Реализация линейно-интегрируемых геодезических потоков биллиардами с проскальзыванием

В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов, Москва

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 20-71-00155) в МГУ имени М.В.Ломоносова

Изучению геодезических потоков на двумерных замкнутых поверхностях, обладающих полиномиальным по компонентам импульса дополнительным интегралом, посвящено большое количество работ (достаточно подробно история вопроса освещена в [1, гл. 2-3 т.2]). Отметим важный результат В.В.Козлова [2, 3] о несуществовании (в аналитической категории) дополнительных интегралов у геодезического потока на компактном римановом 2-многообразии, если многообразие имеет род 2 и выше. Отметим [1, комм. 2 к теореме 2.1, т.2], что условие аналитичности многообразия избыточно, если речь идет о полиномиальной интегрируемости, т.е. ведется поиск полиномиального по компонентам импульса интеграла (см. [4]).

В случае интегралов степени 1 и 2 (т.е. линейно или квадратично интегрируемых потоков) был полностью решен ряд задач о классификации таких потоков. Напомним, что такие потоки можно классифицировать с точки зрения канонического вида метрики, топологии слоения Лиувилля (лиувиллевой эквивалентности), траекторной и геодезической эквивалентностей [5]. В случае интегралов более высоких чем 2 степеней вопрос остается открыт (имеются имеются примеры геодезических потоков на 2-многообразиях с интегралом степени 3 или 4.).

Важные результаты В.Н. Колокольцова [4] были затем эти результаты были развиты и дополнены в работах И.К. Бабенко, Н.Н. Нехорошева, В.С. Матвеева (см. [1], а также [4], [6]). В частности, В.С. Матвееву удалось получить топологическую классификацию линейно интегрируемых геодезических потоков на неориентируемых поверхностях путем изучения инволюции, действующей на фазовом пространстве такого потока на соответствующей ориентируемой поверхности. В настоящей работе мы промоделируем линейно-интегрируемые геодезические потоки на проективной плоскости и бутылке Клейна с помощью биллиардов из недавно введенного А.Т.Фоменко [7] (см. также [8]) класса биллиардов с проскальзыванием (и добавления проскальзывания к топологическим биллиардам, введенным В.В.Ведюшкиной в [10]).

Стандартные биллиардные системы описывают движение точки внутри области с естественным отражением на границе, допускающей углы излома в точках равными $\frac{\pi}{2}$. Фиксируем координаты (x, y) на проскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство концентрических окружностей с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Биллиард ограниченный концентрическими окружностями является интегрируемым, поскольку вдоль траектории сохраняется угол φ между отрезками траектории и граничной окружностью. Далее будем работать с областями, которые ограничены окружностями.

Пусть F - изометрия границы плоской окружности, переводящая точку x в диаметрально противоположную ей точку y. С точки зрения самой окружности это означает поворот радиус-вектора для точки x (исходящего из центра окружности) на угол π. Биллиард в круге с введенной изометрией на окружности будем называть биллиардом с проскальзыванием.

Как уже было доказано в статье [8], данная биллиардная система будет также интегрируема с сохранением дополнительного интеграла, так как поворот на угол π сохранит касание

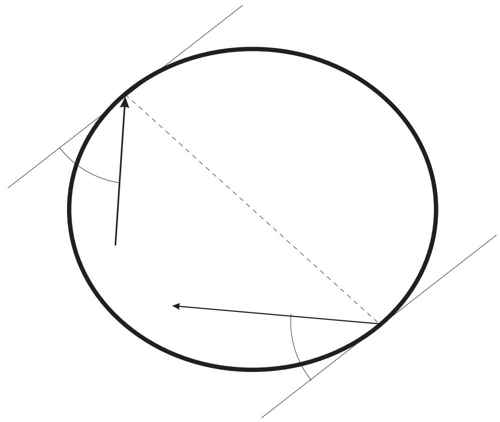

Рис. 1: Слева показано движение материальной точки в диске с проскальзыванием.

траектории концентрической окружности, отвечающей данному значению интеграла. Также в статье были рассмотрены случаи диска, который моделирует склейку двух полноторий в линзовое пространство $L_{4,1}$ на изоэнергетическом уровне, для случая проективной плоскости, и двух колец, склееных по внутренней окружности для бутылки Клейна.

