

Реализация меченых окрестностей многообразий Зейферта бильярдами

В.В.Ведюшкина

МГУ имени М.В.Ломоносова

1 Введение

Недавно было доказано несколько различных формулировок знаменитой гипотезы Биркгофа о бильярдах: полиномиальная версия [1, 2], локальная версия для гладких кривых на плоскости, близких к эллипсу [3], версия для бильярдов в постоянном магнитном поле на плоскости [4] и на сфере/плоскости Лобачевского [5]. В них обсуждается критерий интегрируемости (в одном из выбранных смыслов) бильярда, принадлежащего некоторому классу.

Например, в полиномиальной версии данной гипотезы изучается критерий наличия у бильярда с энергией $H = v_x^2 + v_y^2$ первого интеграла, полиномиального по компонентам импульса. Данный вопрос ставится для бильярдов на столах с C^2 -кусочно гладкой границей (являющейся замкнутой кривой) односвязной компактной области на плоскости или в односвязном пространстве постоянной кривизны. Ограничимся здесь и далее случаем плоской метрики.

Согласно недавнему результату Глущока [1, 2] (основанному, в том числе на конструкциях М.Бялого и А.Е.Миронова [6]) для указанного класса бильярдов, условие принадлежности гладких дуг границы стола семейству софокусных квадрик (или концентрических окружностей и их радиусов) является не только достаточным, но и необходимым для наличия полиномиального по импульсам интеграла. Предполагается, что хотя бы одна дуга границы не является прямолинейным отрезком, т.е. стол не является многоугольником. Тем самым, в указанном классе систем подклассы софокусных бильярдов (вместе с круговыми бильярдами) и полиномиально интегрируемых бильярдов практически совпадают.

При изучении интегрируемых систем гладких и вещественно-аналитических систем нашли широкое применение методы теории Морса (отметим известную работу С.Смейла [7] для гамильтоновых систем с симметриями) и их аналог в интегрируемом подслучае — теория топологической классификации интегрируемых систем с интегралами Морса-Ботта, развитая в работах А.Т.Фоменко, его учеников и соавторов, см. [8, 9, 10, 11] и, подробнее, монографию []. Инвариантом системы на неособом 3-уровне энергии является граф с метками (инвариант Фоменко–Цишанга), вершины которого соответствуют особенностям слоения, а ребра — семействам регулярных торов Лиувилля. Данный подход был применен ко многим системам механики, математической физики и геометрии, и позволил обнаружить многочисленные

Данная теория построена для интегрируемых гамильтоновых систем, заданных на гладком или вещественно-аналитическом симплектическом многообразии. Системы бильярда, вообще говоря, являются лишь кусочно-гладкими. Важные результаты о гамильтоновом сглаживании, т.е. возможности ввести гладкую и симплектическую структуру в прообразе окрестности границы стола, были получены в работах [13, 14]. Вместе с тем, в обсуждаемом классе бильярдных книжек (столов-комплексов с перестановками) могут присутствовать т.н. невыпуклые склейки, и для особенностей в их прообразе такой вопрос пока открыт.

1.1 Топология слоений Лиувилля элементарны софокусных бильярдов

Для широкого класса интегрируемых бильярдов был вычислен аналог топологических инвариантов Фоменко–Цишанга (как оказалось, он корректно определен). В.Драговичем и М.Раднович [15] и В.В.Ведюшкиной [16, 17] это было сделано для плоских софокусных бильярдов (ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также отрезками их двух осей симметрии) в компактных областях, все углы излома которых равны $\pi/2$. Инварианты таких областей принимают лишь конечное число разных значений.

Напомним, что движение частицы в таком бильярде обладает первым интегралом. Зафиксировав $0 < b < a$, запишем семейство плоских кривых

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (b - \lambda)(a - \lambda). \quad (1)$$

Данное соотношение задает семейство софокусных эллипсов (при $\lambda < b$) и гипербол (при $b < \lambda < a$). Значения $\lambda = b$ и $\lambda = a$ особые — им соответствуют пары совпадающих прямых, образы которых — фокальная прямая $y = 0$ и предельная гипербола $x = 0$ соответственно. Значения a, b задают квадраты длин полуосей эллипса $\lambda = 0$ и положение на оси Ox фокусов, левого F_1 и правого F_2 , этого семейства.

Интегралом является, например, функция Λ , значение которой в точке (x, y, v_x, v_y) равно параметру λ софокусной квадрики — каустики траектории, проходящей через точку $(x, y) \in \Omega$ в направлении вектора (v_x, v_y) . Каустика касается каждого звена этой траектории или его продолжения. Интегрируемость бильярда внутри эллипса была отмечена Дж.Биркгофом [18], а для столов с кусочно-гладкой границей, дуги которой лежат на квадриках семейства (1), данный факт указан в книге [19]. Укажем явный вид бильярдного интеграла Λ :

$$\Lambda = \frac{-(xv_y - yv_x)^2 + bv_x^2 + av_y^2}{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2)$$

Отметим, что интеграл $H \cdot \Lambda$ является полиномиальным по компонентам импульса, причем имеет малую степень, равную двум.

Фиксируем в семействе софокусных квадрик (1) некоторый эллипс e_0 и некоторую гиперболу h_0 . Ветви этой гиперболы делят стол, ограниченный эллипсом на три области: Рассмотрим следующие плоские интегрируемые бильярды, см. рис. 1):

- “левую” область типа A_1 (экземпляры этой области далее обозначим a_i),
- симметричную ей относительно Oy “правую” область типа A_1 (ее экземпляры далее обозначены c_i),
- и область типа A_0 между ними, т.е. ограниченную двумя дугами эллипса e_0 и двумя дугами ветвей гиперболы h_0 . Ее далее обозначим b .

На множестве элементарных бильярдов можно ввести естественное отношение эквивалентности, которое, как было показано ранее [20], сохраняет слоение Лиувилля. Нестрого говоря, два бильярда называются эквивалентными, если один получается из другого изометрией плоскости или же изменением параметров границ так, чтобы изменяемые дуги границ во время деформации не меняли бы своего типа. Определение запрещает сегменту изменяемой границы менять свой тип, то есть сегменты во время деформации остаются либо эллиптическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(-\infty, b)$), либо гиперболическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(b, a]$), либо все время лежат на фокальной прямой (во все время деформации параметр остается равным b). При этом повторим, что мы предполагаем что все эллипсы и гиперболы принадлежат одному семейству (1) софокусных квадрик с параметрами $0 < b < a$. Примеры элементарных бильярдов различных классов, необходимых в настоящей работе изображены на рис. 1. Их обозначения совпадают с теми, которые даны в статье [20].

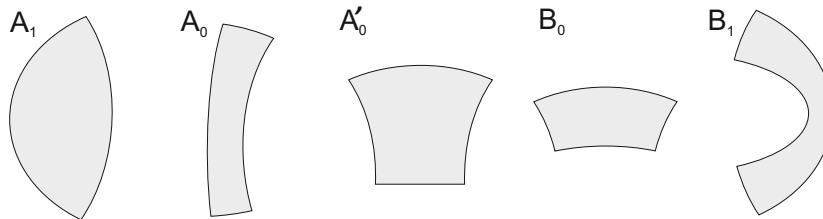


Рис. 1: Плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

1.2 Обобщения плоских интегрируемых бильярдов

Описанный выше класс плоских элементарных софокусных бильярдов может быть расширен несколькими способами (например, изменением метрики на столе, добавление магнитного поля или добавление потенциала в гамильтониан). Вопрос об интегрируемости таких обобщений классических софокусных и круговых

бильярдов исследовался, например, В.Драговичем [21, 22] и В.В.Козловым [23] для случая бильярдов с потенциалом, а в случае бильярдов в постоянном магнитном поле А.Е.Мироновым и М.Бялым был получен “почти критерий” интегрируемости бильярда в односвязной компактной области плоскости [4], а также в сферы или плоскости Лобачевского [5]. Еще один класс таких бильярдов, у которых частица при ударе о границу “проскальзывает” вдоль нее на определенное расстояние, границы предложенный А.Т.Фоменко в работе [24], обсудим более подробно ниже

Топологические свойства таких бильярдов изучались В.Драговичем и М.Раднович [25] для бильярда в эллипсе при добавлении потенциала Гаука или введении метрики Минковского (отметим, что комбинация этих обобщений была недавно изучена В.В.Ведюшкиной совместно с Скворцовым [26]), С.Е.Пустовойтовым [27, 28], И.Ф.Кобцевым [29], Е.Е.Каргиновой [30, 31]. Случаи геодезических потоков и бильярдных на двумерных поверхностях к \mathbb{R}^3 и в ограниченных ими трехмерных софокусных областях изучались В.Драговичем и М.Раднович [32], Г.В.Белозеровым [33, 34], И.С.Кобцевым [35] для поверхности эллипсоида с потенциалом Гаука.

