Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических биллиардов в магнитном поле.

В.В. Ведюшкина С.Е. Пустовойтов

В работе изучена топология слоений Лиувилля плоских и топологических интегрируемых биллиардов с магнитными полями. Вычислены инварианты Фоменко-Цишанга лиувиллевой эквивалентности возникающих трехмерных инвариантных многообразий – изоинтегральных и изоэнергетических. В частности, были обнаружены седловые особенности с разным направлением своих особых окружностей, заданным потоком энергии системы. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 20-71-00155 в Московском университете имени М.В.Ломоносова

1 Введение

Естественным расширением плоских интегрируемых биллиардов является конструкция топологических биллиардов [1], которая позволяет сохранить интегрируемость системы. Топологический биллиард – это ориентируемое многообразие, полученное изометричной склейкой плоских элементарных биллиардов вдоль общих границ. Материальная точка, попадая на ребро склейки такого биллиарда, после отражения продолжает движение по другому листу биллиарда. При этом, как правило, предполагается, что проекции каждого из дух склеиваемых листов биллиарда на плоскость расположены по одну сторону от проекции их общего сегмента границы – дуги некоторой кривой из софокусного семейства квардик.

Так как известные интегрируемые биллиарды с магнитным полем ограничены концентрическими окружностями (см. [2]), то в качестве плоских элементарных биллиардов-кирпичей рассматривается биллиард в диске (ограниченном окружностью) и в кольце (ограниченном двумя концентрическими окружностями). Путем всевозможных склеек, очевидно, можно получить получить биллиардный стол-комплекс, гомеоморфный либо диску, либо кольцу (цилиндру), либо сфере, либо тору. Для каждого из таких топологических биллиардов изучается топология возникающего слоения Лиувилля на изоэнергетической поверхности. Напомним, что в качестве энергии в данных системах выступает квадрат радиуса окружности Лармора.

Здесь возникают два эффекта. Во-первых, в магнитных топологических биллиардах могут меняться свойства траекторий для выпуклых и невыпуклых дуг склейки. Как известно, в локально-плоских топологических биллиардах без потенциала или магнитного поля наличие невыпуклой склейки (например, склейка двух одинаковых колец по их внутенней окружности) порождает невозможность однозначно определить (по непрерывности) продолжение траектории, каустикой которой является сама окружность склейки. Выпуклая же склейка гарантирует возможность продолжить каждую траекторию. Тем не менее, отметим, оба случая позволяют корректно определить слоение Лиувилля (его двумерный особый слой остается гомеоморфным [3] особому слою невырожденной полулокальной особенности ранга 1 – 3-атома Фоменко (см. [4]).

Теперь же, при добавлении магнитного поля, становится возможной обратная ситуация: выпуклые линии склейки перестают порождать однозначное продолжение некоторыз траекторий, а в системе с невыпуклой склейкой, наоборот, такое свойство появляется. Это связано с тем, что в магнитном биллиарде сегменты траектории — не отрезки, а дуги окружности. Свойство определенности продолжения траектории после касания линии склейки определяется характером касания: внешнего или внутреннего. Топология 3-атомов, возникающих в системе магнитного биллиарда, будет найдена ниже в зависимости от формы стола.

Во-вторых в магнитных топологических биллиардах удалось реализовать интересный класс особенностей. А именно, в некоторых изоэнергетических 3-поверхностях были обнаружены седловые особенности, критические окружности которых ориентированы по-разному движением частицы (т.е. гамильтоновым потоком энергии системы). В таком случае слоение Лиувилля определено, но не определен инвариант Фоменко–Цишанга. Данная ситуация возникает, если окружность Лармора одновременно касается внешним и внутренним образом двух окружностей – дуг склейки стола-комплекса, одна из которых выпукла, а вторая невыпукла. Любое малое изменение значений интегралов (радиуса окружности центров и радиус окружности Лармора) разрушает данную особенность.

Отметим, что другой класс интегрируемых гамильтоновых систем с магнитным полем был исследован в работе Е.А.Кудрявцевой и А.А.Ошемкова [5] при рассмотрении геодезического потока на двумерной поверхности вращения в магнитном поле. В этой работе рассмотрены системы на поверхности, гомеморфной сфере (в нашей работе рассмотрены локально-плоские столы, гомеоморфные тору, сфере, диску или кольцу) с неплоской метрикой. Оказалось, что в том классе систем также встретились невырожденные расщепленные особенности.

2 Необходимые определения

Напомним ряд необходимых определений. Гладкое многообразие M^4 называется симплектическим, если на нем задана симплектическая структура: невырожденная, замкнутая 2-форма ω. Косым градиентом гладкой функции H назовем векторное поле, задаваемое по формуле $sgrad H = \Omega^{-1}grad H$, где Ω есть матрица формы ω в локальных координатах. Динамическая система v = sgradH называется гамильтоновой динамической системой с гамильтонианом H. Если у гамильтоновой системы v на M^4 есть две функционально независимые, находящиеся в инволюции функции f_1 , f_2 , которые являются первыми интегралами (сохраняются вдоль траекторий системы, что эквивалентно $\{H, f_i\} = 0$), причем векторные поля $sgradf_i$ полны, то говорят, что такая система вполне интегрируема по Лиувиллю (см. [4]). Согласно теореме Лиувилля регулярная, компактная, связная компонента поверхности уровня интегралов f_1 , f_2 диффеоморфна тору T^2 . Этот тор называется тором Лиувилля. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности тора Лиувилля в M^4 диффеоморфно прямому произведению тора на диск D^2 . В дальнейшем будем полагать, что функция f_1 совпадает с Н – энергией или гамильтонианом системы. Потребуем также выполнения условия Ботта: критические точки интеграла f_2 на Q^3 должны быть невырождены и образовывать критические подмногообразия. Более того, будем предполагать, что все эти подмногообразия гомеоморфны окружности. Рассмотрим неособое (т.е. $dH \neq 0$) изоэнергетическое многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = const\}$. В теории интегрируемых гамильтоновых систем используется несколько отношений эквивалентности между система, ограниченными на неособый уровень энергии. Одним из важнейших является вопрос об их эквивалентности с точки зрения послойно гомеоморфности слоений Лиувилля двух систем (отметим, что другие эквивалентности – гомеомфорность Q^3 или траекторная эквивалентность интегрируемых систем также вызывают большой интерес, см. [4]). Более точно, рассматривается следующее отношение эквивалентности: две системы v_1 и v_2 на Q_1^3 и Q_2^3 соответственно называются лиувиллево эквивалентными, если существует послойный диффеоморфизм из Q_1^3 на Q_2^3 , сохраняющий ориентацию как самих многообразий, так и ориентацию критических окружностей. Другими словами, так как почти все торы являются нерезонансными (т.е. их траекторная обмотка всюду плотна), то замыкание решения представляет собой тор Лиувилля. Это позволяет говорить, что лиувиллева эквивалентность есть эквивалентность замыканий почти всех решений динамической системы.