Определение 1 *Определим склейку двух биллиардов вдоль общей границы. Пусть два биллиарда имеют общую границу и на плоскости располагаются относительно этой границы с одной стороны. Склеим области биллиардов вдоль этой общей границы. Материальная точка при движении по одному листу биллиарда после удара о границу склейки продолжит двигаться в области другого биллиарда. В случае если склеиваемые биллиарды – плоские биллиардные области, а результат склейки – ориентируемое многообразие, то это определение склейки топологического биллиарда, введенное В.В. Ведюшкиной.*

Определение 2 *Рассмотрим области на плоскости, ограниченные концентрическими окружностями. Область (и соответствующий ей биллиард), гомеоморфную диску обозначим через D. Радиус внешней окружности будем считать всегда равным единице. Рассмотрим область, ограниченную двумя концентрическими окружностями (назовем её область C), причем меньшая окружность задается уравнением $x^2 + y^2 = \lambda,\ 0 < \lambda \leq 1$. Если на большей границе области C задано проскальзывание, то такой биллиард назовем «инволютивным A_λ», а если на меньшей (невыпуклой по отношению к биллиарду) – "A^*_λ". Область C без проскальзывания назовем промежуточной B_λ. Сами области показаны на рисунке 2, символами a и b показано проскальзывание.*

Утверждение 1 *Пусть на бутылке Клейна задана $(L,\ g)$-метрика $g(y)(dx^2 + dy^2)$, где функция g не постоянна. Тогда слоение Лиувилля геодезического потока на изоэнергетической поверхности Q задается молекулой на рис. 3 справа. И пусть на проективной плоскости задана метрика $ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2$. Отвечающий геодезическому потоку молекула $\widetilde{W}$ для случая проективной плоскости показана на рис. 3 слева. В данных графах присутствуют только атомы B_n, B^*_n и B^{**}_n. При этом метки в графах нужно поставить следующим образом.*

- *В обоих графах $\widetilde{W}(f)$ и $\widetilde{W}(g)$ метки таковы. На ребрах между седловыми атомами r-метки равны бесконечности. Между седловыми атомами и атомами A метки r равны нулю, за исключением тех случаев, когда атом A (т.е. локальный максимум функции) отвечает неподвижной точке инволюции. В этом случае r-метка равна $\dfrac{1}{2}$.*

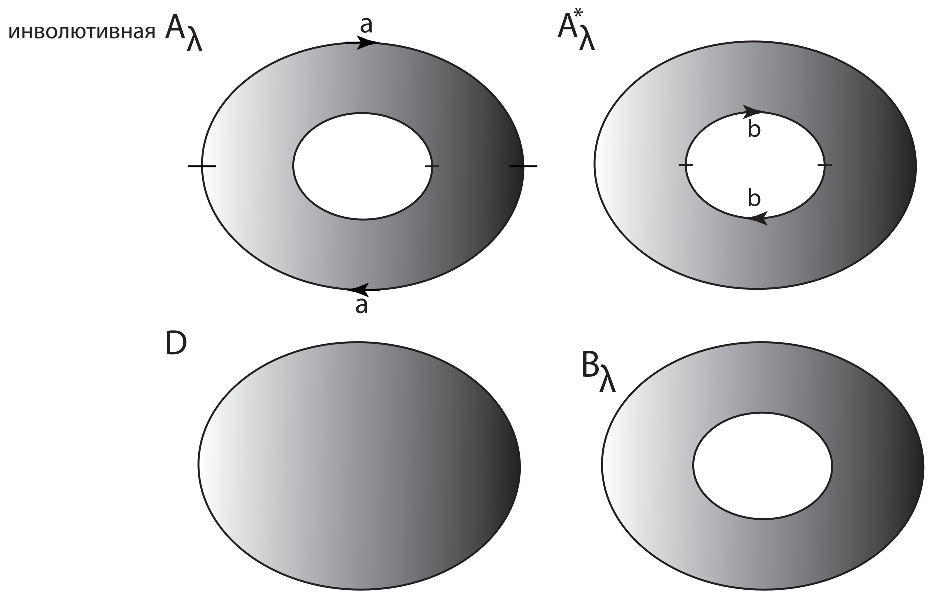

Рис. 2: Слева: сверху показана область инволютивного A_λ, снизу D. Справа: сверху A^*_λ, а снизу промежуточная область B_λ.

- *На единственном центральном ребре, соединяющем два экземпляра молекулы $\widetilde{W}(f)$ или $\widetilde{W}(g)$, метка r равна бесконечности, а метка ε равна -1. Здесь имеется ровно одна семья (совпадающая со всей молекулой $\widetilde{W}$, из которой выброшены все концевые атомы A). Метка n на этой семье равна -2.*

- *Количество звезд и меток $\dfrac{1}{2}$ в сумме равны двум для геодезического потока на проективной плоскости и четырем для бутылки Клейна.*

Теорема 1 *Любой геодезический поток на двумерном неориентируемом многообразии (бутылке Клейна или проективной плоскости), обладающий линейным по импульсам дополнительным интегралом, лиувиллево эквивалентен биллиарду с проскальзыванием, состоящему из плоских биллиадов, ограниченных концентрическими окружностями. При этом линейный интеграл такого потока сводится к каноническому на биллиарде, которым является угол между траекторией и границей любого биллиардного стола. Стоит заметить, что данная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.*

Алгоритмическое построение топологического биллиарда с проскальзыванием для случая проективной плоскости.

