

УДК 517.938.5

**ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК¹****И. С. Харчева²**

Рассматривается класс интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы – бильярдные книжки, являющиеся обобщением бильярдов в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Этот объект важен для изучения, потому как моделирует другие известные случаи гамильтоновых систем. При изучении бильярдов в первую очередь возникает вопрос о топологии фазового пространства и изоэнергетического многообразия. В статье доказывается, что фазовое пространство и изоэнергетическое многообразие в случае бильярдных книжек действительно являются многообразиями.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, бильярд, изоэнергетическое многообразие.

We consider a class of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom – billiard books, which are a generalization of billiards bounded by arcs of confocal quadrics. They are an important object to research because they model other well-known Hamiltonian systems. The first question that arises in the research of billiards is concerned with the topology of the phase space and the isoenergy manifold. We prove that the phase space and the isoenergy manifold of any billiard book are actually manifolds.

Key words: integrable Hamiltonian system, billiard, isoenergy manifold.

Определение 1. Пусть закон движения $x(t)$ материальной точки в некотором топологическом пространстве Ω является непрерывной функцией и однозначно определяется начальным положением $x_0 \in \Omega$ и начальным вектором скорости v_0 в некоторый момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда для любого вектора скорости v_0 можно рассмотреть функцию, сопоставляющую начальному значению x_0 , закон движения $x(t)$ в пространстве непрерывных функций $C^0(\mathbb{R}, \Omega)$. Если функция, отображающая начальное положение x_0 в пространство $C^0(\mathbb{R}, \Omega)$, непрерывна, то будем говорить о *непрерывности закона движения $x(t)$ материальной точки в зависимости от начального положения*.

Определение 2. Рассмотрим компактную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается о гладкую часть границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. В остальных случаях движение этой материальной точки определяется исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения. Тогда *бильярдом* в области Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки.

Замечание 1. Движение материальной точки по прямой внутри области и отражение ее о гладкую границу задает непрерывный закон движения относительно начального положения. Особые случаи, такие как, попадание траектории в угол излома и касание границы доопределяются так, чтобы закон движения все также оставался непрерывным относительно начального положения. Это свойство бильярда гарантирует непрерывность фазового потока на фазовом пространстве.

Замечание 2 (о первых интегралах в бильярдах). У динамической системы бильярда есть один первый интеграл – гамильтониан, равный половине квадрата модуля вектора скорости. Значит, бильярд является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы. Из теории гамильтоновых систем следует, что для интегрируемости бильярда необходим еще один первый интеграл. В общем случае, для произвольной области Ω его может не существовать. Но если подобрать “хорошую” область Ω ,

¹Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867).

²Ирина Сергеевна Харчева – студент каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, стипендиант Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (договор № 18-2-6-50-1), e-mail: irina.harcheva1@yandex.ru.

то можно найти функцию, которая будет первым интегралом. Например, если Ω является прямоугольником, то интегралом будет являться угол наклона траектории, если кругом – то интегралом будет радиус окружности, которой касается траектория.

Есть еще один класс интегрируемых биллиардов, о котором пойдет речь ниже. Для его введения нам понадобится следующее определение.

Определение 3. Семейством софокусных квадрик называется множество кривых на плоскости \mathbb{R}^2 с евклидовыми координатами (x, y) , описываемых уравнением

$$x^2 \cdot (b - \lambda) + y^2 \cdot (a - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda),$$

где $a > b > 0$ – параметры этого семейства, а число $\lambda \in [-\infty, a]$ – параметр кривой из этого семейства или параметр квадрики.

Параметры семейства a, b будут фиксированы на протяжении всей работы, поэтому в дальнейшем мы будем говорить просто о семействе, не уточняя его параметров.

Замечание 3. Кривая из семейства софокусных квадрик является эллипсом при $\lambda \in [-\infty, b)$, гиперболой при $\lambda \in (b, a)$, прямой при $\lambda = a$ и при $\lambda = b$. Эллипсы и гиперболы из этого семейства имеют одни и те же фокусы и пересекаются под прямым углом. Прямая в случае $\lambda = b$ проходит через фокусы, а в случае $\lambda = a$ проходит через середину отрезка, соединяющего фокусы и ортогональна ему.