Теперь кратко опишем построение классифицирующего инварианта лиувиллевой эквивалентности систем – инварианта Фоменко-Цишанга (или меченой молекулы). Подробно данный вопрос описан в [4, гл. 4 т. 1]. Расслоим неособое изоэнергетическое многообразие Q^3 поверхностями уровня дополнительного интеграла f_2 . Напомним: согласно теореме Лиувилля, в типичный совместный уровень энергии H и интеграла f_2 будет гомеоморфен тору или несвязному объединению торов (на тех уровнях, где косые градиенты sgradH и sgradf₂ линейно независимы).Вполне интегрируемая система на компактном Q^3 также обыкновенно имеет конечное число особых слоев. В предположении боттовости интеграла f_2 на Q^3 инвариантные окрестности особых слоев. В предположении боттовости интеграла f_2 на Q^3 инвариантные окрестности особых слоев классифицированы А.Т.Фоменко [4, гл. 3, т. 1] с точность до послойной гомеоморфности. Класси послойной гомеоморфности малых инвариантных окрестностей такого особого слоя называют 3-атомами. Изоэнергетическому многообразию и слоению Лиувилля на нем можно сопоставить инвариант Фоменко (или грубую молекулу) – граф Кронрода-Риба, внутренние точки ребер которого соответствуют регулярным слоям многообразия Q^3 (то есть торам Лиувиля), а вершинам сопоставляются атомы, т.е. боттовские перестройки торов Лиувилля. Инвариантом Фоменко-Цишанга (или меченой молекулой) называется грубая молекула,

некоторым подграфам которых сопоставляются числовые метки, описывающие, как именно соотносятся (т.е. каким гомеоморфизмом склеиваются) граничные торы двух атомов, соедиенных данным ребром.

Теорема 1 (Фоменко-Цишанг) Системы v_1 и v_2 на Q_1^3 и Q_2^3 лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

Более подробно о классификации атомов и интегрируемых гамильтоновых системах см. в [4].

3 Постановка задачи. Траектории.

Рассмотрим биллиард внутри окружности. При попадании материальной точки на границу биллиарда, она отражается от нее абсолютно упруго, то есть угол падения равен углу отражения, а модуль скорости точки не меняется. На материальную точку единичной массы и заряда действует постоянное магнитное поле постоянной сигнатуры *b*, ортогональное к плоскости биллиардного стола. Тогда между ударами от стенки биллиарда материальная точка движется по дуге окружности фиксированного радиуса *A* против часовой стрелки (эти окружности называются окружностями Лармора). Модуль скорости точки остается постоянным и равен *bA*.

Также можно показать, что между ударами сохраняется значение R – расстояние от центра граничной окружности до центра соответствующей окружности Лармора. Следовательно, траектория движения материальной точки внутри кругового биллиарда является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора с равными радиусами A, центры которых равноудалены от центра биллиарда на расстояние R (рис. 1, а).



Рис. 1: Примеры траекторий движения для кругового и кольцевого магнитного биллиарда

Отметим, что биллиард в области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, допускает те же первые интегралы A и R, и траектория движения так же будет состоять из дуг окружностей равного радиуса, центры которых равноудалены от центра граничных окружностей (рис. 1, б).

Лемма 1 Функции A и R являются первыми интегралами магнитного биллиарда в круговой (кольцевой) области. Эти функции функционально независимы почти всюду и находятся в инволюции относительно стандартной симплектической структуры на M^4 . Таким образом, магнитный биллиард в круговой (кольцевой) области является вполне интегрируемым по Лиувиллю.

При этом радиус A окружностей Лармора играет роль энергии системы. Более точно, значение интеграла A совпадает с квадратным корнем из полной энергии системы – её классического гамильтониана.

4 Области возможного движения. Бифуркационные диаграммы.

Определение 1 Областью возможного (допустимого) движения уровня интегралов A и R называется образ соответствующего слоя слоения Лиувилля при проекции $p: M^4 \to \mathbb{R}^2$ на биллиардный стол. Иными словами, это замкнутая область на биллиарде, в которой материальная точка может находиться при фиксированных значениях интегралов A и R.

Найдем всевозможные области возможного движения при любых значениях интегралов A и R для кругового и кольцевого биллиардов.



Рис. 2: Области возможного движения при $0 < A < \frac{1}{2}R_0$

Начнем с кругового биллиарда. Обозначим радиус граничной окружности за R_0 . Зафиксируем значение $0 < A < \frac{1}{2}R_0$. При R = 0 область возможного движения является одномерной и состоит из окружности Лармора радиуса A (рис. 2, а).

При 0 < R < A траекториями движения являются замкнутые окружности Лармора, которые целиком лежат внутри биллиардной области и обходят центр биллиарда. Следовательно, областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов A - R и R + A, при этом движение точки в этой области происходит против часовой стрелки (рис. 2, б).

При A = R траекториями также являются окружности Лармора, которые однако проходят через центр биллиарда. Областью возможного движения является круговая область, ограниченная окружностью радиуса R + A (рис. 2, в).

При $A < R \le R_0 - A$ траекториями также являются окружности Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R - A и R + A (рис. 2, г). Отметим, что вплоть до значения $R = R_0 - A$ все траектории были замкнутыми (в определениях выше это означает что все торы – резонансны).

При $R_0 - A < R < A + R_0$ траектория становится кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R - Aи R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 2, д).

При $R = A + R_0$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и затем при $R > A + R_0$ окружности Лармора на пересекаются с биллиардной областью, а область возможного движения является пустым множеством (рис. 2, е).



Рис. 3: Области возможного движения при $\frac{1}{2}R_0 \le A < R_0$

Зафиксируем теперь $\frac{1}{2}R_0 \leq A < R_0$. При $0 < R \leq R_0 - A$ траекториями движения являются замкнутые окружности Лармора, целиком лежащие внутри биллиардной области. Следовательно, областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов A - R и R + A, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 3, б).

При $R_0 - A < R < A$ траектория становится кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов A - Rи R_0 , при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 3, в).

При A = R каждая дуга окружностей Лармора проходит через центр биллиарда. Областью возможного движения является вся биллиардная область (рис. 3, г).

При $A < R < A + R_0$ областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R - A и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 3, г).

При $R = A + R_0$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и затем при $R > A + R_0$ окружности Лармора на пересекаются с биллиардной областью, а область возможного движения является пустым множеством (рис. 3, е).