Обозначим через R следующий биллиард, полученный последовательной склейкой одной области с проскальзыванием (A_{λ_0} или $A^*_{\lambda_0}$), области D и некоторого числа n промежуточных областей $B_{\lambda_i},\ i \in \{1..n\}$.

Проведем анализ траекторий такого биллиарда. Значению интеграла $\varphi = 0$ сопоставим движение материальной точки по дугам окружностей радиуса 1, т.е. по выпуклым дугам склейки биллиардов, входящих в состав биллиарда R. Пусть при этом траектории обходят начало координат по часовой стрелке. Значениям интеграла $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ соответствует движение по часовой стрелке. Значениям интеграла $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ соответствует движение против часовой стрелки, причем значению $\varphi = \pi$ – движение по дугам окружностей радиуса 1. Наконец, траектории на

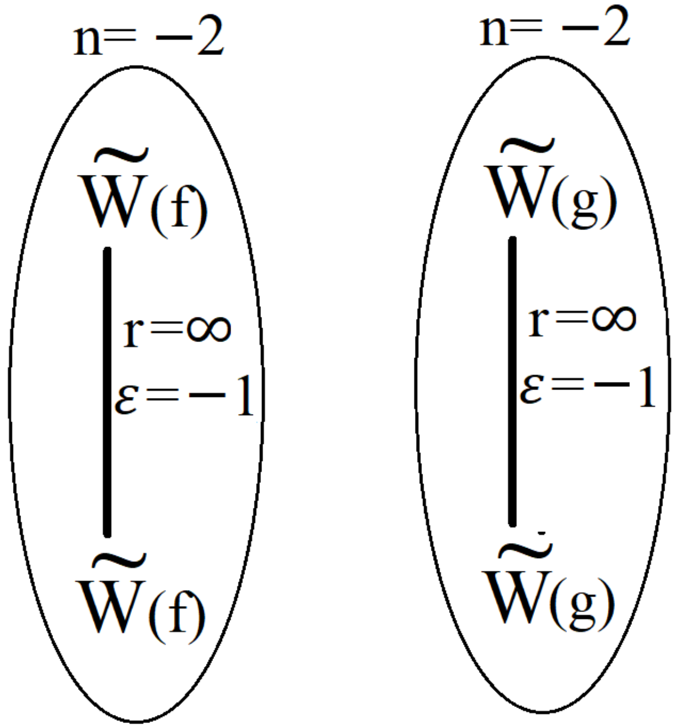

Рис. 3: Молекулы геодезических потоков на проективной плоскости (слева) и бутылке Клейна (справа).

уровне интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ состоят из отрезков прямых, проходящих через начало координат. При этом ясно, что топологическое описание совместных уровней интеграла при значении $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\varphi > \frac{\pi}{2}$ совпадает: при обращении траектории траектории первого типа переходят в траектории второго.

Построим по биллиарду R кусочно-линейную функцию $\hat{f}$. Рассмотрим точки с координатами (i, λ_i), где числа λ_i это радиусы меньших граничных окружностей областей с проскальзыванием и промежуточных областей B_{λ_i}. Дополним их точкой $(n+1, 0)$. Назовем эти точки минимальными. Рассмотрим точки с координатами $(i/2, 1)$, расположенные между минимальными точками. Соединим последовательно точки в ломаную, так чтобы минимальные точки были бы минимумами возникающего графика функции. Добавим к этой ломаной её отражение вдоль оси Oy. Функцию, график которого есть полученная симметричная ломаная, обозначим через $\hat{f}$.

График этой функции фактически является профилем биллиарда, который произвольная прямая с центром в начале координат высекает в биллиардах, входящих в биллиард R. Более того, по такому графику функции можно однозначно восстановить биллиард R.

Рассмотрим интегрируемый геодезический поток на проективной плоскости. Тогда он однозначно задается гладкой четной функцией f, которая обращается в нуль на концах интервала – своей области определения – и имеет некоторые условия сглаживания в концах. Рассмотрим график этой функции и заменим его ломаной, соединив точки минимума и максимума. Далее сохраняя взаимное расположение минимумов и максимумов изменим график так, чтобы все минимумы оказались бы в целых ненулевых точках, максимумы – в половинных вида $i/2$, и значения в максимумах стали бы равными 1. В результате мы получим функцию $\hat{f}$, по которой можно построить биллиард R с проскальзыванием. Это и будет биллиард, изоэнергетическая поверхность которого Лиувиллево эквивалента исходному геодезическому потоку. Для этого осталось показать, что инвариант Фоменко-Цишанга, вычисленный по биллиарду R совпадает с инвариантом, изображенным на рисунке 3 с заменой f на $\hat{f}$.