Принципиально новый подход к расширению их класса был предложен В.В.Ведюшкиной: два или более плоские столы можно склеить по изометричной склейке их соответствующих граничных дуг. Получаемые таким образом ориентируемые двумерные столы-многообразия (топологические бильярды [20, 36, 37]) и столы-комплексы с перестановками на ребрах (бильярдные книжки, см. [38]) проецируются на плоскость, так что образами 1-клеток — гладких дуг склейки или границы стола и границами соответствующих 2-клеток — являются дуги софокусных квадрик. Выполняющееся в каждой вершине условие коммутирования опишем чуть ниже.

При этом сохраняется интегрируемость бильярдных: вблизи точки удара о границу-склейку, проекция продолжения траектории на плоскость на плоскость является либо лежит на той же прямой, что предыдущее звено траектории (т.е. имеет ту же каустику — значение бильярдного интеграла), либо лежит на прямой, получаемой по стандартному закону отражения.

Замечание 1 *Формально говоря, стол A_2 , ограниченный эллипсом, и склеенный из t таких столов комплекс $t(A_2)$ не являются клеточными: множество склейки гомеоморфно окружности. Каждую такую клетку можно разбить на две или четыре (скажем, полуосями эллипса), но на ход рассуждения это не влияет, а на поведение траекторий и топологию слоений Лиувилля это не влияет. Для простоты описания, будем далее говорить о таких столах как о книжках, склеенных из t плоских столов типа A_2 .*

В вершинах комплекса, т.е. 0-клетках книжки, должно быть выполнено условие коммутирования следующих перестановок. Спроецируем комплекс на плоскость, и рассмотрим перестановки, приписанные дугам двух пересекающихся квадрик в проколотой окрестности данной точки. Эти две перестановки σ_1 и σ_2 должны коммутировать. Такое условие означает, можно корректно определить траекторию шара, попадающую в вершину (0-клетку): с листа под номером i шар переходит на лист под номером

$$\sigma_1(\sigma_2(i)) = \sigma_2(\sigma_1(i)).$$

Тем самым движение остается непрерывным в окрестности траектории, трансверсально пересекающей обе квадрики семейства (1), проходящие через данную точку.

Замечание 2 *Плоский бильярд с углом $3\pi/2$ при вершине можно понимать как “некорректную” книжку с некоммутирующими перестановками (1)(23) и (3)(12). Цифрами 1, 2 и 3 обозначены листы, пересекающиеся с малой окрестностью такой точки. Такие системы и топология их слоений обсуждаются, например, в работах [39, 40, 41, 42].*

1.3 Гипотеза Фоменко об интегрируемых бильярдах и системах

Класс бильярдных книжек оказался весьма богатым с точки зрения топологии их слоений Лиувилля. Вопрос о том, насколько широк класс слоений Лиувилля, встречающихся в бильярдах, составляет предмет гипотезы А.Т.Фоменко о бильярдах. Она была сформулирована в работе [43] и предполагает, что среди слоений интегрируемых бильярдных (в ограничении на неособый уровень Q^3) встречаются

- A:** произвольный боттовский 3-атом, т.е. невырожденная особенность ранга 1 интегрируемой системы с 2 степенями свободы, ограниченной на Q^3 без точек $dH = 0$;
- B:** произвольный класс базы слоения Лиувилля интегрируемых систем с боттовскими особенностями на Q^3 вместе с ее поднятием слоения в окрестности любой точки базы (граф, вершинам которого сопоставлены 3-атомы);
- C:** произвольный класс лиувиллевой эквивалентности таких систем на неособом Q^3 (послойной гомеоморфности их слоений Лиувилля с учетом направлений на особых окружностях);
- D:** произвольный класс гомеоморфности 3-многообразий, могущих быть неособыми изоэнергетическими многообразиями таких интегрируемых систем.

Иначе говоря, данная система предполагает, что с топологической точки зрения класс интегрируемых бильярдов на самом деле “не уже”, чем класс интегрируемых гамильтоновых систем. Пункт *C* ставит этот вопрос для наиболее тонкой эквивалентности: лиувиллевой эквивалентности. Пункты *B* и *D* предполагают то же для грубой лиувиллевой эквивалентности (гомеоморфности баз) и до гомеоморфности самих слоений — т.е. являются необходимыми условиями пункта *C*.

Замечание 3 *Отметим, что разделы B и D не следуют один из другого. Примерами служат линзовые пространства $L(k, n)$, попарно негомеоморфные для разных k/n и задаваемые, например, как склейка Q^3 из двух расслоенных полноторий (т.е. слоение с базой $A - A$). Наличие вырожденных особенностей ранга 1 во многих интегрируемых системах из приложений [12, 44] (например, каспидальных особенностей или эллиптических, гиперболических виллок в системах механики) дает большой набор слоений с разными базами, заданных на гомеоморфных Q^3 .*

Разделы *A* и *B* полностью доказаны В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой в работах [38] и [45] соответственно. Ответ на гипотезы *C* и *D* в полной мере пока неясен, но получены существенные продвижения. Реализовав бильярдами [46] произвольные связанные суммы линзовых пространств $L(k_i, n_i)$ и произведений $S^1 \times S^2$, В.В.Ведюшкиной удалось доказать, что среди классов гомеоморфности Q^3 бильярда встречаются многообразия Вальдхаузена, не являющиеся многообразиями Зейферта, например, связанная сумма трех проективных пространств $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$. Корректность гипотезы *D* доказана И.С.Харчевой [47]: Q^3 бильярдной книжки гомеоморфно компактному трехмерному многообразию (хотя стол двумерным многообразием может не являться).

При изучении гипотезы *C* удалось реализовать бильярдами широкий класс слоений Лиувилля, встречающихся прежде в различных интегрируемых системах из приложений: систем динамики твердого тела [48, 49], интегрируемых геодезических потоков на ориентируемых двумерных поверхностях [50, 51] и, с помощью бильярдов с проскальзыванием, примеры таких систем на неориентируемых поверхностях [24].