Рис. 4: Области возможного движения при $A \ge R_0$

Наконец, зафиксируем значение $A \ge R_0$. При $R < A - R_0$ окружности Лармора не пересекают биллиардную область, и область возможного движения пуста.

При $R = A - R_0$ область возможного движения одномерна и является граничной окружностью биллиарда (рис. 4, а).

При $A - R_0 < R < A$ траектория является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов A - Rи R_0 , при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 4, б).

Далее при дальнейшем росте значения интеграла R траектории и области возможного движения повторяют случай $\frac{1}{2}R_0 \leq A < R_0$.

Теорема 2 Прообраз любой двумерной области возможного движения кругового магнитного биллиарда при проекции р (т.е. соответствующий слой слоения Лиувилля) гомеоморфен двумерному тору в M^4 .

Доказательство. Сначала рассмотрим область возможного движения, не содержащую центр биллиарда, и граница которой не содержит границы биллиарда (рис. 5, а). Каждая точка во внутренности области возможного движения принадлежит двум окружностям Лармора. Следовательно, каждой точке соответствуют два вектора скорости. Аналогично, каждой граничной точке соответствует один вектор скорости. Разобьем область возможного движения радиальными отрезками, каждой точке которых сопоставленны соответствующие вектора скорости. Прообраз каждого такого отрезка в M^4 очевидно гомеоморфен окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен двумерному тору.

Теперь рассмотрим область возможного движения, внутренность которой содержит центр биллиарда, но граница которой также не содержит границы биллиарда (рис. 5, б). Как и в прошлом случае, граничным точкам соответствует один вектор скорости, а каждой точке внутренности соответствует два вектора скорости, кроме центра биллиарда, которому соответствует целая окружность векторов. Разобьем область возможного



Рис. 5:

движения на диаметры, каждой точке которых сопоставленны соответствующие вектора скорости, при этом центру каждого диаметра сопоставлены два вектора, параллельные этому диаметру. Несложно заметить, что прообраз каждого такого диаметра в M^4 гомеоморфен окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения также гомеоморфен двумерному тору.

Оставшиеся случаи областей возможного движения, границы которых содержат границу биллиарда, разбираются аналогично. Единственное отличие заключается в том, что точкам, лежащим на границе биллиарда, соответствуют не один, а два вектора скорости, которые, однако, отождествляются согласно закону отражения.

Теорема доказана.

Таким образом, при $0 < A < R_0$ и $0 < R < A + R_0$ и при $A \ge R_0$ и $A - R_0 < R < A + R_0$ прообраз соответствующей области возможного движения гомеоморфен двумерному тору.

Определение 2 Отображением момента интегрируемой системы называется отображение $F: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где F(x) = (A(x), R(x)). Бифуркационной диаграммой $\Sigma(F)$ называется образ критических точек отображения момента на \mathbb{R}^2 . При этом точка в M^4 называется критической, если в ней падает ранг дифференциала отображения момента. Иначе точка называется регулярной.

В нашем случае образ отображения момента имеет вид, изображенный на рис. 6. Бифуркационной диаграммой является граница изображенной области.



Рис. 6: Бифуркационная диаграмма кругового магнитного биллиарда.

Рассмотрим теперь биллиард в кольцевой области. Пусть радиус внешней окружности равен R_0 , а радиус внутренней – r_0 . Проведем аналогичные рассуждения. Зафиксируем $A < r_0$. При $R < r_0 - A$ окружности

Лармора на пересекаются с биллиардной областью, а область возможного движения является пустым множеством. При $R = r_0 - A$ область возможного движения одномерна и является окружностью радиуса r_0 (рис. 7, a).



Рис. 7: Области возможного движения при $A < r_0$

При $r_0 - A < R < A + r_0$ траектория является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов r_0 и R + A, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 7, б).

При $A+r_0 < R < R_0 - A$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в биллиардной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R - A и R + A(рис. 7, в).

При $R_0 - A < R < A + R_0$ траектории опять становятся кусочно гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R - A и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 7, г). При $R = A + R_0$ область возможного движения вырождается в одномерную окружность, а при дальнейшем росте R она становится пустым множеством.



Рис. 8: Области возможного движения при $r_0 < A < \frac{1}{2}(r_0 + R_0)$

Теперь рассмотрим случай $r_0 < A < \frac{1}{2}(r_0 + R_0)$. При R = 0 областью возможного движения является окружность Лармора радиуса A (рис. 8, а).

При $0 < R \leq A - r_0$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в биллиардной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов A - R и A + R, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 8, б).

При $A - r_0 < R \leq R_0 - A$ траектории становятся кусочно-гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов r_0 и R + A, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 8, в).

При $R_0 - A < R < A + r_0$ материальная точка соударяется как с внутренней стенкой биллиарда, так и с внешней. Областью возможного движения становится вся биллиардная область, при этом характер движения в ней меняется из движения против часовой стрелки в движение по часовой стрелке (рис. 8, г, д, е).

При $A + r_0 \le R < A + R_0$ материальная точка соударяется только с внешней стенкой. Область возможного движения ограничена окружностями радиусов R - A и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 8, ж).

При $R = A_0 + R$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , b с дальнейшим ростом значения R становится пустым множеством (рис. 8, 3).



Рис. 9: Области возможного движения при $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < A < R_0$

Рассмотрим теперь случай $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < A < R_0$. При $0 < R \le R_0 - A$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в биллиардной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов A - R и R + A, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 9, б).

При $R_0 - A < R \leq A - r_0$ траектории становятся кусочно-гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R_0 и A - R, при этом точка движется в этой области также против часовой стрелки (рис. 9, в).

При $A - r_0 < R < A + r_0$ материальная точка соударяется как с внутренней стенкой биллиарда, так и с внешней. Областью возможного движения становится вся биллиардная область, при этом характер движения в ней меняется из движения против часовой стрелки в движение по стрелке (рис. 9, г, д, е).

При $A + r_0 \leq R < A + R_0$ материальная точка соударяется только с внешней стенкой. Область возможного движения ограничена окружностями радиусов R - A и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 9, ж).

Наконец, зафиксируем значение $A > R_0$. При $R < A - R_0$ окружности Лармора не пересекают биллиардную область, и область возможного движения пуста. При $R = A - R_0$ областью возможного движения является окружность радиуса R_0 .

При $A - R_0 < R < A - r_0$ траектории кусочно-гладкие, состоящие из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R_0 и A - R, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 10, б). При дальнейшем росте значения R поведение траекторий и областей возможного движения не отличается от предыдущего случая $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < A < R_0$.

Для кольцевого биллиарда верна теорема, аналогичная теореме 2.