Предложение 1 *Биллиардный стол R, построенный по данной конструкции, после отождествления всех стрелок на границах инволютивных областей гомеоморфен проективной плоскости.*

Доказательство: Промежуточными областями являются кольца, каждое из которых гомеоморфно цилиндру. Инволютивные области A_λ и A_λ^* после отождествления обозначающих проскальзывание стрелок на границе (см. рис. 2), гомеоморфны лентам Мебиуса. Тогда полученный биллиардный стол R гомеоморфен цилиндру (из промежуточных областей B_λ), вдоль одной граничной окружности которого приклеена лента Мебиуса, а с другой – с диск D. Очевидно, что тогда биллиардный стол R гомеоморфен проективной плоскости. Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 1 для проективной плоскости.

Шаг 1. Вычисление грубой молекулы.

Рассмотрим график функции $\hat{f}$. Расслоим область под графиком функции на отрезки. Стянем каждый отрезок в точку. Сопоставим вершинам полученного графа следующие атомы. Точкам прообразы которых были максимумы функции $\hat{f}$ сопоставим атомы A. Всем остальным вершинам – атомы B_k, где k – это количество минимумов, через через которые проходит соответствующий горизонтальный отрезок (см. рис. 4 для произвольной положительной функции f). В нашем случае полученный граф $W(\hat{f})$ является симметричным, так как функция f была симметричной. Перейдем теперь к графу $\widetilde{W}(\hat{f})$ профакторизовав полученную молекулу по имеющейся симметрии. Если при этом ось симметрии проходит через атом B_{2k+1} (т.е. он соответствует минимуму, лежащему на оси Oy), то после симметрии такой атом перейдем в атом B_k^*. Это построение совпадает с построением графа $\widetilde{W}(f)$, для геодезического потока на проективной плоскости, характеризующегося функцией f.

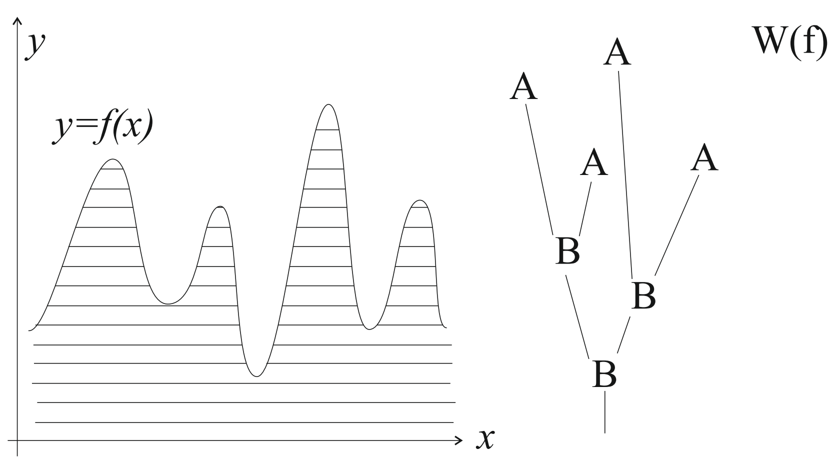

Рис. 4: Построение графа $W(f)$.

Фиксируем уровень интеграла $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Ему будет соответствовать некоторая горизонтальная прямая $y = c < 1$, где c – радиус окружности, которой на данном уровне интеграла касаются траектории. Рассмотрим соответствующую этому значению интеграла поверхность уровня и спроектируем её на биллиард. Проекция поверхности уровня может быть получена удалением из каждого биллиарда в составе биллиарда R внутренности окружности радиуса c. В результате такого удаления биллиард R распадается на несколько компонент связности. Все они (кроме быть может одной) гомеоморфны цилиндрам, полученными склейками из областей типа C, которые остаются при удалении внутренности окружности из областей D, B_λ и A^*_λ (в том случае если $\lambda < c$). И не более чем одна – гомеоморфна листу Мебиуса. Она получается при удалении внутренности окружности радиуса c из инволютивных областей A_λ или A^*_λ (в этом случае если мы должны вырезать окружность меньшего радиуса чем радиус граничных окружностей области A^*_λ).