Замечание 4 *Отметим, что инварианты топологических бильярдов и простейших бильярдных книжках содержали только “стандартные” значения числовых меток: рациональную метку $r = p/q \pmod 1$, равную $0, 1/2, \infty$ и целочисленную метку $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Те же значения меток встречались ранее и в системах из механики и математической физики.*

1.4 Локальная версия гипотезы Фоменко о реализации меток и меченых окрестностей

Вместе с пунктом *A* гипотезы Фоменко о бильярдах, возможность реализовать произвольную числовую метку означала бы реализуемость каждого элемента, составляющего граф-инвариант Фоменко–Цишанга (реализация любого такого графа с метками означает истинность раздела *C* гипотезы). Вопрос об этом, вместе с возможностью реализовать слоение (базу и метки) “локально”, т.е. в окрестностях некоторых частей инварианта Фоменко–Цишанга, составил локальную версию гипотезы А.Т.Фоменко, сформулированную в [52]. Напомним, что

- метка $r \in \mathbb{Q} \bmod 1$, равная $r = p/q$ для неотрицательных $0 \leq p < q$ или $r = \infty$ при $q = 0$. Эта метка описывает “скрученность” относительно друг друга слоев расслоений Зейферта двух склеиваемых 3-атомов;
- метка $\varepsilon = \pm 1$. В ряде случаев, как при склейке $S^1 \times S^2$ из двух расслоенных полноторий, т.е. минимального и максимального атомов A , она определяет направление гамильтонова векторного поля $v = \text{sgrad } H$ на критических окружностях — осях двух полноторий;
- метка $n \in \mathbb{Z}$ ставится на “семьях” — некоторых связных подграфах инварианта Фоменко–Цишанга, состоящих из вершин с седловыми атомами V_i и всех ребер их соединяющих. Прообраз такого подграфа должен образовывать единое расслоение Зейферта с нестягиваемым в Q^3 слоем. Критические окружности всех седловых атомов V_i семьи либо гомологичны слою этого расслоения, либо являются его особыми слоями и имеют типа $(2,1)$ в силу боттовости интегрируемой системы. В терминах инварианта это означает, что метки $r = \infty$ на всех внутренних ребрах подграфа и отличны от $r = \infty$ на всех внешних. Повторим, что минимальные и максимальные 3-атомы A в такой подграф не входят: метка $r = \infty$ на ребре $A - V_i$ означает гомологичность слоя атома V_i и стягиваемого цикла A , т.е. стягиваемость цикла расслоения Зейферта. Метка $n \in \mathbb{Z}$ для замкнутых 3-многообразий Зейферта имеет смысл класса Эйлера.

Там же был приведен ответ на ее базовые пункты: о реализации произвольной пары меток r, ε на некотором ребре молекулы и произвольного значения n на некоторой семье. В основе этого результата [51, 53, 54] и его дальнейших обобщений [55] лежит построение “более сложных” бильярдных книжек. Новые серии таких книжек обсуждаются и в настоящей работе.

Приведем ниже формулировку локальной гипотезы Фоменко о бильярдах.

Локальная гипотеза о бильярдах (А.Т.Фоменко). Подмножества инварианта Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля интегрируемой гамильтоновой системы с 2 степенями свободы с боттовским интегралом на неособом Q^3 реализуется как подмножество инварианта Фоменко–Цишанга некоторого интегрируемого бильярда:

1. (числовой инвариант на ребре графа) выбранная пара меток (r, ε) , реализуемая на каком-то ребре инварианта бильярда;
2. (полный инвариант слоения над замыканием ребра — усиление пункта 1) выбранная пара меток (r, ε) на ребре между двумя выбранными атомами;
3. (числовой инвариант “семьи”) выбранная метка n , реализуемая на какой-то семье инварианта бильярда;
4. (усиление пункта 3) выбранная метка n на выбранной семье S ;
5. (меченая окрестность “семьи”) выбранная “семья” S с выбранной меткой n на ней и выбранными реберными инвариантами (r, ε) на ее внешних ребрах;
6. (меченая окрестность ребра, соединяющего две “семьи”). Две “семьи” S_1 и S_2 (с метками n_1 и n_2 на них), выбранные граничные торы которых соединены ребром с любым выбранным реберным инвариантом (r, ε) .

Пункт 1 локальной гипотезы доказан. А именно, любая пара меток r, ε реализуется подходящим бильярдом. Пункт 2, т.е. реализация фиксированной пары меток на ребре с фиксированными концами, пока доказан частично. Подробнее этом см. [53]. Например, в работе [51] В.В.Ведошкиной были построены слоения с инвариантами, некоторые r метки которых равны k/n для произвольных натуральных $0 < k < n$. С помощью построенных книжек были, в частности, промоделированы интегрируемые геодезические потоки на торе с конечнолистно-лиувиллевой метрикой (подробнее о них [12, т.2, главы 2-3]).

Пункт 3 также полностью доказан. Построенные В.В.Ведошкиной и В.А.Кибкало [54] серии книжек Ω_k для $k \in \mathbb{N}$ реализуют примеры слоений Лиувилля, содержащих семью с меткой $n = k$. Более подробно опишем ее ниже в разделе 2.1. Тем самым, значение этой метки не является препятствием (само по себе)

для реализации слоения билиардом. Тем не менее, сложность построенной семьи 6 и ее валентность (т.е. количество особых окружностей 3-атомов семьи и количество внешних ребер подграфа, т.е. граничных торов расслоения Зейферта) линейно зависели от k .

При изучении пункта 4 В.В.Ведюшкиной удалось показать [55], что любая семья, все 3-атомы которой не имеют звездочек (т.е. в расслоении Зейферта нет особых слоев), реализуется подходящим билиардом. Для этого серия книжек из работы [52] (устроенных “проще” чем книжки Ω_k) были модифицированы путем вклейки некоторой книжки, склеенной из бесфокусных областей. Все области имеют тип A_0 , а их склейка получается небольшой адаптацией алгоритма реализации баз слоения Лиувилля, построенный В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой [45].

В настоящей работе удалось совместить результаты, полученные при реализации пунктов 1 и 3. Полученный набор примеров весьма интересен в контексте наиболее общих пунктов 5 и 6 локальной гипотезы, посвященных реализации меченых окрестностей семьи и ребра: в полученных инвариантах есть пара ребер и соединяющее их ребро, такое что

- семья и ее внешнее ребро оснащены произвольной меткой $n = -k$ и рациональной меткой r с произвольным знаменателем m соответственно (пункт 5);
- одна и та же семья имеет на внешних ребрах разные и “нетривиальные” значения рациональной метки: $r = 2/m$ и $r = -1/m$ (пункт 5);
- две семьи с ненулевыми метками $n = -2$ и $n = -k$ соединены ребром с нетривиальной r -меткой, равной $-1/m$ (пункт 6);
- две семьи одного и того же инварианта имеют разные наборы меток r на своих внешних ребрах: метка $r = -2/m$ на ребре между ними, и метки $r = 1/m$ на внешних ребрах одной из них и $r = 0$ на внешних ребрах другой (комбинация нескольких “локальных” слоений в одном “глобальном”).

Другая серия примеров, основанная на дальнейшем расширении класса билиардов с проскальзыванием на класс билиардных книжек, реализует нетривиальный пример рациональных меток, числитель которых отличен от нуля или ± 1 и равен $1 - m$. Этот пример свидетельствует в пользу возможности дальнейшего расширения класса слоений, реализуемых билиардами с проскальзыванием. Их исследование планируется продолжить.

2 Реализация наборов меток в подграфе инварианта Фоменко–Цишанга

Вначале рассмотрим вспомогательное утверждение, представляющее однако самостоятельный интерес. Склеим билиардную книжку из m дисков, ограниченных фиксированным эллипсом (т.е. m столов элементарного билиарда A_2). На кривой склейки при этом стоит перестановка $(1, \dots, m)$. Обозначим эту билиардную книжку через $\mathbb{B}(A_2)_m$.

Утверждение 1 *Рассмотрим билиардную книжку, склеенную из m дисков, ограниченных фиксированным эллипсом (при этом натуральное $m > 2$). На единственном корешке стоит циклическая перестановка из m элементов. Тогда инвариант Фоменко–Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности такой книжки в случае нечётного m изображен на рисунке 3а), а в случае чётного – 3б)*

Замечание 5 *Фазовое пространство билиарда является четырехмерным и описывается в виде пар (x, v) , где x – точка билиардной области-стола, а v вектор скорости материальной точки в ней. Фиксируем ненулевую длину вектора скорости, полагая её без ограничения общности равной единице. Тогда систем описывается на изоэнергетической трехмерной поверхности, которую обозначим через Q^3 . Определим проекцию h этой поверхности (а также линий уровня функции Λ в ней) на билиардный стол следующей формулой: $h(x, v) = x$.*

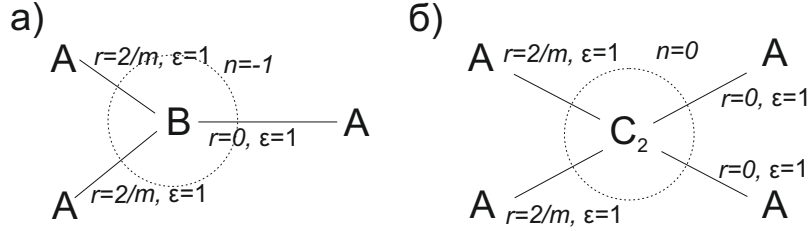


Рис. 2: Инварианты Фоменко-Цишанга, описывающие слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности бильярдной книжки $\mathbb{B}(A_2)_m = mA_2$, склеенной из m дисков, ограниченных фиксированным эллипсом.