Определение 4. Рассмотрим элементарную биллиардную область – компактную область Ω в плоскости \mathbb{R}^2 , граница которой состоит из дуг софокусных квадрик (пример на рис. 1), пересекающихся под углом $\frac{\pi}{2}$, направленным внутрь области Ω . Биллиард в области Ω называется элементарным биллиардом.

Определение 5. В элементарной биллиардной области Ω дуга квадрики l называется *выпуклой*, если для каждой точки $x \in l$ существует такая окрестность $U(x)$, что $U(x) \cap \Omega$ является выпуклым множеством. В противном случае дуга называется *невыпуклой* (на рис. 1 дуги с номерами 1, 2 – выпуклые, 3, 4 – невыпуклые).

Замечание 4 (об особых траекториях в элементарном биллиарде). Опишем подробнее, как выглядит движение материальной точки элементарного биллиарда в области Ω в случаях, отличающихся от отражения о гладкую часть границы. Его мы определили исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения. Есть два случая такого движения.

1. Пусть траектория закона движения $x(t)$ попала в угол излома. Из определения элементарной биллиардной области следует, что он равен $\pi/2$. Без ограничения общности будем считать, что начальный момент времени t_0 был до попадания траектории в угол, но после последнего отражения о границу области, а также ориентируем область, как показано на рис. 2а. Рассмотрим малую окрестность U точки $x(t_0)$. Тогда для одного подмножества (U_1 на рис. 2а) начальных значений из окрестности U будут траектории, в которых материальная точка отразилась о левую границу, а потом о верхнюю, для другого подмножества (U_2 на рис. 2а) – сначала о верхнюю, потом о левую. Причем, так как угол равен $\pi/2$, то предел с обеих сторон будет одинаковым: материальная точка идет по прямой, попадает в угол, отражается и идет в обратную сторону вдоль той же прямой.
2. Пусть траектория $x(t)$ в момент времени t_1 касается гладкой части границы $\partial\Omega$. Если дуга, которой касается траектория, невыпуклая, то материальная точка продолжает движение по прямой. Если выпуклая, то траектория идет вдоль границы. Такой результат можно получить, рассмотрев, как и в предыдущем случае, близкие траектории. Эти два случая изображены на рис. 2б и 2в. На этих рисунках t_0 – начальный момент времени.

В. В. Козлов и Д. В. Трещёв в работе [1] обратили внимание на следующее свойство элементарного биллиарда.

Лемма 1. Звенья любой траектории в элементарном биллиарде либо лежат на касательных к фиксированной квадрике из того же семейства, что и граница элементарной биллиардной области, либо проходят через любой из фокусов (рис. 1).

Определение 6. Кривая, которой касаются звенья траектории в элементарном биллиарде, называется *каустикой*.

Замечание 5 (об интегрируемости элементарного бильярда). Элементарный бильярд является интегрируемой гамильтоновой динамической системой с двумя первыми интегралами (доказательство в работе [1]): гамильтонианом H , равным половине квадрата модуля вектора скорости и параметром каустики (поскольку каустика является кривой из фиксированного семейства, то ее можно задать одним параметром). Подробнее фазовое пространство и формулы описанных выше интегралов будут представлены позднее для более общего случая.

Если бильярд является интегрируемой гамильтоновой системой, то его можно исследовать в терминах топологических инвариантов Фоменко-Цишанга [2], которые позволяют говорить об эквивалентности с точностью до замыканий траекторий двух гамильтоновых систем. Например, бильярд в эллипсе был рассмотрен в работах В. Драгович, Е. Раднович [3, 4] и В. В. Фокичевой [5], бильярд в областях, ограниченных софокусными параболами, – в работе [6] В. В. Фокичевой, элементарный бильярд – в работе [7] В. В. Фокичевой.