Отметим, что число компонент связности совпадает с количеством отрезков, высекаемых прямой $y = c$ под графиком функции $\hat{f}$ при $x > 0$ (как в этой части график функции $\hat{f}$ есть профиль биллиарда).

Пусть прямая $y = c$ не проходит через минимумы функции $\hat{f}$. Тогда прообраз каждого цилиндра и каждой ленты Мебиуса есть некоторый двумерный тор (по аналогии с топологическими биллиардами и простейшими биллиардами с проскальзыванием, см. работы [8, 10]).

Пусть прямая $y = c$ проходит через несколько минимумов функции, но при этом не проходит через возможный минимума, лежащий на оси Oy. Тогда, также как и в топологических биллиардах, бифуркация на данном уровне описывает склейку нескольких торов в один вдоль критических окружностей, соответствующих невыпуклым склейкам вдоль окружностей с радиусом c. Очевидно, что эта бифуркация описывается атомом B_k, где k – это количество положительных минимумов, которых касается прямая $y = c$.

Пусть прямая $y = c$ проходит через несколько минимумов функции, в том числе через минимумом, лежащий на оси Oy (в этом случае биллиард R обязан содержать инволютивную A^*_λ, причем в этом случае $\lambda = c$). Тогда можно показать, что бифуркация описывается атомом B^*_k, где k – это количество положительных минимумов, которых касается прямая $y = c$. Отменим проскальзывание на внутренней окружности инволютивной A^*_c. Тогда соответствующая бифуркация описывается атомом B_k. На особом слое атома B_k выделим особую окружность – прообраз внутренней граничной окружности области A^*_c. Она одна, т.к. на особом слое траектории касаются окружности с радиусом c. На меньших c значениях интеграла этот прообраз будет пустым, а на больших – состоять из двух окружностей. Разрежем 3-атом по прообразу этой окружности. Затем вернем проскальзывание на этой окружности. В результате эта выделенная окружность на особом слое атома B_k склеится с собой дважды. Эта склейка будучи распространена на весь атом (т.е. и на неособые слои) приводит к образованию атома B^*_k, подобно тому как склейка тора по выделенному циклу так что цикл обходит себя дважды приводит к образованию особого слоя атома A^*.

Полученная в результате грубая молекула имеет вид $\widetilde{W}(\hat{f})$, что и требовалось показать.

Шаг 2. Вычисление меток меченой молекулы.

Предложение 2 *На ребрах между седловыми атомами метки $r = \infty$. Между седловыми атомами и атомами A метки $r = 0$, за исключением тех случаев, когда атом A отвечает неподвижной точке инволюции [1] (в построении выше это означает, что отвечающий этому атому A максимум лежит на оси Oy). В этом случае метка $r = \dfrac{1}{2}$.*

Доказательство:

При выборе циклов на граничных торах 3-атомов мы будем изображать их проекцией на биллиард R. Эти циклы выглядят как кривые, которые будучи оснащены подходящими векторами скорости, реализуют циклы на торах Лиувилля.

Напомним правила выбора циклов. На граничных торах атомов A в качестве однозначно выбиранного цикла λ выбирается цикл, который стягивается в точку внутри полнотория A. В качестве цикла μ выбирается любой дополняющий его до базиса. При стремлении к особому слою цикл μ переходит в критическую окружность. Это позволяет однозначно определить на нём ориентацию (он должна совпасть с ориентацией критической окружности). На граничных торах седловых атомов циклы λ выбираются гомологичными слоям расслоения Зейферта. Для атомов без звездочек это означает, что они должны быть гомологичны (и сонаправлены) критическим окружностям при достижении торами особого слоя. Циклы μ для атомов без звездочек выбираются как граничные окружности двумерного атома – трансверсального критической окружности сечения 3-атома. Если так поступить для атома со звездочкой, то может возникнуть (и как правило в реальных задачах возникает) следующая ситуация. Возникающие циклы $\hat{\mu}$ могут пересекать цикл λ в двух точках. В нашем случае атома B_k^* на одном торе цикл $\hat{\mu}$ пересечет λ в одной точке, а на другом в двух. Тогда на том торе, где пересечение есть одна точка в качестве базисного цикла μ_s берем $\hat{\mu}$, а на другом – $\frac{\hat{\mu}+\lambda}{2}$ (см. подробнее в книге А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]).

Пусть биллиард R содержит только инволютивную область A_λ. Тогда проекции циклов на биллиарды, входящие в состав биллиарда R изображены на рисунке 5. Зеленым изображены проекции и вектора скоростей циклов λ, красным – циклов μ. Стрелками снабжены точки кривых, которые показывают как выглядит вектор скорости в прообразе проекции тора на биллиард. Поясним выбор цикла μ на верхнем торе для атома B_k (считаем что молекула ориентирована сверху вниз). При прохождении по инволютивной A_λ в тот момент когда кривая в проекции достигает ребро склейки цикл переходит на промежуточные биллиарды B_λ. Заметим ещё один факт. Если радиус окружности меньше радиусов всех внутренних окружностей инволютивной области A_λ и областей B_λ. Тогда на этом слое лежит один тор. Можно показать, что цикл μ гомологичен циклу, переходящему в движение по диаметру окружности при значении интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пусть биллиард R содержит только инволютивную область A_λ^*. Тогда проекции циклов на биллиарды, входящие в состав биллиарда R изображены на рисунке 6. Зеленым изображены проекции и вектора скоростей циклов λ, красным – циклов μ. Стрелками снабжены точки кривых, которые показывают как выглядит вектор скорости в прообразе проекции тора на биллиард.

Для атомов B_k расположенных в молекуле ниже уровня атома со звездочкой циклы выбираются также как и в предыдущем случае. Поясним выбор циклов на граничных торах атома со звездочкой. В качестве циклов $\hat{\mu}$ можно взять прообраз отрезков прямой, проходящей через начало координат. На нижнем уровне интеграла таких циклов будет два, каждый из них пересечет цикл λ в одной точке (см. рис. 6). Для выбора цикла μ_s берем один из них. На нижнем уровне интеграла этот цикл будет пересекать циклы λ дважды. Поэтому в качестве цикла μ_s берем полусумму $\hat{\mu}$ и λ. Итоговый цикл изображен на рис. 6 в нижней строке. При этом его проекция на промежуточные биллиарды B_λ выглядит также как и ранее и лежит на фиксированном радиусе семейства окружностей. Эти же пары λ и μ_s необходимо выбирать в качестве циклов на граничных торах атомов B_k расположенных выше уровня атома со звездочкой.

Вычислим метки. Если проекция тора не затрагивает инволютивную A_λ, то между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = 0, \varepsilon = 1$, вклада в метку n здесь нет. Если проекция затрагивает инволютивную A_λ, то между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Эта матрица вносит вклад в семью равный $[-\frac{1}{2}] = -1$. Между седловыми атомами, матрица склей-

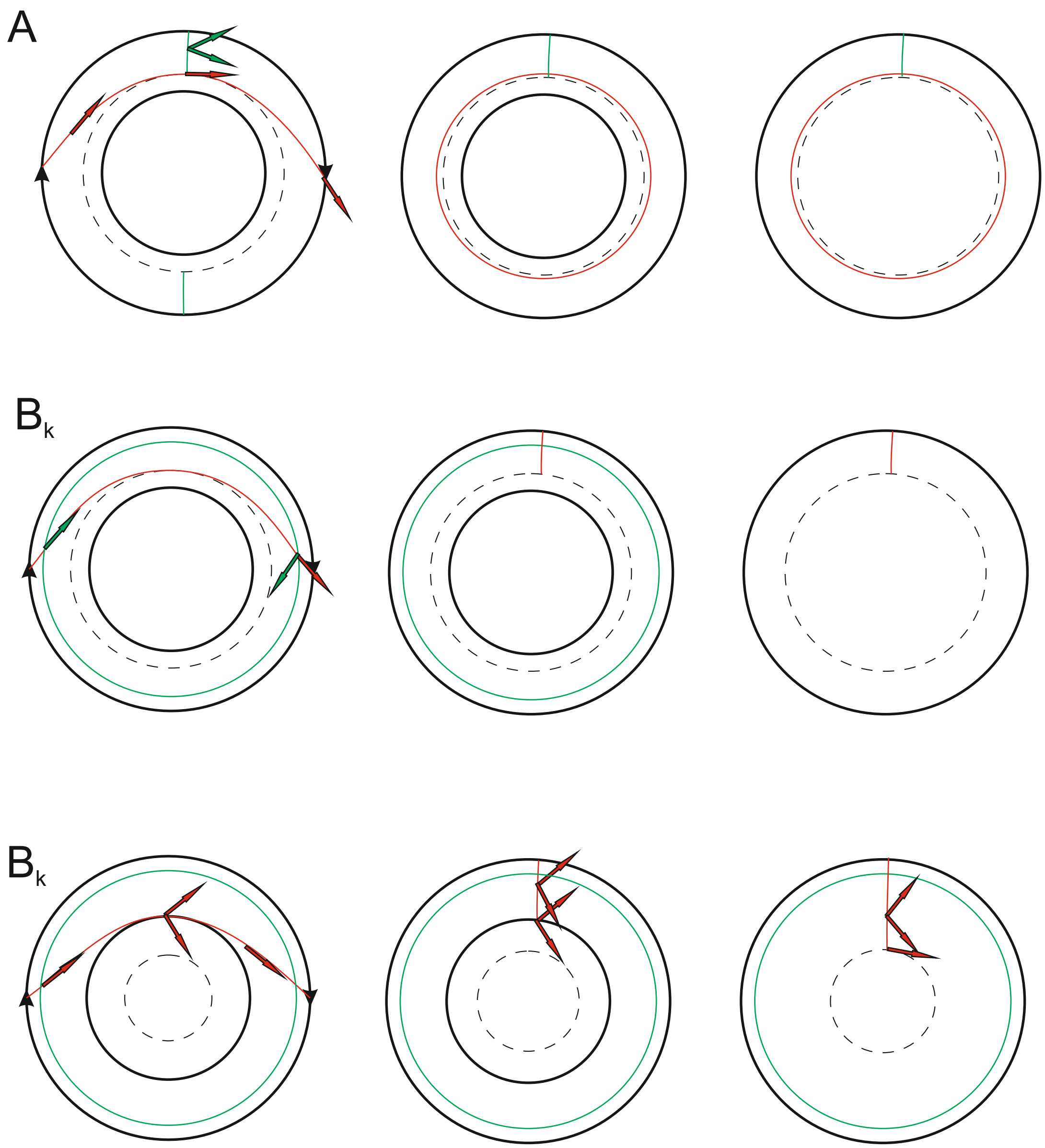

Рис. 5: Проекции циклов на граничных торах атомов A (верхняя строка) и атомов B_k на биллиарды входящие в состав биллиарда R : в первом столбце проекция на инволютивную A_λ, во втором – на промежуточный биллиард B_λ, в третьем – биллиард D. Зеленым изображены проекции и вектора скоростей циклов λ, красным – циклов μ.

ки очевидно имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – все циклы λ гомологичны и одинаково ориентированы. Это приводит к тому что метки $r = \infty$, $\varepsilon = 1$. Эти внутренние для семьи ребра вклада в метку n не дают.

Предложение 3 *На единственном центральном ребре молекулы* $\tilde{W(f)}$ *метка* $r = -\infty$, *а метка* $\varepsilon = -1$. *Здесь имеется ровно одна семья, метка на которой равна -2.*

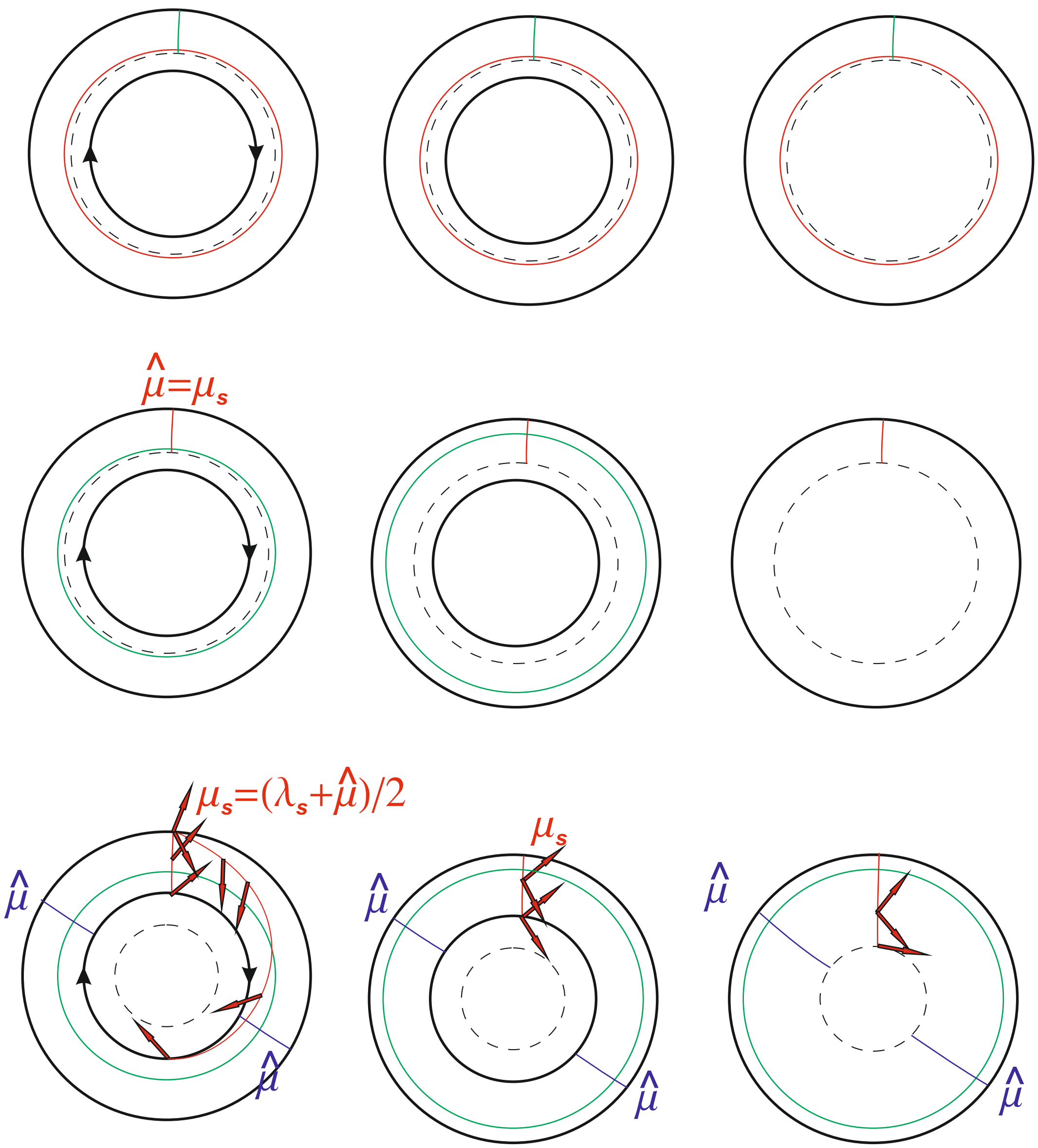

Рис. 6: Проекции циклов на граничных торах атомов A (верхняя строка) и атомов B_k^* (и тех атомов B_k что расположены при возрастании интеграла выше атома со звездочкой) на биллиарды входящие в состав биллиарда R : в первом столбце проекция на инволютивную A_λ^*, во втором – на промежуточный биллиард B_λ, в третьем – биллиард D. Зеленым изображены проекции и вектора скоростей циклов λ, красным – циклов μ, синим – вспомогательного цикла $\hat{\mu}$.

Доказательство: Мы описали движение по и против часовой стрелки, но они переходят друг в друга через значение $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Циклы λ имеют противоположную ориентацию, а циклы μ перейдут друг в друга, тем самым, получаем матрицу склейки $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и метки на ребре $r = \infty, \varepsilon = -1$.

Образуется одна семья, в метку n идут только значения от входящих ребер областей A_λ, значит метка $n = -2$. Утверждение доказано.

Замечание 1 *Теперь мы можем пояснить название введеных нами областей. Инволютивная A_λ названа так, потому что 3-атом A, проекция которого лежит в данной области имеет нетривиальную метку на исходящем из него ребре. Область A^*_λ, очевидно, моделирует на особом слое атом бифуркации со звездой.*

Теорема 1 для случая проективной плоскости доказана.

Доказательство теоремы для случая бутылки Клейна.

Чтобы получить конструкцию, реализующую потоки на бутылке Клейна, нужно заменить область D на одну из двух областей с проскальзыванием. Аналогично реализации потоков на проективной плоскости каждая $A^*_{\lambda_i}$ будет на значении параметра $\Lambda = \lambda_i$ добавлять к седловому атому звезду и для инволютивного A_{λ_i} на ребре, соединяющем 3-атом A с седловым атомом, метка r будет равна $\frac{1}{2}$. Все отличие состоит в том, что теперь для движения по и против часовой стрелки используем вместо одной две области с проскальзыванием, так что грубая молекула будет иметь в сумме четыре ребра с дробной меткой r и звезд в седловых атомах.

Список литературы

[1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.* — Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.

[2] Козлов В. В., “Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем”, Докл. АН СССР, **249**:6 (1979), 1299–1302.

[3] Козлов В. В., *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Изд-во УдГУ, Ижевск, 1995.

[4] Kolokol’tsov V.N. *Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial in the velocities.* Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1983, 21:2, 291–306.

[5] Болсинов А.В., Матвеев В.С., Фоменко А.Т. “Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия”, Матем. сб., **189**:10 (1998), 5–32.

[6] Babenko I.K., Nekhoroshev N.N.*On complex structures on two-dimensional tori admitting metrics with nontrivial quadratic integral.* Math. Notes, **58**:5 (1995), 1129–1135

[7] Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В., “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 3, 15–25.

[8] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav’yalov. *Liouville foliations of topological billiards with slipping.* Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.

[9] Vedyushkina (Fokicheva) V.V., Fomenko A.T., *Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards.* Izv. Math. **83**(6), 1137–1173 (2019).

[10] Фокичева В.В., “Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., **206**:10 (2015), 127–176.