Доказательство. Шаг первый. Вычисление грубой молекулы.

1. Пользуясь методами изложенными, например в работах [17, 20], легко показать, что все слои Λ за исключением слоёв соответствующих значениям $0, b, a$ гомеоморфны несвязному объединению торов.

2. Пусть $\Lambda = \lambda < b$. В этом случае траектории, лежащие на уровне λ касаются эллипса с этим параметром (обозначим его через e_λ). Все они естественным образом разбиваются на два класса: те, что закручиваются по часовой стрелке и те, что закручиваются в противоположном направлении относительно эллипса e_λ .

Фиксируем теперь направление обхода. Рассмотрим прообраз h^{-1} точек бильярдной книжки, лежащих вне эллипса e_λ . Фиксируем лист книжки. Проекция слоя попадает в кольцо между границей листа и эллипсом e_λ . В прообразе каждой внутренней точки этого кольца лежат две точки слоя, различающиеся направлением вектора v : направленными “к” эллипсу e_λ и “от” него. В прообразе точек эллипса e_λ эти два кольца из прообраза отождествляются. Таким образом, в прообразе внутренности каждого листа книжки в слое $0 < \lambda < b$ лежит цилиндр. (в отличие от плоского бильярда, отражение от границы такого листа-стола было заменено на склейку нескольких листов).

Теперь опишем склейку их границ над внешней границей эллипса в прообразе всей книжки лежит результат последовательной склейки этих цилиндров вдоль граничных окружностей. В результате получим, что эта часть слоя является двумерным тором, а целиком слой состоит из двух торов (отвечающих траекториям по и против часовой стрелки). Аналогично можно рассмотреть слои соответствующие значениям $\lambda > b$.

3. Рассмотрим теперь слои $\Lambda = 0$ и $\Lambda = a$. Эти слои отвечают вырожденным движениям-окружностям. В первом случае это два движения по корешку книжки (по и против часовой стрелки). Во втором случае – это движения вдоль вырожденной гиперболы – оси Oy . Поэтому в изоэнергетической поверхности Q^3 окрестности этих слоев описываются 3-атомами A .

4. Перейдем к изучению седлового атома при λ , близких к b . Рассмотрим предел двух торов Лиувилля, которые соответствовали уровню $\Lambda < b$. Эллипс e_λ при этом вырождается в отрезок между фокусами. Траектории будут последовательно проходить через фокусы семейства квадрик (1). Фиксируем семейство торов Лиувилля, траектории которых обходили вокруг эллипса e_λ по часовой стрелке. На этих торах рассмотрим прообразы эллипса e_λ . Эти прообразы являются гомологичными циклами на этом торе.

При $\Lambda = b$ эти циклы проектируются на бильярдную книжку в отрезок между фокусами. Точки (x, v) этих циклов принадлежат к объединению U_b следующих трех множеств:

- точки $x = F_1, v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $\varphi \in [0, \pi]$,
- второе – это точки $x \in [F_1, F_2], v = (\pm 1, 0)$,
- третье – это точки $x = F_2, v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $\varphi \in [\pi, 2\pi]$.

Множество точек U_b по прежнему гомеоморфно окружности. Отсюда тором T^2 является и предел (при $\lambda \lim b$) торов Лиувилля, отвечающих траекториям на близких неособых слоях $\lambda = b - \varepsilon$, закручивающимся по часовой стрелке.

Замечание 6 Подчеркнем, что при $\lambda = b$ точка фокуса оснащена целой окружностью векторов (а при других λ ее прообраз пуст). Поэтому важно явно указать, через какой из них пройдет предел цикла на торе $\lambda - \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Аналогично можно рассмотреть предел торов, отвечающих траекториям, закручивающихся против часовой стрелки. Как устроено множество общих точек у предельных торов. Это в точности критические траектории, проходящие по фокальной прямой. В зависимости от четности m их либо одна (если m нечетно), либо две (если m четно). На предельных торах эти траектории изображаются нетривиальными циклами (гомологичными в случае четного m). Склейка двух торов по циклам приводит к образованию особого слоя либо 3-атома B (если траектория одна), либо 3-атома C_2 (если траекторий две).

Шаг второй. Вычисление меток.

1. Напомним, что числовые метки инвариантов Фоменко–Цишанга определяются на основе диффеоморфизмов граничных торов 3-атомов, соединенных семейством регулярных торов. Каждому ребру графа сопоставляется такой такой диффеоморфизм, задаваемый матрицей склейки — матрицей 2×2 над \mathbb{Z} с определителем -1 . Эта матрица является матрицей перехода между базисами в $\pi_1(T_i^2)$ из специального класса базисов на склеиваемых 2-торах. Такие базисы состоят из двух циклов λ, μ , из которых цикл λ определен однозначно с точностью до знака. Для седловых атомов их направление также фиксировано: оно совпадает с ориентацией критических окружностей 3-атома.

А именно, циклы λ на граничных торах седловых атомов выбираются гомотопными слоям расслоения Зейферта, т.е. критическим окружностям. Они определены однозначно, причем их ориентация обязана совпадать с ориентацией критических окружностей. Дополняющие их циклы μ выбираются неоднозначно, но все они должны лежать на граничных окружностях трансверсального критической окружности сечения — 2-атома. Отметим, что набор μ циклов на всех граничных торах данного седлового 3-атома не произволен: все эти циклы должны вместе образовывать единое сечение (продолжаться внутрь 3-многообразия Зейферта с его границы).

Циклы λ на граничных торах минимаксных атомов A однозначно выбираются как стягиваемые в точку внутри атомов-полноторий. Несмотря на то что сами по себе дополняющие их циклы μ выбираются неоднозначно, на них тем не менее можно однозначно определить ориентацию. Дело в том, что при стремлении тора критическому слою-окружности атома A (т.е. стягивании полнотория на его ось), эти циклы биективно отображаются на критическую окружность-траекторию. Ее направление и задает искомую ориентацию.

2. Для наглядного представления цикла на граничном торе в нашем случае будем изображать проекцию этого цикла на бильярдный стол. Для восстановления цикла необходимо рассмотреть прообраз этой кривой на торе. Этот прообраз может быть несвязен. В этом случае мы либо в качестве цикла берем любую компоненту связности или либо ту, которая соответствует указанным на рисунке векторам скорости (например, направленным вправо или вверх).

Проекция циклов на листы бильярдной книжки изображены на рис. 3. На рис. 3а) изображены проекции циклов на граничных торах атомов A . На рисунке 3б) изображены проекции циклов на граничных торах седловых атомов, относящихся к уровню интеграла $\Lambda < b$. При этом проекция цикла λ в случае четного m проходят только по черным линиям.

На рисунке 3в) изображены проекции циклов на граничных торах седловых атомов, относящихся к уровню интеграла $\Lambda > b$. В этом случае цикл λ в случае четного m проходит сверху вниз на нечетных листах и снизу вверх на четных (и не проходит по направлению серых стрелок). На первом листе книжки в случае четного и нечетного m циклы μ выбраны одинаково, однако на других листах они различаются (см. подробнее рисунок).

3. Ориентируем все ребра к седловому атому (т.е. матрица выражает базис на его граничном торе через базис на склеиваемом с ним торе минимального или максимального атома A . Случаи четного и нечетного m разберем отдельно.

Пусть $m = 2k + 1$ нечетно. Тогда матрица склейки на нижних ребрах имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 2k + 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, а на верхнем $\begin{pmatrix} 2k + 1 & 1 \\ -2k & -1 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $2 \left[-\frac{k}{2k+1} \right] + \left[-\frac{-1}{1} \right] = -1$.

Пусть $m = 2k$ четно. Тогда матрица склейки на нижних ребрах имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & k-1 \end{pmatrix}$, а на верхних $\begin{pmatrix} k & 1 \\ -k+1 & -1 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $2 \left[-\frac{k-1}{k} \right] + \left[-\frac{-1}{1} \right] = 0$.
 Утверждение доказано.

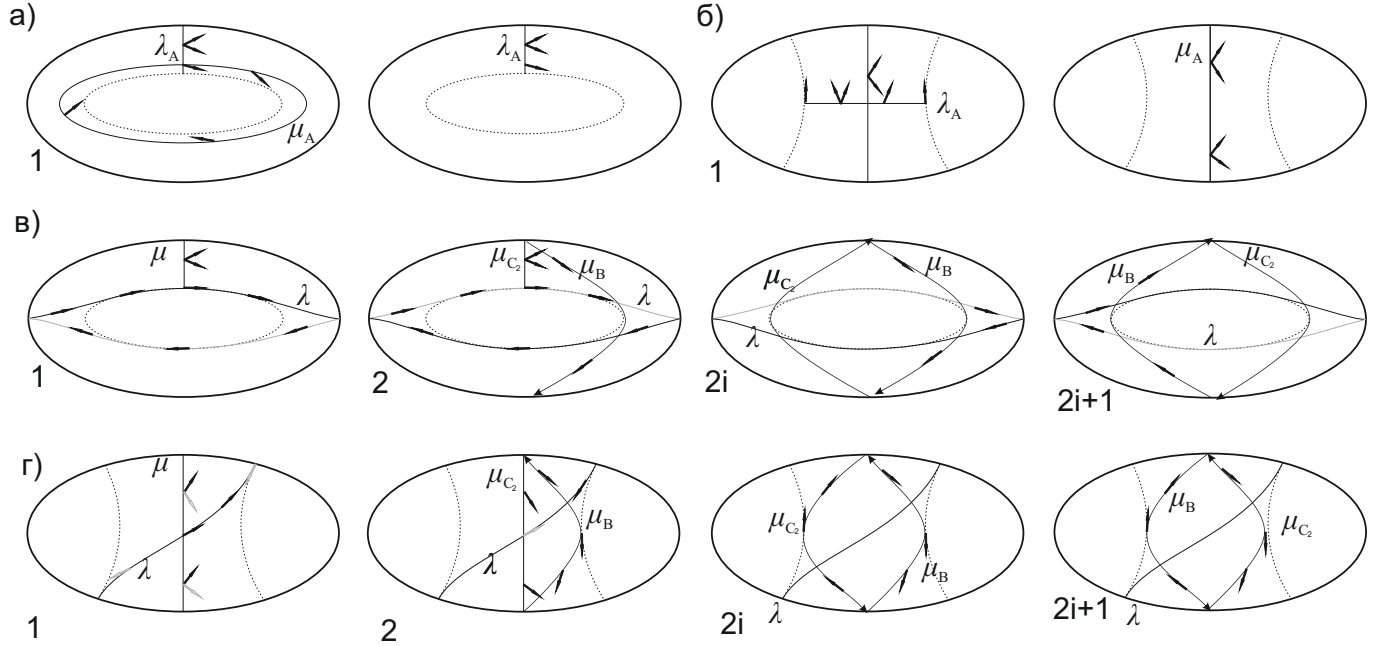


Рис. 3: Проекция циклов на бильярд.

■

Замечание 7 *Случаи $m = 1$ и $m = 2$ отвечают плоскому бильярду в эллипсе и топологическому бильярду, склеенному из двух дисков. В этих случаях грубые молекулы имеют указанный в теореме вид, однако все метки r равны нулю. Приведенные матрицы склейки будут иметь приведенный вид, однако вычисленные по ним метки будут иными.*

Замечание 8 *Центральную роль в основной теореме 2 играют описанные при доказательстве утверждения 1 циклы μ для седловых атомов книжки, склеенной из n областей A_2 . Их вид ранее был неочевиден. Как ожидается, это позволит существенно продвинуться в описании инвариантов для книжек, склеенных из областей A_1 по коммутирующим перестановкам σ и ω на ребрах в прообразе эллиптической и гиперболической дуг границы стола A_1 . Напомним, что в работе [55] такие связанные столы были перечислены, а при условии малого количества дуг границы и “простых” перестановок σ и ω были также вычислены инварианты Фоменко–Цишанга.*

2.1 Реализация примеров меченых окрестностей семьи с метками r и n

Элементарная область, ограниченная эллипсом семейства (1), в работах [17, 20] была обозначена A_2 . Ее разрезание по одной из дуг гиперболы семейства (1) образует две элементарные области типа A_1 , а по обеим

ее дугам — область типа A_0 и две симметричные области типа A_1 . Области A_i содержат отрезок фокальной оси и i фокусов семейства (1).

Построение столов Ω_k , см. [54]. Рассмотрим n экземпляров S_1, \dots, S_n стола типа A_2 , ограниченного эллипсом $\lambda = 0$ семейства (1). Разрежем стол S_1 по ветвям гиперболы $\lambda = \lambda_1$, стол S_n (при $n > 1$) по ветвям гиперболы $\lambda = \lambda_{n-1}$, а остальные столы S_i , $2 \leq i \leq n-1$, (если $n > 2$) — по ветвям двух гипербол $\lambda = \lambda_{i-1}$ и $\lambda = \lambda_i$. Здесь $b < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < a$. Обозначения полученных областей приведем в таблице 1. Отметим, что стол S_i разрезан или на набор листов $(a_i, x_i, b_i, y_i, c_i)$, или на набор (a_i, b_i, c_i) .

область	тип	уровень	граница	Oxy
a_i	A_1	$S_i, 1 \leq i \leq n$	λ_1 : при $i = 1$; λ_{i-1} : при $2 \leq i \leq n$.	$x < 0$
x_i	A_0	$S_i, 2 \leq i \leq n-1$	λ_{i-1} и λ_i : при $2 \leq i \leq n-1$.	$x < 0$
b_i	A_0	$S_i, 1 \leq i \leq n$	λ_1 : при $i = 1$; λ_{i-1} : при $2 \leq i \leq n$.	$Oy \subset b_i$
y_i	A_0	$S_i, 2 \leq i \leq n-1$	λ_{i-1} и λ_i : при $2 \leq i \leq n-1$.	$x > 0$
c_i	A_1	$S_i, 1 \leq i \leq n$	λ_1 : при $i = 1$; λ_{i-1} : при $2 \leq i \leq n$.	$x > 0$

Таблица 1: Обозначения листов бильярдных столов

Бильярдный стол Ω_k построим из описанных выше листов путем их склейки по отрицательным и положительным (т.е. лежащим в полуплоскостях $x < 0$ и $x > 0$) ветвям граничных гипербол с перестановками σ_i и ρ_i соответственно. В таблице 2 записаны эти перестановки, а на рисунке 4 изображен стол Ω_3 .

гипербола	ρ_i	σ_i
$i = 1$	(b_1, c_1, y_2, c_2)	(a_2, x_2, a_1, b_1)
$2 \leq i \leq n-1$	$(b_i, y_i, y_{i+1}, c_{i+1})$	$(a_{i+1}, x_{i+1}, x_i, b_i)$
$i = n-1$	$(b_{n-1}, y_{n-1}, b_n, c_n)$	$(a_n, b_n, x_{n-1}, b_{n-1})$

Таблица 2: Перестановки на корешках склейки столов Ω_k

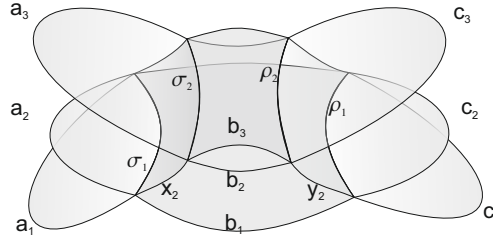


Рис. 4: Стол Ω_k при $k = 3$.

Теорема 1 (Ведюшкина, Кибкало [54]) Для бильярда на столе Ω_k инвариант Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на произвольной неособой изоэнергетической поверхности имеет вид, показанный на рисунке 5.

Сформулируем основную теорему работы.

Теорема 2 Рассмотрим бильярдную книжку, склеенную из нечетного числа m экземпляров стола Ω_k вдоль эллиптических грани. Её инвариант Фоменко–Цишанга изображен на рисунке 6. Он содержит комбинации меток, реализующие серии примеров к пунктам 5 и 6 локальной гипотезы Фоменко.

Доказательство. Обратимся к доказательству теоремы 1. При значении интеграла $\Lambda < \lambda_i$ — параметра гипербол, вдоль которых склеена книжка Ω_k — получаем, что движение распадается на движение по k книжкам

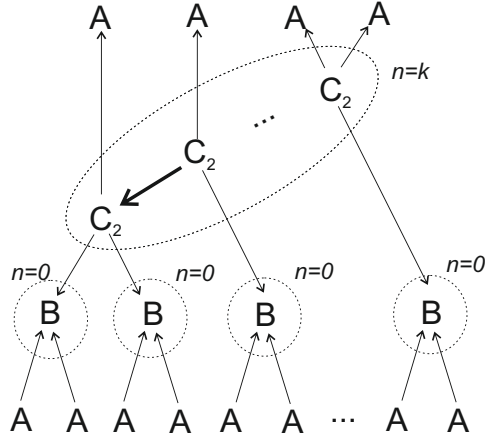


Рис. 5: Инвариант Фоменко–Цишанга биллиарда на столе Ω_k . Метки (r, ε) равны $(\infty, 1)$ на выделенных ребрах и $(0, 1)$ на остальных.

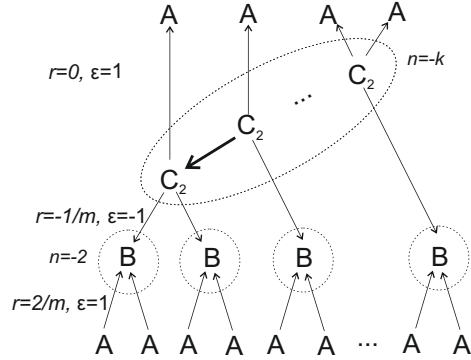


Рис. 6: Инвариант Фоменко–Цишанга книжку, склеенную из m экземпляров (m нечетно) стола Ω_k вдоль эллиптических границ Метки (r, ε) равны $(\infty, 1)$ на выделенных ребрах.

$\mathbb{B}(A_2)_m$. Точно так же, ранее, для книжки Ω_k движение распалось на движение по k эллипсам. При $\Lambda = \lambda_i$ бифуркация выглядит также как и в случае одиночного стола Ω_k и происходит через особый слой атома C_2 .

Отдельного пояснения требует вычисление меток. Циклы на возникающих атомах C_2 связаны с циклами на минимальных или максимальных атомах A (отвечающих движению по гиперболам) следующим соотношением: $\lambda_{C_2} = \mu_A$, $\mu_{C_2} = -\lambda_A$.

Таким образом, матрица склейки на каждом ребре между атомом B и атомом C_2 выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & -m \\ -1 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда ребра вклад в метку n семьи с атомами C_2 равен -1 , а вклад в метку n семьи атома B равен 0 . Тем самым получаем искомый вид молекулы. ■

3 Биллиардные книжки с проскальзыванием

Закон отражения-преломления в точке границы (или линии склейки), рассмотренный выше, является стандартным гюйгенсовым законом упругого отражения: угол падения равен углу отражения, а длина вектора скорости не меняется. Другой класс биллиардов, названный биллиардами с проскальзыванием, был предложен А.Т.Фоменко в работе [24].

Кратко опишем суть конструкции. При ударе о гладкую дугу границы в точке x траектория продолжает движение из точки y , отстоящей от точки x на некотором расстоянии вдоль границы $\partial\Omega$ от точки x . Угол отражения при этом равен углу падения в следующем смысле: считаются ориентированные углы между вектором скорости кривой (направление кривой и определяет направление проскальзывания) и соответствующим углом (падения или отражения).

Рассмотрим центрально симметричную область и проскальзывание “на угол pi ”, т.е. продолжение траектории из диаметрально противоположной точки границы. Такое проскальзывание для центрально симметричных софокусных и круговых столов порождает интегрируемый биллиард. В работе [24] были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга для нескольких конкретных столов. Оказалось, что эти биллиарды моделируют примеры геодезических потоков каждого из четырех следующих классов: имеющих квадратичный или линейный интеграл на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ или на бутылке Клейна KL^2 .

Ранее в работе [50] В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко были промоделированы произвольные геодезические потоки на сфере S^2 и торе T^2 , имеющие линейный или квадратичный по импульсам интеграл. Для этого были использованы топологические биллиарды и биллиардные книжки (в случае конечнолистно лиувиллевой метрики на торе).

Для случая линейного интеграла на $\mathbb{R}P^2$ и на KL^2 положительный ответ на вопрос о возможности моделирования геод.потока биллиардом с проскальзыванием был получен в работе [56]. Затем В.Н.Завьяловым также был получен положительный ответ для потоков на $\mathbb{R}P^2$ с интегралом второй степени.

Поскольку канонический вид метрики геодезического потока на KL^2 , имеющего квадратичный интеграл, устроен проще, чем конечнолистно лиувиллева метрика на торе, то для их моделирования, как ожидается, будет достаточно топологических биллиардов с проскальзыванием. Отметим, что вопрос о моделировании интегрируемых геодезических потоков на $\mathbb{R}P^2$ и на KL^2 с квазилинейным или квазиквадратичным интегралом пока открыт.

Класс биллиардных книжек, как отмечалось выше, весьма широк (и еще не классифицирован, в отличие от топологических биллиардов [20, 36, 37]). В связи с этим, было бы интересно рассмотреть дальнейшие расширения этого класса (например, добавлением потенциала [57] или, в настоящей работе, проскальзывания вдоль свободных границ).

Рассмотрим следующую биллиардную книжку с проскальзыванием. Рассмотрим m биллиардов, ограниченных эллипсом и приклеим к ним кольцо, ограниченное тем же эллипсом и эллипсом с меньшим значением параметра λ (т.е. большим). Занумеруем листы книжки следующим образом – диски номерами $1, \dots, m$, а кольцу припишем номер $m + 1$. На кривой склейки (граничном эллипсе столов A_2 и внутреннем граничном эллипсе кольца) зададим циклическую перестановку длины $m + 1$ на всех 2-клетках книжки.

Добавим в эту книжку проскальзывание, определив его на большем эллипсе кольца (т.е. фактически мы приклеиваем к исходному комплексу лист Мёбиуса): при ударе о больший эллипс после отражения точка продолжает движение из противоположной точки по отношению к точке удара, т.е. “проскальзывая” вдоль границы на π .

Так определенная биллиардная книжка интегрируема, так как звенья траекторий по-прежнему касаются некоторого эллипса или некоторой гиперболы. Обозначим такой стол через $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$. На рисунке 7 схематично показан пример биллиардной траектории. Отметим, что при переходе между листом-диском с номером m и кольцом с номером $m + 1$ не происходит отражения — материальная точка проходит сквозь корешок книжки.

Утверждение 2 *Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности биллиардной книжки $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$ с проскальзыванием в случае нечётного m изображен на рисунке 8а), а в случае чётного — на рисунке 8б)*

Доказательство.

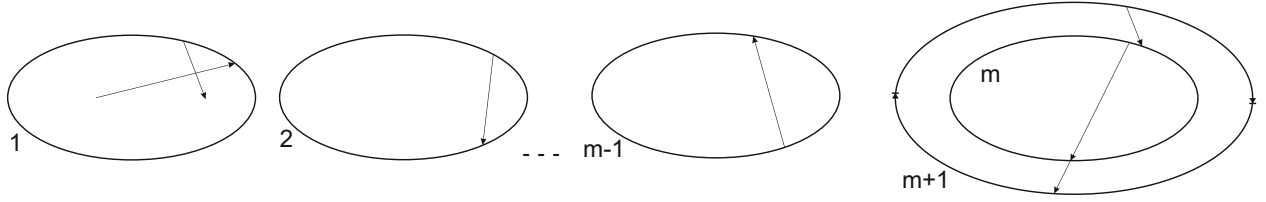


Рис. 7: Биллиардная книжка $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$ с проскальзыванием: пример биллиардной траектории.

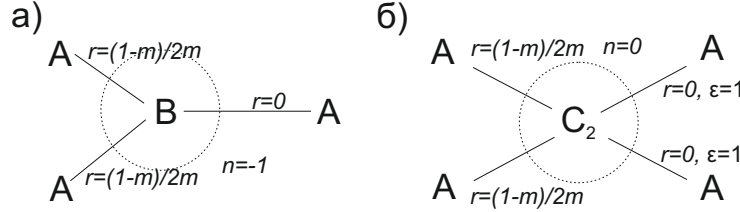


Рис. 8: Инвариант Фоменко–Цишанга для биллиардной книжки $\mathbb{B}_s(mA_2 + C_2)$ с проскальзыванием в случае четного m (а) и нечетного m (б). Все метки на ребрах $\varepsilon = 1$.

Грубая молекула может быть вычислена ровно так же, как это сделано например в теореме 1 и утверждениях о вычислении инвариантов топологических биллиардов с проскальзыванием из работ [24, 56]. Поясним выбор проекций циклов с торов Лиувилля на биллиардную книжку (в случае четного числа m проекции изображены на рис. 9).

Разберем подробно случай четного числа m . Случай нечетного m разбирается аналогично. Необходимо немного изменить циклы μ на одном листе книжки по аналогии с тем, как это было сделано для книжки без проскальзывания в теореме 1. Пусть $m = 2k$. Проекции циклов, изображенных на рис. 9а) пересекаются в одной точке, также как и сами циклы. Очевидно, что цикл λ_A стягивается в точку при стремлении каустики к большему эллипсу.

На рис. 9б) изображены проекции циклов на этих же торах Лиувилля, но относящихся к атому B . Стрелки указаны для тора Лиувилля, траектории которого закручиваются по часовой стрелке. Для другого тора необходимо сменить направление стрелок – векторов скорости – на противоположное. Для цикла μ_B стрелками на линии-проекции указано выбранное направление (на торе Лиувилля, соответствующего значению $\Lambda > b$ необходимо выбрать противоположное направление). При достижении параметра Λ фокального значения b на листах с номерами $1, \dots, m - 1$ цикл будет проходить через фокусы семейства софокусных квадрик (1). Однако вектор скорости в этом фокусе будет отличен от горизонтального. Т.е. на этом цикле лишь одна точка перейдет в точку особого слоя – это точка на листе с номером m .

Матрица склейки на нижних ребрах имеет вид $\begin{pmatrix} 1 - 2k & 4k \\ 1 - k & 2k - 1 \end{pmatrix}$. На верхнем ребре (соответствующем торах, траектории которых касаются гипербол) проекции циклов на биллиардную книжку изображены на рисунке 9в). Отметим, что здесь циклы λ_B и μ_A гомологичны. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такими матрицами, будут искомыми, а вклад в метку n равен $2 \left[-\frac{2k-1}{4k} \right] + \left[-\frac{-1}{1} \right] = -1$. ■

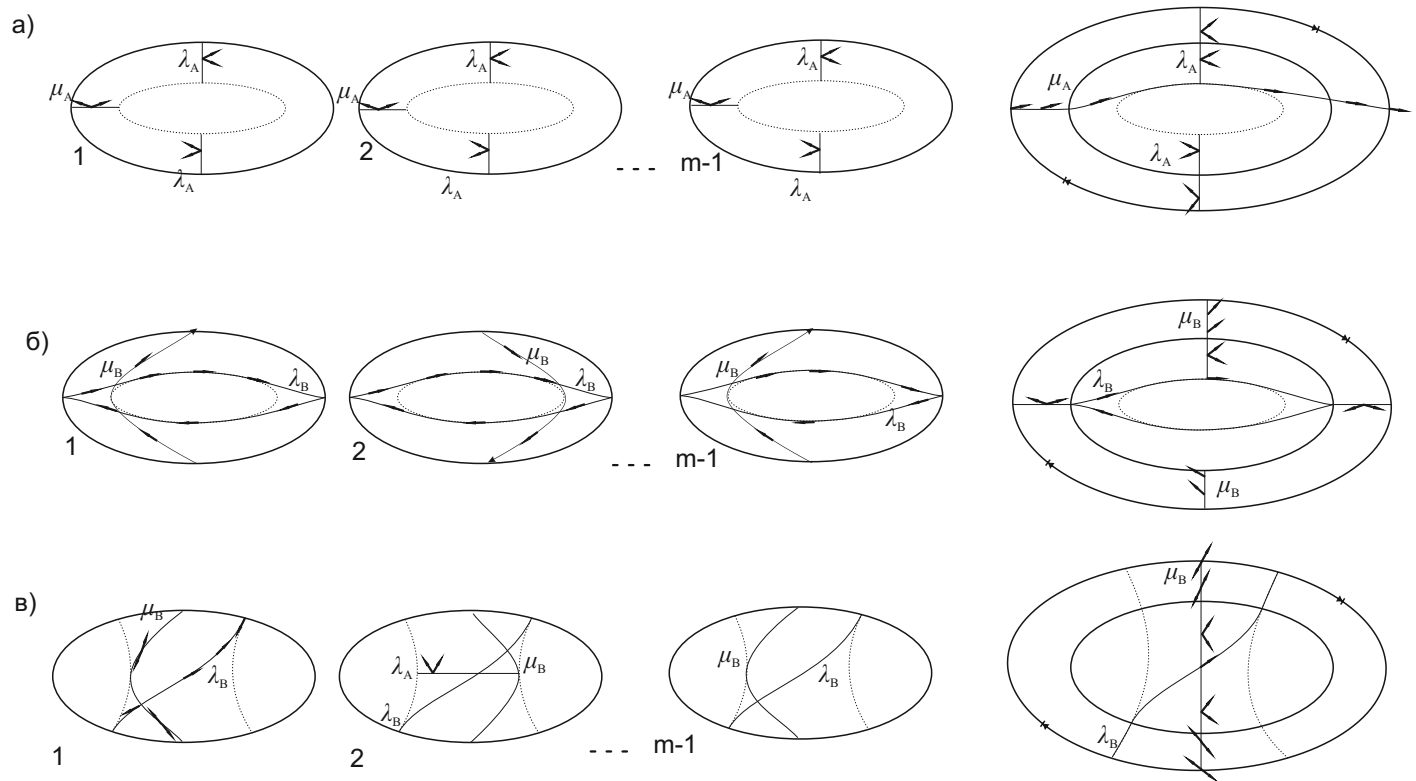


Рис. 9: Циклы для четного числа эллипсов-дисков в книжке с проскальзыванием.

Список литературы

- [1] Glutsyuk A. A. On two-dimensional polynomially integrable billiards on surfaces of constant curvature, Dokl. Math. 2018. Vol. 98, No. 1. P. 382–385.
- [2] A. Glutyuk, “On polynomially integrable birkhoff billiards on surfaces of constant curvature” // J. of the Europ. Math. Soc. 23(3), 995–1049 (2021)
- [3] Kaloshin, V., Sorrentino, A.: On the local birkhoff conjecture for convex billiards. Ann. of Math. 188(1), 315–380 (2018)
- [4] M. Bialy, A. E. Mironov, “Algebraic non-integrability of magnetic billiards”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 49 (2016), 45
- [5] Bialy, M., Mironov, A.E.: Polynomial non-integrability of magnetic billiards on the sphere and the hyperbolic plane. Russian Math. Surveys 74(2), 187–209 (2019)
- [6] M. Bialy, A.E. Mironov “Angular billiard and algebraic Birkhoff conjecture” // Advances in Mathematics 313 (2017) 102–126
- [7] S. Smale, Topology and mechanics. I // Inventiones mathematicae, V. 10 (1970), pp. 305–331.

- [8] Fomenko A.T. “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, Soviet Math. Dokl., **33**:2 (1986), 502–506.
- [9] A.T. Fomenko “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, Math.USSR Izvestija, **29**:3 (1987), 629–658.
- [10] A. T. Fomenko. “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, Russian Math. Surveys, **44**:1 (1989), 181–219.
- [11] A.T.Fomenko, H.Zieschang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, Math.USSR Izv., **36**:3 (1991), 567–596.
- [12] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems, Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton FL, 2004.
- [13] V. Lazutkin, “KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions”, Springer, Berlin (1993)
- [14] E.A.Kudryavtseva, Liouville integrable generalized billiard flows and Poncelet type theorems // Journal of Mathematical Sciences 225:4 (2017), 611–638.
- [15] Dragovic V., Radnovic M., “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, Regul. Chaotic Dyn., **14** (2009), 479–494.
- [16] V. V. Fokicheva, “Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas”, Moscow Univ. Math. Bull., **69**:4 (2014), 148–158.
- [17] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2014, 4, 18–27.
- [18] G. D. Birkhoff, “Dynamical systems”, AMS Colloq. Publ., 9, AMS, New York, 1927, viii+295 c.
- [19] V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, “Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts”, Transl. Math. Monogr., 89, AMS, Providence, RI, 1991, viii+171 c.
- [20] V. V. Fokicheva, A. T. Fomenko, “Integrable billiards model important integrable cases of rigid body dynamics”, Dokl. Math., **92**:3. (2015), 682–684.
- [21] V. I. Dragovic, “On integrable potential perturbations of the Jacobi problem for the geodesics in the ellipsoid”, J. Phys. 29 (1996), 317–321.
- [22] V. Dragovic, B. Jovanovic, “On integrable potential perturbations of the billiard system within an ellipsoid”, J. Math. Phys. 38 (1997), 3063.
- [23] V. V. Kozlov, “Some integrable generalizations of the Jacobi problem on geodesics on the ellipsoid”, Prikl. Math. Mech. 59 (1995), 3–9.
- [24] A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, V. N. Zav’yalov, “Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping”, Rus. J. of Math. Phys., **28**:1 (2021), 37–55.
- [25] В. Драгович, М. Раднович, “Топологические инварианты эллиптических бильярдов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского”, Фундамент. и прикл. матем., 20:2 (2015), 51–64.
- [26] В. В. Ведюшкина, А. И. Скворцов, “Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуковским потенциалом”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2022, 1, 8–19
- [27] S. E. Pustovoitov, “Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field”, Sb. Math., **212**:2 (2021), 211–233.
- [28] С. Е. Пустовойтов, “Топологический анализ бильярда в эллиптическом кольце в потенциальном поле”, Фундамент. и прикл. матем., 22:6 (2019), 201–225

- [29] Glutyuk, A.: On polynomially integrable birkhoff billiards on surfaces of constant curvature. J. of the Europ. Math. Soc. 23(3), 995–1049 (2021)
- [30] Е. Е. Каргинова, “Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского”, Матем. сб., 211:1 (2020), 3–31
- [31] Е. Е. Каргинова, “Слоение Лиувилля топологических биллиардов на плоскости Минковского”, Фундамент. и прикл. матем., 22:6 (2019), 123–150
- [32] V. Dragovic, S. Gasiorek, M. Radnovic, “Integrable Billiards on a Minkowski Hyperboloid: Extremal Polynomials and Topology”, arXiv:2010.07685
- [33] G. V. Belozеров, “Topological classification of integrable geodesic billiards on quadrics in three-dimensional Euclidean space”, Sb. Math., 211:11 (2020), 1503–1538.
- [34] G.V. Belozеров, “Topological classification of billiards in a three-dimensional Euclidean space”, Sb. Math., 2022.
- [35] И. Ф. Кобцев, “Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2018, 2, 27–33
- [36] V. V. Vedyushkina (Fokicheva), A. T. Fomenko, “Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems”, Izv. Math., 81:4 (2017), 688–733.
- [37] В. В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов”, Матем. сб., 210:3 (2019), 17–74
- [38] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56
- [39] V. Dragovic, M. Radnovic, “Pseudo-integrable billiards and arithmetic dynamics” // J. Mod. Dyn. 8 (2014), 109–132.
- [40] В. А. Москвин, “Алгоритмическое построение двумерных особых слоев атомов бильярдов в невыпуклых областях”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, 3, 3–12
- [41] В. А. Москвин, “Топология слоений Лиувилля интегрируемого бильярда в невыпуклых областях”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2018, 3, 21–29
- [42] V. Moskvina, “Realization of bifurcations of Liouville foliations for integrable billiards in non-convex domains” // Regul. Chaotic Dyn., 21:1 (2022), 1–33.
- [43] . Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, 3, 15–25
- [44] A. V. Bolsinov, P. Rikhter, A. T. Fomenko, “The method of circular molecules and the topology of the Kovalevskaya top” // Sb. Math. 191 (2000), no. 1-2, 151–188.
- [45] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, “Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб., 212:8 (2021), 89–150
- [46] V. V. Vedyushkina, “Integrable billiards realize the toric foliations on the Lens space and 3-torus” // Mat. Sb. 211 (2020), no. 2, 46–73
- [47] И. С. Харчева, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 4, 12–22.
- [48] В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела”, Докл. РАН, 465:2 (2015), 150–153

- [49] V. V. Vedyushkina, “Liouville foliation of the billiard book modeling the Goryacheva–Chaplygin case”, Moscow Univ. Math. Bull., **75**:1 (2020), 42–46.
- [50] V. V. Vedyushkina (Fokicheva), A. T. Fomenko, “Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards”, Izv. Math., **83**:6 (2019), 1137–1173.
- [51] В. В. Ведюшкина, “Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе”, Матем. сб., 211:2 (2020), 46–73
- [52] V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo and A. T. Fomenko, “Topological Modeling of Integrable Systems by Billiards: Realization of Numerical Invariants,” Dokl. Math. **102** (2020), 269–271.
- [53] В. В. Ведюшкина, “Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2021, 2, 28–32
- [54] V. V. Vedyushkina, V. A. Kibkalo, “Realization of the Numerical Invariant of the Seifert Fibration of Integrable Systems by Billiards”, Moscow Univ. Math. Bull., **75**:4 (2020), 161–168.
- [55] V.V. Vedyushkina, V.A. Kibkalo, “Billiard books of low complexity and realization of liouville foliations of integrable systems”, Chebyshevskii sbornik 23(1), 53–82 (2022)
- [56] В.В.Ведюшкина, В.Н.Завьялов, “Реализация линейно-интегрируемых геодезических потоков бильярдами с проскальзыванием”, 2022
- [57] A. T. Fomenko and V. A. Kibkalo, “Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms,” in *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics, Understanding Complex Systems*, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky (Springer, Cham, 2021), pp. 3–26.