Теорема 3 Прообраз любой двумерной области возможного движения кольцевого магнитного биллиарда при проекции p (m.e. coomberncmbyющий слой слоения Лиувилля) гомеоморфен двумерному тору в M^4 .



Рис. 10: Области возможного движения при $A > R_0$

Аналогично круговому биллиарду, построим образ отображения момента и бифуркационную диаграмму кольцевого биллиарда (рис. 11).



Рис. 11: Бифуркационная диаграмма кольцевого магнитного биллиарда.

5 Инварианты Фоменко-Цишанга. Изоэнергетические многообразия.

Изучим теперь топологию слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия $Q^3 = \{x \in M^4 : A(x) = const\}$. Согласно теоремам 2 и 3, регулярные слои слоения Лиувилля гомеоморфны двумерным торам. Также заметим, что как для кругового биллиарда, так и для кольцевого биллиарда, для любого регулярного значения интеграла A существует лишь два критических слоя, гомеоморфных окружности, окрестность которых гомеоморфна 3-атому A. Следовательно, грубая молекула, соответствующая любому регулярному значению интеграла A, имеет вид A - A.

Теорема 4 Для кругового магнитного биллиарда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерной сфере S^3 при любом значении интеграла А. Соответствующий инвариант Фоменко-Цишанга имеет вид A - A с метками r = 0 и $\varepsilon = 1$.



Рис. 12: Базисные циклы вблизи слоя A = R

Доказательство. Рассмотрим случай $0 < R < \frac{1}{2}R_0$. Разобьем Q^3 на два полнотория, соответствующие 0 < R < A и $A < R < A + R_0$. Эти полнотория склеиваются на граничном слое A = R. На рис. 12 изображена проекция этого граничного слоя на биллиард, а также проекции регулярных слоев в окрестностях атомов А с их допустимыми базисными циклами λ и μ . Заметим, что циклы γ , изображенные на рис. а и в, склеиваются с циклом γ на граничном слое (рис. б). При этом цикл γ на слое "а" гомологичен циклу $\pm \lambda_{-} + \mu_{-}$, а на слое "в" он гомологичен циклу λ_+ . Кроме того, цикл μ_+ склеивается с циклом $-\mu_-$ вследствие их противоположной ориентации (рис. 2). Следовательно, матрица склейки базисных циклов имеет следующий вид $^{-1}$ Такой матрице склейки соответствует метка r=0 и метка $\varepsilon=1,$ а многообразие Q^3 гомеоморфно сфере S^3 . Аналогичные рассуждения можно провести для случаев $\frac{1}{2}R_0 < A < R_0$ и $A > R_0$ с правильным выбором

цикла γ .

Теорема доказана.

Теорема 5 Для кольцевого магнитного биллиарда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно произведению $S^1 imes S^2$ при любом значении интеграла А. Соответствующий инвариант Фоменко-Цишанга имеет вид A - A с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$.

Доказательство. Из рис. 7, 8, 9 и 10 несложно заметить, что для всевозможных значений интеграла A базисные циклы λ и μ , соответствующие окрестностям двух атомов A, склеиваются согласно правилу $\lambda_{+} = \pm \lambda_{-}$ и $\mu_{+} = -\mu_{-}$ (это связано с тем, что в отличие от кругового биллиарда, биллиард в кольце не обладает перестройкой областей возможного движения через центр биллиарда). Следовательно, матрица $\begin{pmatrix} 0\\ -1 \end{pmatrix}$. Метка $r=\infty,$ метка $\varepsilon=1,$ а изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $S^1 \times S^2$.

Теорема доказана.

Замечание 1 Таким образом, мы полностью завершили топологический анализ интегрируемых магнитных биллиардов на плоских (элементарных) столах. Были вычислены их меченые молекулы для каждого значения энергии и определены классы гомеоморфности соответствующих изоэнергетических многообразий Q^3 .

6 Лиувиллево эквивалентные системы.

Определим теперь, какие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы лиувиллево эквивалентны плоским интегрируемым магнитным биллиардам. Для этого воспользуемся приведенной ранее теоремой Фоменко-Цишанга. Следующая таблица сопоставляет случай интегрируемого магнитного биллиарда,

его меченую молекулу и соответствующий ей уровень энергии некоторых случаев динамики твердого тела. Напомним, что список вычисленных меченых молекул для многих интегрируемых систем механики и математической физики приведен в [4, т. 2].

| Слуцай марнитного биллиарла | Молокила | Случан линамики трерлого тела |
|-----------------------------|--|---|
| Олучан магнитного ойллиарда | молскула | Случан дипамики твердого тела |
| Круговой биллиард | | Лагранж (1), Ковалевская (1), Жуковский (7) |
| | $\wedge r=0$ | |
| | $A_{\epsilon=1}^{A}$ | Эйлер (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1) |
| Кольцевой биллиард | | Лагранж (2), Жуковский (1) |
| | $\Delta \xrightarrow{r=\infty} \Delta$ | |
| | Γε=1 Γ | |

Таблица 1: Системы динамики твердого тела, эквивалентные плоским круговым магнитным биллиардам в своих определенных зонах энергии.

7 Изоинтегральное многообразие Q_R^3 .



Рис. 13: Перестройка областей возможного движения при $0 < R < \frac{1}{2}R_0$



Рис. 14: Перестройка областей возможного движения пр
и $\frac{1}{2}R_0 < R < R_0$

Рассмотрим теперь изоинтегральное многообрази
е $Q_R^3=\{x\in M^4: R(x)=const\}$ и проведем для него аналогичный анализ. Начнем с кругового биллиарда. На рис
. 13, 14 и 15 изображены перестройки областей



Рис. 15: Перестройка областей возможного движения пр
и $R_0 < R$



Рис. 16: Перестройка областей возможного движения при $0 < R < r_0$



Рис. 17: Перестройка областей возможного движения пр
и $r_0 < R < \frac{1}{2}(R_0 + r_0)$



Рис. 18: Перестройка областей возможного движения при $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < R < R_0$



Рис. 19: Перестройка областей возможного движения при $R_0 < R$

возможного движения при фиксированном значении интеграла R и возрастающем значении интеграла A. Заметим, что как и в случае изоэнергетического многообразия Q^3 , соответствующая грубая молекула имеет тот же вид A - A. Как и раньше, метка r = 0, однако при $0 < R < R_0$ ориентация цикла μ_- вблизи минимального атома A не определена. Следовательно, метка ε не определена. Тем не менее, многообразие Q_R^3 также гомеоморфно трехмерной сфере S^3 .

Рассмотрим теперь кольцевой биллиард. Перестройки областей возможного движения при всевозможных фиксированных значениях интеграла R приведены на рис. 16, 17, 18 и 19. Как и в предыдущих случаях, грубая молекула имеет вид A - A. В случае $r_0 < R < R_0$ матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$, при этом знак невозможно определить в силу неопределенности ориентации цикла μ_- . Следовательно, метка $r = \infty$, метка ε не определена. Изоинтегральное многообразие гомеоморфно произведению $S^1 \times S^2$.

В случае $R>R_0$ циклы μ имеют противоположную ориентацию. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r=\infty,$ метка $\varepsilon=1.$

При $R < r_0$ циклы μ имеют одинаковую ориентацию. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = -1$.

8 Топологические биллиарды.

Естественным обобщением плоских интегрируемых биллиардов является понятие интегрируемых топологических биллиардов, введенное В.В.Ведюшкиной в статье [1]. Первоначально оно было введено для классических биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Если рассмотреть два таких биллиарда, границы которых содержат некоторый сегмент, лежащий на одной и той же гиперболе или на одном и том же эллипсе, то области этих двух биллиардов можно склеить по этому граничному сегменту. Более того, для упрощения всегда можно полагать, что склеиваемые биллиарды расположены по одну сторону от этого сегмента. Материальная точка, двигаясь по одному биллиардному столу, после отражения от сегмента склейки продолжит движение по другому столу. В результате, топологический биллиард определяется как ориентируемое многообразие, склеенное в вышеописанном смысле из плоских интегрируемых биллиардов, принадлежащих к одному и тому же классу интегрируемости. Подробно о склейках и ограничениях на них см. работу В.В.Ведюшкиной [7].

Такая конструкция, во-первых, сохраняет интегрируемость, а с другой стороны, существенно расширяет класс интегрируемых плоских биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик (напомним, что имеется лишь конечное число неэквивалентных плоских биллиардов, см. [1]).

В нашем случае также можно воспользоваться данной конструкцией. В качестве интегрируемых элементарных биллиардов-листов, из которых будет склеен топологический биллиард, выступают биллиарды всего двух типов, рассмотренных ранее: биллиард, ограниченный одной окружностью и биллиард, ограниченный двумя окружностями. Очевидно, что полученный в результате таких склеек кусочно-плоский стол-комплекс будет гомеоморфен одному из следующих двумерных многообразий: диску, цилиндру, сфере или тору. Более того, во всех таких биллиардах можно выделить цилиндр, склеенный из колец, границы которого либо остаются ни с чем не склеенными, либо склеиваются между собой (получается тор), либо заклеиваются дисками – одним или двумя. Нам в дальнейшем будет удобно изначально работать с этим цилиндром.

Более подробно, рассмотрим несколько кольцевых биллиардных столов, занумерованных натуральными числами от 1 до n. Положим также, что любые два соседних стола имеют внешние или внутренние границы равного радиуса, и границы этой пары отождествлены друг с другом. Иными словами, склеим имеющиеся биллиардные столы по общим границам, при этом потребуем, чтобы никакие три стола не были склеены по одной границе. Полученный комплекс гомеоморфен цилиндру $[0,1] \times S^1$, а биллиардное движение на каждом столе зададим как и ранее с той лишь разницей, что при попадании материальной точки на границу одного стола, она переходит на соседний стол с той же границей и продолжает движение в нем. Построенный таким образом биллиард bC является топологическим биллиардом. Пример такого топологического биллиарда приведен на рис. 20.



Рис. 20: Топологический биллиард bC, гомеоморфный цилиндру. Изображена траектория, которая начинается на первом кольце и после ряда отражений остается на кольце с номером 4

Биллиард bC допускает те же первые интегралы A и R, то есть является интегрируемым по Лиувиллю. Заметим, что областью возможного движения при фиксированных значениях этих интегралов также является пересечение биллиардной области и области W, ограниченной окружностями радиусов R + A и |R - A|(назовем ее исходной областью возможного движения). Заметим, что область возможного движения состоит из нескольких связных частей, гомеоморфных цилиндрам. При этом прообраз каждой такой компоненты связности регулярной области возможного движения также гомеоморфен двумерному тору Лиувилля в фазовом пространстве M^4 . Доказательство этого факта может быть получено следующим образом. Необходимо разрезать торы Лиувилля, соответствующего каждому кольцу по точкам, лежащем на ребрах склейки. Эти разрезы превращают каждый тор в кольцо. Склейка колец в цилиндр склеивает эти "кольца Лиувилля" обратно в единый тор. Однако бифуркации этих торов и описывающие их 3-атомы имеют более сложный вид.

Определение 3 Пусть τ – конечная последовательность натуральных чисел. Обозначим $n = \sum \tau_i$. 3атом B_{τ} – это седловой атом, определяемый следующим способом: разрежем 2-атом B_n трансверсально на $|\tau|$ связных частей таким образом, чтобы в каждой i-ой части находилось ровно τ_i критических точек, склеим обратно эти части по местам разрезов с перекруткой (рис. 21), и на основе полученного 2-атома прямым произведением на окружность получим 3-атом. Такой 3-атом перестраивает $k = \sum_{2|i} \tau_i + 1$ торов Лиувилля в $l = \sum_{2 \nmid i} \tau_i + 1$ торов Лиувилля.



Рис. 21: 2-Атом B_{τ} для $\tau = (2, 2, 1, 1)$





Заметим, что 2-атом B_{τ} при любом τ является плоским (одним из вариантов вложения в плоскость изображен на рис. 22), а также имеет вид, изображенный на рис. 23, г.

Зафиксируем значение интеграла A. Занумеруем границы склейки биллиарда в соответствии с их принадлежностью биллиардным столам, то есть границы одного биллиардного стола должны быть занумерованны последовательными натуральными числами. Построим на плоскости (0xy) следующую ломаную (ломаная L_0 на рис. 23, а): последовательно соединим точки с координатами (i, R_i) , где R_i – радиус *i*-ой границы. Иными словами, построенная ломанная – профиль биллиарда. Отразим полученный график симметрично оси 0x(ломаная M на рис. 23, а), а также отразим относительно прямой y = A часть графика, расположенную выше этой прямой (ломаная L на рис. 23, а). Разобьем область между получившимися двумя ломаными L и M на горизонтальные отрезки и стянем каждый из них в точку. В полученном графе припишем висячим вершинам индекс A. Заметим, что остальным вершинам полученного графа соответствуют несколько локальных минимумов ломанной L и несколько локальных максимумов ломанной M при стягивании соответствующего отрезка. Пусть последовательность таких экстремумов слева направо задается последовательностью τ (τ_1 подряд идущих минимумов, затем τ_2 подряд идущих максимумов и т.д.). Пример такой последовательности для $\tau = (2, 2, 1, 1)$ изображен на рис. 23, в. Припишем такой вершине графа индекс B_{τ} .

Теорема 6 Построенный выше граф с индексированными вершинами (рис. 23, б) является грубой молекулой топологического биллиарда bC для зафиксированного уровня энергии A.

Доказательство. Заметим, что экстремумы графика L принадлежат к одному из четырех типов. Первый тип – это точки максимумы, лежащие на прямой y = A. Движение на соответствующем уровне интеграла R = 0 — это критические движения по окружностям Лармора, лежащим на разных биллиардных столах. При локальном увеличении значения интеграла эти окружности как области возможного движения расширяются в кольца (см. рис. 24, а). Следовательно, каждой такой точке соответствует атом A. Также к этому типу можно приписать максимумы ломаной L, которые изначально лежали ниже прямой y = A в профиле биллиарда. Они соответствуют выпуклым склейкам биллиардных столов вдоль окружностей, радиус которых меньше окружности Лармора. Поэтому движение в окрестности этих склеек возможно с момента касания внутренней окружностей области W (исходной области возможного движения) и окружности, соответствующей данной



Рис. 23: Построение грубой молекулы



Рис. 24: Перестройки областей возможного движения. На рис. б локально изображены два биллиардных стола, склеенных по выпуклой (внешней) границее. На рис. в изображена склейка двух столов по невыпуклой (внутренней) границе.

склейке. Дальнейшее увеличение приводит к движению сразу по двум склеенным биллиардным столам (см. рис. 24, б).

Второй тип — это точки максимума ломаной L, которые на ломаной L_0 (профиле биллиарда) были локальными минимумами. Следовательно, они соответствуют невыпуклым склейкам вдоль окружностей, радиусы которых больше значения A. Поэтому до тех пор, пока интеграл R не примет такое значение, что область W не коснется этой окружности склейки внутренним образом, движения в окрестности этой склейки нет. В момент касания возникает одна критическая окружность, которая впоследствии разрастается до области возможного движения, лежащей на двух биллиардных столах. В молекуле это также будет соответствовать атому A (см. рис. 24, в).

Третий тип критических точек графика ломаной L – это точки минимума, которые изначально лежали под прямой y = A в профиле биллиарда. Они соответствуют невыпуклым склейкам биллиардных столов, причем радиус окружности склейки этих колец меньше радиуса ларморовских окружностей. При увеличении значения R прохождение прямой y = A - R через эту точку соответствует слиянию двух колец в области возможного движения, находящихся на соседних биллиардных столах, вдоль общей невыпуклой окружности (см. рис. 25, а).

Четвертый тип критических точек графика L – это минимумы, полученные отражением максимумов ломаной L_0 . Этим максимумам соответствуют выпуклые склейки биллиардных столов друг с другом. В момент, когда область W своей внешней окружностью совпадет с окружностью этой выпуклой склейки,



Рис. 25: Перестройки областей возможного движения. На рис. а локально изображены два биллиардных стола, склеенных по невыпуклой (внутренней) границее. На рис. б изображена склейка двух столов по выпуклой (внешней) границе.

произойдет бифуркация – слияние областей возможного движения. Она соответствует прохождению прямой y = R + A через точку описываемого типа (см. рис. 25, б).



Рис. 26: Перестройки областей возможного движения. На рис. а локально изображены два биллиардных стола, склеенных по невыпуклой (внутренней) границее. На рис. б изображена склейка двух столов по выпуклой (внешней) границе.

Экстремумы графика M также делятся на два типа – минимумы и максимумы. Минимумам соответствуют выпуклые склейки биллиардных столов. При достижении соответствующего значения R внутренняя граница области W выходит на границу склейки. При дальнейшем увеличении значения R область W не пересекается с соответствующими биллиардными столами, а следовательно, движения нет. Таким образом, получили атом A (см. рис. 26, а).

Максимумам графика M соответствуют невыпуклые склейки биллиардных столов. Внутренняя граница области W достигает эту границу склейки, а область возможного движения рвется по окружности склейки (см. рис. 26, б).

Как уже было показано, висячим вершинам в полученном графе соответствуют атомы A. В случае внутренних вершин существуют две возможности: на соответствующем уровне y = const лежат k экстремумов третьего типа и l экстремумов четвертого типа ломаной L (возможен при R < A); или же на уровне y = constлежат k экстремумов четвертого типа ломаной L и l максимумов ломаной M (возможен при R > A). Заметим, что в обоих этих случаях критический слой искомого седлового атома гомеоморфен критическому слою атома B_{k+l} . Действительно, разобьем соответствующую область возможного движения на радиальные отрезки. Каждой точке таких отрезков соответствуют два вектора скорости (см. теорему 3), кроме двух точек – границ области возможного движения, и k + l точек, соответствующих критическим окружностям. В первом случае, оба вида бифуркаций, как было показано выше, являются слиянием областей возможного движения. Следовательно, в изоэнергетическом многообразии Q^3 это соответствует 3-атому B_{k+l} . Во втором случае, k критических окружностей соответствуют склейке областей возможного движения и l критическом слое, несложно убедится, что в изоэнергетическом многообразии Q^3 такая перестройка соответствует 3-атому B_{τ} (наглядно это видно на рис. 23 в, г).

Таким образом, теорема доказана.

Теперь к одной или двум свободным границам топологического биллиарда bC приклеим биллиардный стол, ограниченной окружностью подходящего радиуса. Конфигурационное пространство такого биллиарда гомеоморфно двумерному диску D^2 (биллиард bD) или двумерной сфере S^2 (биллиард bS) соответственно.

Заметим, что алгоритм вычисления грубых молекул ничем не отличается от рассмотренного случая. Действительно, единственное отличие биллиардов bD и bS от биллиарда bC заключается в появлении областей возможного движения, содержащих один или два центра дисковых биллиардных столов (т.е. гомеоморфных D^2 или S^2 соответственно). Как было доказано ранее, прообразы таких областей возможного движения также гомеоморфны двумерным торам. Следовательно, уровень y = 0 на графике 23, а не является критическим сам по себе, и следовательно грубая молекула 23, б останется прежней.

Рассмотрим теперь топологический биллиард bC и предположим, что в таком биллиарде склеено четное число столов, а свободные границы имеют одинаковый радиус. Теперь склеим эти свободные границы так, чтобы конфигурационное пространство стало гомеоморфно двумерному тору T^2 (опустим случай, при котором конфигурационное пространство гомеоморфно бутылке Клейна). Полученный топологический биллиард назовем bT.

Определение 4 Пусть τ – конечная последовательность натуральных чисел. Пусть $n = \sum \tau_i > 1$. 3атом \hat{C}_{τ} – это седловой атом, определяемый следующим способом: разрежем 2-атом C_n трансверсально на $|\tau|$ связных частей таким образом, чтобы в каждой i-ой части находилось ровно τ_i критических точек, склеим обратно эти части по местам разрезов с перекруткой (рис. 21), и на основе построенного 2-атома прямым произведением на окружность получим 3-атом. Такой 3-атом перестраивает $k = \sum_{2|i} \tau_i$ торов Лиувилля в $l = \sum_{2|i} \tau_i$ торов Лиувилля.



Рис. 27: 2-Атом \hat{C}_{τ} для $\tau = (2, 2, 1, 1)$

Алгоритм вычисления грубых молекул для биллиарда bT схож с алгоритмом для bC. А именно, зафиксируем значение интеграла A. Построим ломаные L_0 , L и M в плоскости 0xy, аналогично предыдущему случаю, и отобразим плоскость 0xy на цилиндр с образующей прямой 0y так, чтобы свободные вершины этих графиков совпадали (рис. 28,а). Иными словами, ломаная L_0 , как и ранее, является профилем биллиарда. Разобьем область между получившимися ломаными L и M на горизонтальные слои и стянем каждый из них в точку в объемлющем к цилиндру пространстве \mathbb{R}^3 . В полученном графе добавим еще однократное ребро к тем ребрам, которые соответствуют нестягиваемым на цилиндре слоям, и припишем висячим вершинам индекс A. Если вершина графа соответствует стягиваемому на цилиндре слою, припишем ей индекс \hat{B}_{τ} аналогичным образом. Если же вершина графа соответствует нестягиваемому слою, припишем ей индекс \hat{C}_{τ} по тому же правилу (рис. 28, 6).

Теорема 7 Построенный выше граф с индексированными вершинами (рис. 28, б) является грубой молекулой топологического биллиарда bT для зафиксированного уровня энергии A.

Доказательство. В случае, когда уровень y = const стягиваем на цилиндре, доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6. Пусть на уровне y = const нет минимумов и максимумов графиков L и M, при этом он нестягиваемый. В таком случае областью возможного движения является весь биллиард bT, который гомеоморфен тору. Траектория движения материальной точки является обмоткой этого тора, при этом точка движется в одном из двух направлений на его меридиане. Следовательно, в прообразе такой области возможного движения лежат два тора Лиувилля, что объясняет добавление кратного ребра.

Пусть теперь уровень y = const также нестягиваемый, но при этом на нем лежат экстремумы графиков L и M. Как и в случае биллиарда bC, существуют две возможности: на этом уровне лежат k экстремумов



Рис. 28: Построение грубой молекулы

третьего типа и l экстремумов четвертого типа ломаной L (возможен при R < A); или же на нем лежат k экстремумов четвертого типа ломаной L и l максимумов ломаной M (возможен при R > A). Заметим, что прообраз соответствующей области возможного движения гомеоморфен критическому слою 3-атома C_n . Действительно, разобьем соответствующую область возможного движения на радиальные отрезки. Полученное сечение гомеоморфно окружности на bT. При этом каждой точке этой окружности соответствует два вектора скорости, кроме k + l точек, соответствующих критическим окружностям. В первом случае, оба вида бифуркаций, как было показано выше, являются слиянием областей возможного движения в одну область, гомеоморфную тору. Следовательно, в изоэнергетическом многообразии Q^3 это соответствует 3-атому $_{k+l}$. Во втором случае, k критических окружностей соответствуют склейке областей возможного движения и l критических окружностей – их разрыву. С учетом взаимного расположения этих склеек и разрывов на критическом слое, несложно убедится, что в изоэнергетическом многообразии Q^3 такая перестройка соответствует 3-атому \hat{C}_{τ} . Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что если в молекуле появился атом \hat{C}_{τ} при $|\tau| > 1$, то в этой молекуле он единственный такого типа (все оставшиеся уровни y = const стягиваемы на цилиндре). Таким образом, любой топологический интегрируемый магнитный биллиард с ориентируемым конфигурационным пространством был описан с точки зрения грубой лиувиллевой эквивалентности.

Замечание 2 Заметим, что грубая молекула, соответствующая изоинтегральному многообразию Q_R^3 при фиксированном значении интеграла R_0 , совпадает с грубой молекулой, соответствующий изоэнергетическому многообразию Q^3 с фиксированным значением энергии $A_0 = R_0$, даже в случае топологического биллиарда. Действительно, как было замечено ранее, область возможного движения при фиксированных значениях интегралов A и R является пересечением области W, ограниченной окружностями радиусов R + A u |R - A|, и биллиарда. Таким образом, область возможного движения для значений интегралов A_1 и R_1 совпадает с областью для значений $A_2 = R_1$ и $R_2 = A_1$. Следовательно, и бифуркации областей возможного движения будут также совпадать и происходить в том же порядке, что и означает совпадение грубых молекул.

Следствие 1 Бифуркационная диаграмма топологического магнитного биллиарда состоит из отрезков прямых $R + A = R_j$ и лучей прямых $|R - A| = R_j$, лежащих в первой четверти плоскости, где R_i – радиусы границ склеек, а также из отрезка $R + A = r_i$, где r_i – радиусы свободных внутренних границ, и лучей $|R - A| = R_i$, где R_i – радиусы свободных внешних границ (рис. 29).

Доказательство. Как было показано ранее, бифуркации происходят, когда внешняя граница радиуса R + A области W или ее внутренняя граница радиуса |R - A| выходит на границу склейки радиуса R_i или на свободную границу биллиарда радиуса r_i .



Рис. 29: Бифуркационная диаграмма топологического магнитного биллиарда.

Вычислим теперь метки, соответствующие построенным грубым молекулам. Отметим, что образы критических окружностей любого атома на биллиард совпадают с границами склеек биллиардных столов. Ориентируем их по направлению скорости материальной точки. Заметим, что на атомах B_{τ} и \hat{C}_{τ} , для которых $|\tau| > 1$, существуют критические окружности, ориентации которых противоположны (рис. 30, ж). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только молекулы без таких атомов. Остальные 3-атомы разобьем на две группы: 1) минимальный атом A, атом B_k , перестраивающий (склеивающий) k+1 тор Лиувилля в один тор, и атом C_k , перестраивающий (склеивающий) k торов Лиувилля в два тора (рис. 30, а, б, в, г); 2) максимальный атом A, атом B_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в k+1 тор, и атом C_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в k+1 тор, и атом C_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в k+1 тор, и атом C_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в k+1 тор, и атом C_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в k+1 тор, и атом C_k , перестраивающий один тор Лиувилля в k+1 тор, и атом C_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в k+1 тор, и атом C_k , перестраивающий (разделяющий) два тора Лиувилля в k торов (рис. 30, д, е). Заметим, что для всех атомов первой группы критические окружности ориентированны против часовой стрелки, а для атомов второй группы они ориентированы по часовой стрелке.