Рассмотрим обобщение элементарного бильярда, сконструированное В. В. Ведюшкиной: склеим несколько элементарных бильярдных областей (листов), и пусть материальная точка, ударяясь о границу, переходит с одного листа на другой (рис. 3). Более детально:

Определение 7. *Бильярдной книжкой $\Delta B(W, \Sigma, \rho)$ называется динамическая система, описывающая движение материальной точки в двумерном клеточном комплексе $W = X^0 \cup X^1 \cup X^2$, таком что:*

1. $\rho : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ является непрерывным отображением таким, что ограничение его на любую двумерную клетку $e^2 \in X^2$ (лист) является гомеоморфизмом на элементарную бильярдную область, ограничение его на любую одномерную клетку $e^1 \in X^1$ является гомеоморфизмом на дугу квадрики из фиксированного семейства;
2. к одномерным клеткам $e^1 \in X^1$ приписаны перестановки $\Sigma(e^1)$, действующие на листах и описывающие переход материальной точки с одного листа на другой;
3. $\Sigma(e^1)$ является циклической перестановкой тех листов, границами которых является одномерная клетка e^1 ;
4. материальная точка внутри листов движется по прямой, а на их границе, попадая на одномерную клетку $e^1 \in X^1$, отражается по закону: “угол падения равен углу отражения” и переходит по перестановке $\Sigma(e^1)$ на другой лист;
5. траектории, которые касаются невыпуклых дуг (в смысле опр. 5 при отображении ρ), к которым приписаны нетождественные перестановки, неопределены в точках касания;
6. в остальных случаях движение этой материальной точки определяется исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения.

Замечание 6 (об интегрируемости бильярдной книжки). Смена листа в бильярдной книжке не изменяет направление траектории и скорость материальной точки. Значит, в бильярдной книжке есть те же интегралы, что и в элементарном бильярде: полная энергия и параметр каустики. Из этого следует, что бильярдная книжка, также как и элементарный бильярд, является интегрируемой гамильтоновой динамической системой. Но главное преимущество обобщения элементарного бильярда в том, что динамическая система бильярдной книжки устроена сложнее и позволяет моделировать больший класс других интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (подробнее в работе [8]). Например, в работах [9, 10] В. В. Ведюшкиной, А. Т. Фоменко, И. С. Харчевой было показано, что бильярдные книжки позволяют моделировать любые бифуркации двумерных торов Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем. Поэтому важно подробнее описать эту динамическую систему. Кроме того, в работах [11, 12] В. В. Фокичевой и А. Т. Фоменко была выполнена полная классификация топологических бильярдных книжек, являющихся частным случаем бильярдных книжек, в котором вдоль корешка склеивается только два листа.

Замечание 7 (о нумерации листов бильярдной книжки). Для удобства описания перестановок введем нумерацию на листах $N : X^2 \rightarrow \mathbb{N}$ и будем рассматривать перестановки уже не на листах, а на их номерах. При этом обозначение бильярдной книжки расширяется до $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$.

Определение 8. Пусть дана бильярдная книжка $\Delta B(W = X^0 \cup X^1 \cup X^2, \Sigma, \rho, N)$. Для каждой нульмерной клетки $e^0 \in X^0$ определим две перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ следующим образом. Пусть λ_1

и λ_2 – параметры двух квадратиков, проходящих, через точку $\rho(e^0)$, и $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда каждая одномерная клетка $e^1 \in X^1$, такая что $e^0 \in \partial e^1$, является дугой квадратика либо с параметром λ_1 , либо с параметром λ_2 . Тогда определим перестановку $\sigma_1(e^0)$ (и перестановку $\sigma_2(e^0)$) как композицию всех перестановок $\Sigma(e^1)$ для таких одномерных клеток $e^1 \in X^1$, что $e^0 \in \partial e^1$ и которые являются дугами квадратика с параметром λ_1 (и соответственно с параметром λ_2).

Лемма 2. В бильярдной книжке $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$ любую траекторию, попавшую на нульмерную клетку $e^0 \in X^0$, можно определить исходя из непрерывности ее закона движения относительно начального положения тогда и только тогда, когда перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ коммутируют.

Доказательство. Покажем сначала, что если для нульмерной клетки e^0 перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ не коммутируют, то существует траектория, продолжение которой невозможно определить после попадания в клетку e^0 так, чтобы ее закон движения был непрерывен относительно начального положения.

Так как $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0) \neq \sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)$, то существует такой лист i , что $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i) \neq \sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$. Тогда есть три случая:

- Листы с номерами i , $\sigma_1(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0)(i)$, $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$ при отображении ρ на плоскость совпадают в окрестности клетки e^0 . То есть, имеет место рис. 4а.
- Листы с номерами i , $\sigma_1(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0)(i)$, $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$ при отображении ρ на плоскость образуют случай, изображенный на рис. 4б в окрестности клетки e^0 .
- Листы с номерами i , $\sigma_1(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0)(i)$, $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$, $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$ при отображении ρ на плоскость образуют случай, изображенный на рис. 4в в окрестности клетки e^0 .

Тогда рассмотрим траекторию, которая идет по i -му листу и попадает в угол на клетку e^0 . Пусть она задается законом движения $x(t)$ с начальным моментом времени t_0 . Рассмотрим малую окрестность U точки $x(t_0)$. Тогда для одного подмножества (U_1 на рис. 4) начальных значений из окрестности U будут траектории, в которых материальная точка отразилась о квадратик с параметром λ_1 и перешла на лист с номером $\sigma_1(e^0)(i)$, а потом о квадратик с параметром λ_2 и перешла на лист с номером $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$, для другого подмножества (U_2 на рис. 4) – наоборот. Таким образом, в любой окрестности U вершины угла есть неблизкие друг к другу траектории, которые продолжают свое движение на разных листах $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$ и $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$, а значит, однозначно непрерывно определить траекторию, попавшую в вершину угла на i -ом листе мы не можем, так как пределы с разных сторон не совпадают. Это произошло из-за того, что перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ не коммутируют.

Обратно, пусть для нульмерной клетки e^0 перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ коммутируют. Тогда рассмотрим любую траекторию, попадающую на некоторую нульмерную клетку e^0 . Пусть она идет по листу с номером i . Тогда после прохождения клетки e^0 она в зависимости от расположений листов с номерами i и $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$ продолжит свое движение согласно рис. 4 на листе с номером $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$ (= $\sigma_2(e^0) \circ \sigma_1(e^0)(i)$). При этом, изображенные на рисунках траектории будут близкими, так как перестановки $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ коммутируют и угол в клетке e^0 равен $\pi/2$ для каждого листа.

Лемма доказана.

Замечание 8 (об особых траекториях в бильярдной книжке). Пусть дуга e^1 является невыпуклой для хотя бы одного листа, границей которого она является, и перестановка $\Sigma(e^1)$ не является тождественной. Тогда траекторию, которая касается дуги e^1 , невозможно определить из непрерывности ее закона движения относительно начального положения. Это происходит из-за того, что есть близкие ей траектории, которые продолжают движение по тому же листу, что и шли, и траектории, которые переходят по перестановке $\Sigma(e^1)$ на другой лист (рис. аналогичен рис. 2б).

В случае выпуклой дуги e^1 определить движение по непрерывности можно аналогично пункту 2 замечания 4 об особых траекториях в элементарном бильярде. Траектория будет идти вдоль выпуклой дуги, причем она будет принадлежать сразу всем листам, границей которых является дуга e^1 . Эти листы переставляет циклическая перестановка $\Sigma(e^1)$. Кроме того, заметим, что если бы перестановка $\Sigma(e^1)$ не была бы циклом, переставляющим эти листы, то определить по непрерывности движение вдоль выпуклой дуги было бы нельзя.

Описание фазового пространства бильярдной книжки.

Рассмотрим бильярдную книжку $\Delta B(W = X^0 \cup X^1 \cup X^2, \Sigma, \rho, N)$. Движение материальной точки по клеточному комплексу W задает динамическую систему бильярдной книжки $\Delta B(W, \Sigma, \rho, N)$ на фазовом пространстве M^4 . Точка на фазовом пространстве должна описывать состояние этой системы. Его можно задать положением материальной точки на комплексе и вектором скорости. Считаем, что вектор скорости

не равен нулю. На границе листов из-за отражения и перехода материальной точки с листа на лист, векторы скорости будут устроены сложнее: некоторые векторы необходимо будет склеить, чтобы движение отвечало движению материальной точки в бильярдной книжке.

Итак, нужно рассмотреть несвязное объединение всех листов, считая границу для каждого листа отдельно:

$$[X]^2 := \bigsqcup_{e^2 \in X^2} e^2.$$

Тогда фазовое пространство M^4 – это пространство кокасательного расслоения над $[X]^2$. Поскольку метрика плоская, то можем отождествить касательное и кокасательное расслоение. Учитывая отражение о границу листов и то, что вектор скорости не равен нулю, получаем:

$$M^4 = [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \sim, \quad (1)$$

где отношение эквивалентности описывает отражение о границу материальной точки и переход с листа на лист.

Опишем подробнее это отношение эквивалентности. Для этого нам понадобится определение проекции расслоения, введенное по аналогии с терминологией расслоений.

Определение 9. *Проекцией расслоения* назовем отображение $\pi : [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow W$, которое является композицией проекции $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ на $[X]^2$ и отображения $[X]^2$ на W , отображающее двумерные клетки в себя тождественно, а их границу в соответствующие клетки меньшей размерности.

Функцию N (из замечания 7 о нумерации листов бильярдной книжки), отвечающую номеру листа, можно расширить на многообразие $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ следующим естественным образом. Если $x \in X^2, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, то $\tilde{N}(x, v) = N(x)$. На границе доопределяем функцию

$$\tilde{N} : [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{N}, \quad (2)$$

по непрерывности. Поскольку границу каждого листа в $[X]^2$ мы считаем отдельно, то доопределить на границе по непрерывности мы можем.

Отношение эквивалентности в (1) задается по-разному в разных частях границы, так как отражение в них разное. А именно, есть три случая, изображенных на рис. 3: первый – отражение о границу, второй и третий определяются из непрерывности закона движения материальной точки в зависимости от начального положения и были описаны в лемме 2 и замечании 8 об особых траекториях в бильярдной книжке. Разберем эти три случая.

1. *Случай отражения о дугу.* Когда материальная точка попадает на дугу (одномерную клетку), то она отражается в зависимости от того, как располагаются листы. Есть два подслучая.

(а) Если листы находятся по одну сторону от дуги при отображении ρ на плоскость, то угол падения равен углу отражения. Иными словами, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in e^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$ (здесь);
- листы с номерами $\tilde{N}(x_1, v_1)$ и $\tilde{N}(x_2, v_2)$ находятся по одну сторону от дуги e^1 при отображении ρ на плоскость;
- $\Sigma(e^1)(\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$ (заметим, что номера листов могут совпадать);
- вектор v_1 направлен наружу листа с номером $\tilde{N}(x_1, v_1)$, а вектор v_2 – внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$, причем $v_1, v_2 \nparallel T_{\rho \circ \pi(x_1, v_1)} \rho(e^1)$;
- $|v_1| = |v_2|$ и $v_1 - v_2 \perp T_{\rho \circ \pi(x_1, v_1)} \rho(e^1)$.

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

(б) Если листы находятся по разные стороны дуги при отображении ρ на плоскость, то движение продолжается по прямой. Пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in e^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$;
- листы с номерами $\tilde{N}(x_1, v_1)$ и $\tilde{N}(x_2, v_2)$ находятся по разные стороны от дуги e^1 при отображении ρ на плоскость;

- $\Sigma(e^1)(\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$;
- вектор v_1 направлен наружу листа с номером $\tilde{N}(x_1, v_1)$, а вектор v_2 – внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$, причем $v_1, v_2 \nparallel T_{\rho\pi(x_1, v_1)}\rho(e^1)$;
- $v_1 = v_2$.

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

2. *Случай касания кривой границы.* Касание материальной точки выпуклой границы дает движение вдоль дуги квадрики, при касании невыпуклой – движение неопределено (определение 7 бильярдной книжки и замечание 8 об особых траекториях в ней). Однако, на фазовом пространстве эти два случая не отличаются. Дело в том, что такое положение материальной точки задает однозначно состояние динамической системы: материальная точка находится на некоторой одномерной клетке и идет по направлению касательной. Это состояние должно отвечать точке на фазовом пространстве. Но если в невыпуклом случае интегральная кривая достигает этой точки на фазовом пространстве за конечное время, то далее она однозначно не определяется. