во втором случае, k критических окружностей соответствуют склейке областей возможного движения и l критических окружностей – их разрыву. С учетом взаимного расположения этих склеек и разрывов на критическом слое, несложно убедиться, что в изоэнергетическом многообразии Q^3 такая перестройка соответствует 3-атому B_7 (наглядно это видно на рис. 23 в, г).

Таким образом, лемма доказана.

Теперь к одной или двум свободным границам топологического бильярда bC приклеим бильярдный стол, ограниченной окружностью подходящего радиуса. Конфигурационное пространство такого бильярда гомеоморфно двумерному диску D^2 (бильярд bD) или двумерной сфере S^2 (бильярд bS) соответственно. Заметим, что алгоритм вычисления грубых молекул ничем не отличается от рассмотренного случая. Действительно, единственное отличие бильярдов bD и bS от бильярда bC заключается в появлении областей возможного движения, содержащих один или два центра дисковых бильярдных столов (т.е. гомеоморфных D^2 или S^2 соответственно). Как было доказано ранее, прообразы таких областей возможного движения также гомеоморфны двумерным торам. Следовательно, уровень $y = 0$ на графике 23 не является критическим сам по себе, и следовательно грубая молекула 23, б останется прежней.

Из алгоритма построения грубой молекулы сразу вытекает тип ее строения. А именно, верно следующее следствие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Верны следующие утверждения.*

1. *Инвариант Фоменко бильярдов bC , bD и bS является деревом.*
2. *При достаточно больших значениях энергии L это дерево имеет симметричный вид $W - W$, где W – это корневое поддерево, причем обе симметричные части в молекуле соединены ребром, инцидентным обоим корням.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый пункт докажем от противного. Действительно, если бы в графе существовал цикл, то в области между ломаными K и M существовала бы нестягиваемая окружность, переходящая в этот цикл при факторизации области (сжимании горизонтальных отрезков). Но область между этими ломаными всегда односвязная. Получили противоречие.

Для доказательства второго пункта заметим, что при больших значениях интеграла L прямая $y = L$ лежит выше ломаной K_0 . Следовательно, ломаные K и K_0 совпадают, а область между ломаными K и M симметрична относительно прямой $y = 0$. Из этого следует симметричность дерева. Далее заметим, что на ломаной K встречаются экстремумы только первого и третьего типа, которые лежат выше прямой $y = 0$. Иными словами, в одной из симметричных половин дерева (обозначим ее W) существуют только атомы A и объединяющие атомы B_k , что и означает, что дерево корневое. Наконец, заметим, что уровню $y = 0$ соответствует лишь один горизонтальный отрезок в области между ломаными. Следовательно, оба корневых симметричных поддерева соединены лишь одним ребром.

Следствие доказано.

Рассмотрим теперь топологический бильярд bC и предположим, что в таком бильярде склеено четное число столов, а свободные границы имеют одинаковый радиус. Теперь склеим эти свободные границы так, чтобы конфигурационное пространство стало гомеоморфно двумерному тору T^2 (опустим случай, при котором конфигурационное пространство гомеоморфно бутылке Клейна). Полученный топологический бильярд назовем bT .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть τ – конечная последовательность натуральных чисел, определенная с точностью до циклической перестановки своих элементов. Пусть $n = \sum \tau_i > 1$. 3-атом \hat{C}_τ – это седловой атом, определяемый следующим способом: разрежем 2-атом C_n трансверсально на $|\tau|$ связных частей таким образом, чтобы в каждой i -ой части находилось ровно τ_i критических точек, склеим обратно эти части по местам разрезов с перекруткой (рис. 21), и на основе построенного 2-атома прямым произведением на окружность получим 3-атом. Такой 3-атом перестраивает $k = \sum_{2|i} \tau_i$ торов Лиувилля в $l = \sum_{2 \nmid i} \tau_i$ торов Лиувилля.

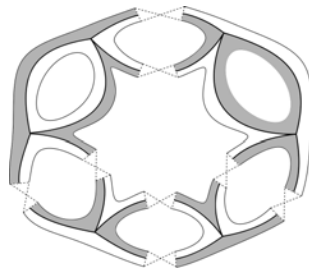


Рис. 27. 2-Атом \hat{C}_τ для $\tau = (2, 2, 1, 1)$

Несмотря на то, что в своем построении атомы B_τ и \hat{C}_τ очень похожи, 2-атом \hat{C}_τ уже не всегда можно вложить в плоскость. Самым простым примером является атом $\hat{C}_{1,1}$, который более известен как атом C_1 (см. [4]).

Алгоритм вычисления грубых молекул для бильярда bT схож с алгоритмом для bC . А именно, зафиксируем значение интеграла L . Построим ломаные K_0 , K и M в плоскости Oxy , аналогично предыдущему случаю, и отобразим плоскость Oxy на цилиндр с образующей прямой Oy так, чтобы свободные вершины этих графиков совпадали (рис. 28,а). Иными словами, ломаные K_0 и M , как и ранее, составляют профиль бильярда. Разобьем область между получившимися ломаными K и M на горизонтальные слои и стянем каждый из них в точку в объемлющем к цилиндру пространстве \mathbb{R}^3 . В полученном графе добавим еще однократное ребро к тем ребрам, которые соответствуют нестягиваемым на цилиндре слоям, и припишем свободным вершинам индекс A . Если вершина графа соответствует стягиваемому на цилиндре слою, припишем ей индекс B_τ аналогичным образом. Если же вершина графа соответствует нестягиваемому слою, припишем ей индекс \hat{C}_τ по тому же правилу (рис. 28, б).

ЛЕММА 8.2. Построенный выше граф с индексированными вершинами (рис. 28, б) является грубой молекулой топологического бильярда bT для зафиксированного уровня энергии L .

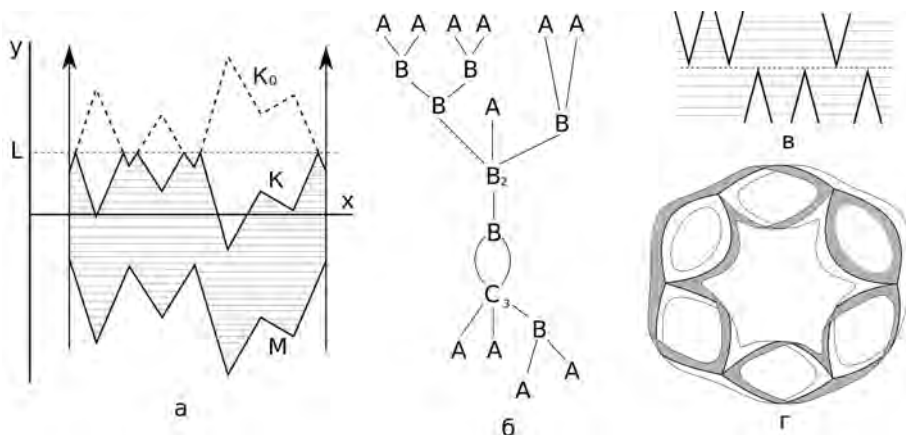


Рис. 28. Построение грубой молекулы

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда уровень $y = const$ стягиваем на цилиндре, доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 8.1. Пусть на уровне $y = const$ нет минимумов и максимумов графиков K и M , при этом он нестягиваемый в области между этими двумя ломаными. В таком случае областью возможного движения является весь бильярд bT , который гомеоморфен тору. Траектория движения материальной точки является обмоткой этого тора, при этом точка движется в одном из двух направлений на его меридиане. Следовательно, в прообразе такой области возможного движения лежат два тора Лиувилля, что объясняет добавление кратного ребра.

Пусть теперь уровень $y = const$ также нестягиваемый, но при этом на нем лежат экстремумы графиков K и M . Заметим, что прообраз соответствующей области возможного движения гомеоморфен критическому слою 3-атома S_n . Действительно, разобьем эту область возможного движения на радиальные отрезки. Полученное сечение гомеоморфно окружности на bT . При этом каждой точке этой окружности соответствуют два вектора скорости, кроме n точек, соответствующих критическим окружностям и по которым две окружности в прообразе пересекаются.

Как и в случае бильярда bC , существуют две возможности: на этом уровне лежат k экстремумов третьего типа и l экстремумов четвертого типа ломаной K (возможен при $R < L$); или же на нем лежат k экстремумов четвертого типа ломаной K и l максимумов ломаной M (возможен при $R > L$). В первом случае, оба вида бифуркаций, как было показано выше, являются слиянием областей возможного движения в одну область, гомеоморфную тору. Следовательно, в изоэнергетическом многообразии Q^3 это соответствует 3-атому $k+1$. Во втором случае, k критических окружностей соответствуют склейке областей возможного движения и l критических окружностей – их разрыву. С учетом взаимного

расположения этих склеек и разрывов на критическом слое, несложно убедиться, что в изоэнергетическом многообразии Q^3 такая перестройка соответствует 3-атому \hat{C}_τ . Таким образом, лемма доказана.

Заметим, что если в молекуле появился атом \hat{C}_τ при $|\tau| > 1$, то в этой молекуле он единственный такого типа (все оставшиеся уровни $y = const$ стягиваемы на цилиндре). Таким образом, любой топологический интегрируемый магнитный бильярд с ориентируемым конфигурационным пространством был описан с точки зрения грубой лиувиллевой эквивалентности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что грубая молекула, соответствующая изоинтегральному многообразию Q_R^3 при фиксированном значении интеграла R_0 , совпадает с грубой молекулой, соответствующий изоэнергетическому многообразию Q^3 с фиксированным значением энергии $L_0 = R_0$, даже в случае топологического бильярда. Действительно, как было замечено ранее, область возможного движения при фиксированных значениях интегралов L и R является пересечением области W , ограниченной окружностями радиусов $R + L$ и $|R - L|$, и бильярда. Таким образом, область возможного движения для значений интегралов L_1 и R_1 совпадает с областью для значений $L_2 = R_1$ и $R_2 = L_1$. Следовательно, и бифуркации областей возможного движения будут также совпадать и происходить в том же порядке, что и означает совпадение грубых молекул.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Бифуркационная диаграмма топологического магнитного бильярда состоит из отрезков прямых $R + L = R_j$ и лучей прямых $|R - L| = R_j$, лежащих в первой четверти плоскости, где R_j – радиусы границ склеек, а также из отрезка $R + L = r_i$, где r_i – радиусы свободных внутренних границ, и лучей $|R - L| = R_i$, где R_i – радиусы свободных внешних границ (рис. 29).

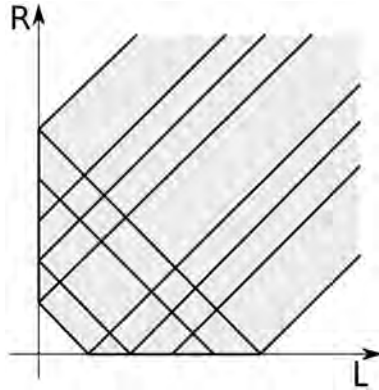


Рис. 29. Бифуркационная диаграмма топологического магнитного бильярда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано ранее, бифуркации происходят, когда внешняя граница радиуса $R + L$ области W или ее внутренняя граница радиуса $|R - L|$ выходит на границу склейки радиуса R_i или на свободную границу бильярда радиуса r_i .

Вычислим теперь метки, соответствующие построенным грубым молекулам. Отметим, что образы критических окружностей любого атома на бильярде совпадают с границами склеек бильярдных столов-листов. Ориентируем их по направлению скорости материальной точки. Заметим, что на атомах B_τ и \hat{C}_τ , для которых $|\tau| > 1$, существуют критические окружности, ориентации которых противоположны (рис. 30, ж). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только молекулы без таких атомов. Остальные 3-атомы разобьем на две группы: 1) минимальный атом A , атом B_k , перестраивающий (склеивающий) $k + 1$ тор Лиувилля в один тор, и атом C_k , перестраивающий (склеивающий) k торов Лиувилля в два тора (рис. 30, а, б, в, г); 2) максимальный атом A , атом B_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в $k + 1$ тор, и атом C_k , перестраивающий (разделяющий) два тора Лиувилля в k торов (рис. 30, д, е). Заметим, что для всех атомов первой группы критические окружности ориентированы против часовой стрелки, а для атомов второй группы они ориентированы по часовой стрелке.

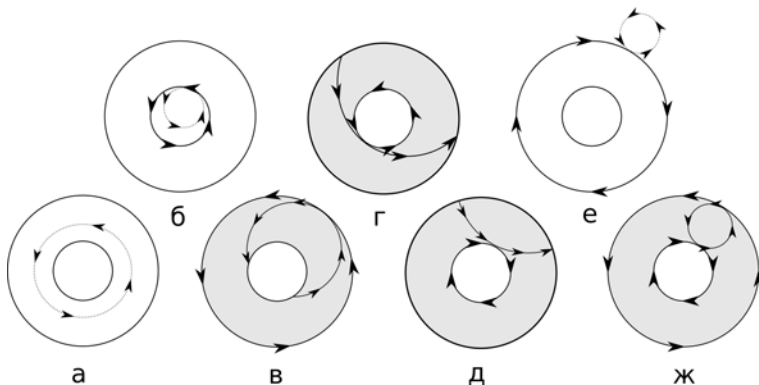


Рис. 30. Ориентации критических окружностей. На рис. а, б изображена окружность Лармора и критическая окружность минимального 3-атома A . На рис. в, г, д изображена часть области возможного движения, лежащая на одном бильярдном столе, критическая окружность седлового 3-атома и касающаяся ее траектория. На рис. е изображена окружность Лармора и критическая окружность максимального 3-атома A . На рис. ж изображены две критические траектории 3-атома B_τ или \hat{C}_τ , ориентированные противоположно.

ТЕОРЕМА 2. *Инвариант Фоменко-Цишанга топологического магнитного бильярда имеет следующий вид:*

1) *грубая молекула строится по алгоритму, приведенному в лемме 8.1 в случае бильярдов bC , bD и bS , или алгоритму, приведенному в лемме 8.2 в случае бильярда bT ;*

2) *метка γ равна нулю на всех ребрах, инцидентных атомам A , и бесконечности на остальных ребрах (и следовательно, существует лишь одна семья);*

3) *метка ε равна $+1$ на всех ребрах, соединяющих два атома из одной группы либо два атома A , и -1 в остальных случаях;*

4) метка n единственной семьи равна нулю в случае бильярдов bC и bT , ± 1 в случае бильярда bD и ± 2 в случае бильярда bS .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с топологических бильярдов bC и bT . Как было отмечено ранее, образы критических окружностей любого атома совпадают с границами склейки топологического бильярда. В случае седлового атома они гомологичны циклам λ допустимого базиса (рис. 30, в, г). При этом дополняющий его цикл μ выберем так, чтобы его образ на бильярде лежал на одном и том же радиусе. Заметим, что если мы фиксировали радиус, то прообраз лежащих на нём точек соответствует отрезкам на плоскости или цилиндре между кривыми K и M (см. построение грубой молекулы). Фактически каждый стягиваемый в точку отрезок соответствует граничной окружности некоторого двумерного атома. Таким образом, все выбранные циклы, во-первых, действительно являются трансверсальными сечениями соответствующих трехмерных атомов, а во-вторых, для каждого выбранного 3-атома являются граничными окружностями одного и того же двумерного сечения. Так как пара циклов λ и μ одного седлового атома гомологична паре циклов λ и μ другого седлового атома, то матрица склейки на ребре, соединяющей два седловых атома, имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а вклад в метку n на таких ребрах равен нулю. При этом, как было отмечено ранее, если эти седловые атомы принадлежат одной группе, то ориентации их циклов λ совпадают. Следовательно, метка $\varepsilon = 1$. В обратном случае метка $\varepsilon = -1$.

Для атомов A , напротив, цикл μ гомологичен критической окружности (рис. 30, а, б), а образ исчезающего цикла λ лежит на одном выбранном радиусе. Следовательно, матрица склейки на ребрах, соединяющих атом A и седловой атом, имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$ на ребрах, а вклад в метку n на таких ребрах также нулевой. Как и в прошлом случае, метка $\varepsilon = 1$, если седловой атом и атом A принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе. Случай, при котором ребро соединяет два атома A , был рассмотрен ранее для кольцевого бильярда.

Теперь рассмотрим топологический бильярд bD . Как было отмечено ранее, этот бильярд отличается от бильярда b появлением единственной регулярной области возможного движения (при $R = L$), содержащей центр дискового бильярдного стола. Найдем единственное ребро e в грубой молекуле, на котором лежит соответствующая этой области возможного движения точка. Всем остальным ребрам будут соответствовать матрицы склейки, аналогичные случаю бильярда bC . Если ребро e соединяет два седловых атома, то как и в случае bC , циклы λ этих атомов совпадают с точностью до ориентации. Чтобы найти соотношение на циклы μ , воспользуемся циклом γ , аналогичным случаю обычного кругового бильярда (см. рис. 12). Таким образом, матрица склейки на ребре e имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ (-1)^i & \mp 1 \end{pmatrix}$, где $i \in 0, 1$. Следовательно, метка $r = \infty$, а вклад в метку n равен ± 1 (в зависимости от ориентации Q^3 , она влияет на значение i). При этом, как и ранее, метка $\varepsilon = 1$, если седловые атомы принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе.

Если же ребро e соединяет седловой атом с атомом A , то используя тот же цикл γ можно показать, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & (-1)^i \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$, а вклад в метку n также равен ± 1 . Как и ранее, метка $\varepsilon = 1$, если седловой атом и атом A принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе. Случай, когда ребро e соединяет два атома A , был рассмотрен для кругового бильярда.

Наконец, рассмотрим бильярд bS . Рассмотрим область возможного движения, соответствующей случаю $R = L$. Тогда либо в этой области существуют две компоненты связности, каждая из которых содержит один центр дискового стола, либо эта область состоит из одной, гомеоморфной сфере, компоненты связности и содержит сразу оба центра.

В первом случае возникают два ребра в грубой молекуле, аналогичных ребру e для бильярда bD . Следовательно, метки r и ε на таких ребрах совпадают с метками на ребре e . Вклад каждого такого ребра в мерку n равен ± 1 . Можно показать, что при правильном выборе ориентации Q^3 все описанные выше вклады в метку n становятся положительными. То есть оба этих вклада нужно брать с одним и тем же знаком.

Во втором случае вспомогательный цикл γ устроен немного иначе. А именно, его образ на бильярде состоит из двух частей, совпадающих с образами старого цикла γ , лежащих на двух дисковых бильярдных столах. Таким образом, матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 2(-1)^i & \mp 1 \end{pmatrix}$ для ребра, соединяющего седловые атомы, и $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 2(-1)^i \end{pmatrix}$ для ребра, соединяющего седловой атом и атом A . Метки r и ε аналогичны меткам бильярда bD , а вклад такого ребра в метку n равен ± 2 .

Теорема доказана.

§ 9. Топологический магнитный бильярд лиувиллево эквивалентен геодезическим потокам на поверхностях вращения в потенциальном поле

В заключение покажем, какие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы лиувиллево эквивалентны топологическим магнитным бильярдам. Рассмотрим интегрируемый геодезический поток на поверхности вращения, гомеоморфной сфере, в потенциальном поле. Интегрируемые системы такого типа были изучены с точки зрения топологии слоения Лиувилля в работе Е. О. Кантонистой [13]. Более точно, такой геодезический поток на многообразии $\mathcal{M} \simeq S^2$ задается парой функций одной переменной $(f(r), V(r))$, где функция $f : [0, I] \rightarrow \mathbb{R}$ задает метрику вращения $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\phi^2$ на \mathcal{M} , а функция V является потенциалом, не зависящим от угловой координаты ϕ . Гамильтонианом такой системы является функция

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2f^2(r)} + V(r),$$

и дополнительный первый интеграл $F = p_\phi$ линеен по импульсам. Согласно работе [13], имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 Е. О. КАНТОНИСТОВА. *Рассмотрим геодезический поток на многообразии вращения в потенциальном поле, заданный парой функций (f, V) . Пусть $Q \subseteq Q_h^3 = \{H = h\}$ – связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой интеграл K является функцией Ботта. Тогда:*

1. *Инвариант Фоменко-Цишага потока на Q симметричен относительно оси h , т.е. имеет вид $W - W$. При этом W является корневым деревом, свободные вершины которого соответствуют 3-атомам A , а остальные – седловым 3-атомам B_k для произвольного k .*
2. *Метки на ребрах типа $A - B_k$ молекулы: $r = 0, \varepsilon = 1$.*
3. *Метки на ребрах типа $B_l - B_k$, где оба седловых атома лежат в одной из двух симметричных частей молекулы $W - W$: $r = \infty, \varepsilon = 1$.*
4. *Метки на ребре типа $B_k - B_k$, соединяющем корни симметричных частей молекулы: $r = \infty, \varepsilon = -1$.*
5. *Метка единственной семьи n равна 0, 1 или 2 в зависимости от того, сколько точек ранга 0 лежит в подмногообразии $\{H < h\}$.*

Теперь покажем, что для определенных значений интеграла L топологический магнитный бильярд лиувиллево эквивалентен геодезическому потоку на поверхности вращения в потенциальном поле. А именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Рассмотрим геодезический поток на поверхности вращения в потенциальном поле, заданный парой функций (f, V) . Выберем неособое значение энергии этого потока, такое, что выполнены условия теоремы 3. Тогда существует топологический магнитный бильярд, инвариант Фоменко-Цишага которого для больших значений интеграла L совпадает с инвариантом, соответствующим выбранному значению энергии геодезического потока. Следовательно, эти две системы лиувиллево эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выбранному значению энергии геодезического потока с потенциалом соответствует инвариант Фоменко-Цишага $W - W$. Зафиксируем этот инвариант. Теорема будет доказана, если найдется бильярд класса bC , bD или bS (в зависимости от значения метки n), инвариант Фоменко которого при достаточно больших значениях интеграла L совпадает с фиксированной грубой молекулой. Метки же такого бильярда автоматически будут совпадать с метками фиксированной молекулы согласно теоремам 2 и 3 и предложению 4.

Для того, чтобы построить необходимый бильярд, приведем алгоритм, обратный к алгоритму построения грубой молекулы по бильярду (см. рис. 31). **Шаг 0.** Рассмотрим подграф W . Пусть его высота равна $N - 1$. Разобьем все его атомы на группы в соответствии с их расстоянием до корня. Обозначим эти группы f_i , где i – расстояние. Заметим, что в группе f_0 лежит лишь один атом B_k (присвоим ему номер 1). **Шаг 1.** В полуплоскости $Oxy : x > 0$ на прямой $y = 1$ выберем k точек с координатами $x_1^1 < x_1^2 < \dots < x_1^k$, где k – сложность атома в группе $f = f_0$. **Шаг 2.** Атомы в группе f_1 занумеруем

парами чисел $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, N_2)$, где N_2 – количество атомов, а первое число в паре обозначает смежность этих атомов атому с номером 1. Пусть атом $(1, j)$ имеет сложность k_j . Тогда на прямой $y = 2$ выберем k_j точек с координатами $x_1^{j-1} < x_{1,j}^1 < \dots < x_{1,j}^{k_j} < x_1^j$. Определим теперь шаги с номерами $3 \leq i \leq N$. **Шаг i.** Пусть в группе f_{i-1} лежат N_i атомов. Занумеруем их наборами из i чисел $(1, j_2, j_3, \dots, j_i)$, где $1 \leq j_i \leq N_i$. При этом атом с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1}, j_i)$ смежен атому с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1})$, лежащему в группе f_{i-2} (напомним, что дерево W является корневым). Пусть этот атом имеет сложность k_{j_i} . Тогда на прямой $y = i$ выберем k_{j_i} точек с координатами $x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^{j_i-1} < x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1},j_i}^1 < \dots < x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1},j_i}^{k_{j_i}} < x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^{j_i}$. При этом считаем, что $x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^0 = x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-2}}^{j_{i-1}-1}$ и $x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^{k_{j_{i-1}}+1} = x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-2}}^{j_{i-1}}$, где $k_{j_{i-1}}$ – сложность атома с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1})$. **Шаг N+1.** Соединим построенные на предыдущих шагах точки ломаной K по возрастанию их координат x . Отразим эту ломаную относительно прямой $y = 0$ (обозначим результирующую ломаную M). Вместе полученные ломаные K и M образуют профиль топологического бильярда класса bC . На основе этого профиля восстановим исходный бильярд. **Шаг N+2.** Если метка семьи n исходной молекулы равна 1, приклеим к одной из свободных границ построенного бильярда круговой элементарный стол-лист. Если метка семьи n равна 2, приклеим такие круговые листы к обоим свободным границам.

Построенный бильярд обладает фиксированной ранее грубой молекулой при значении интеграла $L = N + 1$. Действительно, рассмотрим группу атомов f_i . Если в ней лежит атом A с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1}, j_i)$, то он не смежен ни с одним атомом группой выше. Следовательно, ближайшие выделенные вершины к точке $x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1},j_i}^1$ расположены ниже прямой $y = i$, т.е. это точка максимума кривой K . Аналогично можно показать, что точки ломаной, отвечающие седловым атомам, являются локальными минимумами. Кроме того, все локальные минимумы, соответствующие одному атому V_k , лежат на стягиваемом горизонтальном отрезке прямой $y = i$ (иначе этот атом был бы смежен двум атомам, лежащим в группе ниже), и при этом только они (иначе существовал бы другой атом, лежащий в той же группе f_i и смежный атому V_k). Следовательно, приведенный алгоритм действительно является обратным к алгоритму леммы 8.1.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказанная теорема означает, что класс слоений Лиувилля неособых изоэнергетических многообразий геодезических потоков на поверхностях вращения с потенциалом (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) полностью лежит в аналогичном классе топологических магнитных бильярдов. Более того, класс бильярдов шире, т.к. ему соответствуют также грубые молекулы, не являющиеся симметричными (см. рис. 23).

Список литературы

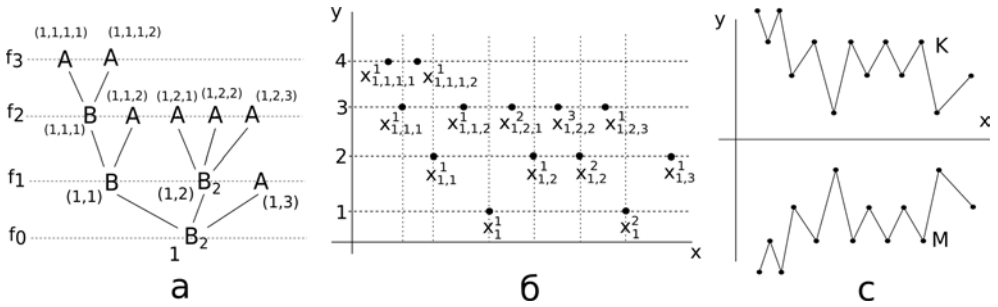


Рис. 31. Алгоритм восстановления бильярда по молекуле. На рис. а изображен корневой подграф W и его разбиение на группы f_i . на рис. б изображено расположение точек-вершин ломаной K согласно алгоритму. На рис. в изображено результирующее сечение искомого топологического бильярда.

- [1] В. В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, *Матем. сб.*, **206**:10 (2015), 127–176.
- [2] А. Е. Mironov, М. Bialy, “Algebraic non-integrability of magnetic billiards”, *J. Phys. A*, **210**:3 (2016), 18.
- [3] В. В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов”, *Матем. сб.*, **210**:3 (2019), 17–74.
- [4] А. Т. Фоменко, А. В. Болсинов, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, РХД, Ижевск, 1999; А. Т. Fomenko, А. V. Bolsinov, *Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification*, CHAPMAN & HALL/CRC. A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2004.
- [5] Е. А. Кудрявцева, А. А. Ошемков, “Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения”, *Чебышевский сб.*, **21**:2 (2020), 244–265.
- [6] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Успехи математических наук*, **44**:1 (1989), 145–173.
- [7] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Известия АН СССР*, **54**:3 (1990), 546–575.
- [8] В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко, “Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:4 (2017), 20–67.
- [9] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, *Вестник Моск. Универ.*, **3** (2019), 15–25.
- [10] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды”, *Известия РАН*, **83**:6 (2019), 63–103.
- [11] А. Т. Fomenko, V. V. Vedyushkina, “Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field”, *Russian Journal of mathematical physics*, **26**:3 (2019), 320–333.

- [12] В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко, “Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов”, *Доклады Академии Наук (РАН)*, **493** (2020), 9–12.
- [13] Е. О. Кантонистова, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле”, *Матем. сб.*, **207**:3 (2016), 47–92.

В. В. Ведюшкина (V. V. Vedyushkina)

Московский государственный университет им. М. В.

Ломоносова

E-mail: aivenirra@gmail.com

С. Е. Пустовойтов (S. E. Pustovoitov)

Московский государственный университет им. М. В.

Ломоносова

E-mail: pustovoitovse1@mail.ru