Рис. 30: Ориентации критических окружностей. На рис. а, б изображена окружность Лармора и критическая окружность минимального 3-атома A. На рис. в, г, д изображена часть области возможного движения, лежащая на одном биллиардном столе, критическая окружность седлового 3-атома и касающаяся ее траектория. На рис. е изображена окружность Лармора и критическая окружность максимального 3-атома A. На рис. ж изображены две критические траектории 3-атома B_{τ} или \hat{C}_{τ} , ориентированные противоположно.

Теорема 8 Инвариант Фоменко-Цишанга топологического магнитного биллиарда имеет следующий вид: 1) грубая молекула строится по алгоритму, приведенному в теореме 6 в случае биллиардов bC, bD и bS, или алгоритму, приведенному в теореме 7 в случае биллиарда bT;

2) метка r равна нулю на всех ребрах, инцидентных атомам A, и бесконечности на остальных ребрах (и следовательно существует лишь одна семья);

3) метка ε равна +1 на всех ребрах, соединяющих два атома из одной группы либо два атома A, u - 1 в остальных случаях;

4) метка п единственной семьи равна нулю в случае биллиардов bC и bT, ± 1 в случае биллиарда bD и ± 2 в случае биллиарда bS.

Доказательство. Начнем с топологических биллиардов bC и bT. Как было отмечено ранее, образы критических окружностей любого атома совпадают с границами склейки. В случае седлового атома они гомологичны циклам λ допустимого базиса (рис. 30, в, г). При этом дополняющий его цикл μ выберем так, чтобы его образ на биллиарде лежал на одном и том же радиусе. Заметим, что если мы фиксировали радиус, то прообраз лежащих на нём точек соответствует отрезкам на плоскости или цилиндре между кривыми L и M (см. построение грубой молекулы). Фактически каждый стягиваемый в точку отрезок соответствует граничной окружности некоторого двумерного атома. Таким образом, все выбранные циклы, во-первых, действительно являются трансверсальными сечениями соответствующих трехмерных атомов, а во-вторых, для каждого выбранного 3-атома являются граничными окружностями одного и того же двумерного сечения. Так как пара циклов λ и μ одного седлового атома гомологична паре циклов λ и μ другого седлового атома, то матрица склейки на ребре, соединяющей два седловых атома, имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а

вклад в метку n на таких ребрах равен нулю. При этом, как было отмечено ранее, если эти седловые атомы принадлежат одной группе, то ориентации их циклов λ совпадают. Следовательно, метка $\varepsilon = 1$. В обратном случае метка $\varepsilon = 1$.

Для атомов A, напротив, цикл μ гомологичен критической окружности (рис. 30, а, б), а образ исчезающего цикла λ лежит на одном выбранном радиусе. Следовательно, матрица склейки на ребрах, соединяющий атом A и седловой атом, имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка r = 0 на ребрах, а вклад в метку n на таких ребрах также нулевой. Как и в прошлом случае, метка $\varepsilon = 1$, если седловой атом и атом A принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе. Случай, при котором ребро соединяет два атома A, был рассмотрен ранее для кольцевого биллиарда.

Теперь рассмотрим топологический биллиард bD. Как было отмечено ранее, этот биллиард отличается от биллиарда b появлением единственной регулярной области возможного движения (при R = A), содержащей центр дискового биллиардного стола. Найдем единственное ребро e в грубой молекуле, на котором лежит соответствующая этой области возможного движения точка. Всем остальным ребрам будут соответствовать матрицы склейки, аналогичные случаю биллиарда bC. Если ребро e соединяет два седловых атома, то как и в случае bC, циклы λ этих атомов совпадают с точностью до ориентации. Чтобы найти соотношение на циклы μ , воспользуемся циклом γ , аналогичным случаю обычного кругового биллиарда (см. рис. 12). Таким образом, матрица склейки на ребре e имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ (-1)^i & \mp 1 \end{pmatrix}$, где $i \in 0, 1$. Следовательно, метка $r = \infty$,

а вклад в метку n равен ± 1 (в зависимости от ориентации Q^3 , она влияет на значение i). При этом, как и ранее, метка $\varepsilon = 1$, если седловые атомы принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе.

Если же ребро *е* соединяет седловой атом с атомом *A*, то используя тот же цикл γ можно показать, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & (-1)^i \end{pmatrix}$. Следовательно, метка r = 0, а вклад в метку *n* также равен ± 1 . Как и ранее, метка $\varepsilon = 1$, если седловой атом и атом *A* принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе. Случай, когда ребро *e* соединяет два атома *A*, был рассмотрен для кругового биллиарда.

Наконец, рассмотрим биллиард bS. Рассмотрим область возможного движения, соответствующей случаю R = A. Тогда либо в этой области существуют две компоненты связности, каждая из которых содержит один центр дискового стола, либо эта область состоит из одной, гомеоморфной сфере, компоненты связности и содержит сразу оба центра.

В первом случае возникает два ребра в грубой молекуле, аналогичных ребру e для биллиарда bD. Следовательно, метки r и ε на таких ребрах совпадают с метками на ребре e. Вклад каждого такого ребра в мерку n равен ± 1 . Можно показать, что при правильном выборе ориентации Q^3 все описанные выше вклады в метку n становятся положительными. То есть оба этих вклада нужно брать с одним и тем же знаком.

Во втором случае вспомогательный цикл γ устроен немного иначе. А именно, его образ на биллиарде состоит из двух частей, совпадающих с образами старого цикла γ , лежащих на двух дисковых биллиардных

столах. Таким образом, матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 2(-1)^i & \mp 1 \end{pmatrix}$ для ребра, соединяющего седловые

атомы, и $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 2(-1)^i \end{pmatrix}$ для ребра, соединяющего седловой атом и атом A. Метки r и ε аналогичны меткам

биллиарда bD, а вклад такого ребра в метку n равен ± 2 . Теорема доказана.

теорема доказана

Список литературы

- [1] Фокичева В. В., Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176.
- M. Bialy, A. E. Mironov, "Algebraic non-integrability of magnetic billiards", J. Phys. A, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.
- [3] В. В. Ведюшкина, "Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов", Матем. сб., 210:3 (2019), 17–74
- [4] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.
- [5] Е. А. Кудрявцева, А. А. Ошемков, "Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения", Чебышевский сб., 21:2 (2020), 244–265
- [6] M. Robnik, M. V. Berry, "Classical billiards in magnetic fields", J. Phys. A, 18:9 (1985), 1361–1378.
- [7] В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко, "Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы", Изв. РАН. Сер. матем., 81:4 (2017), 20–67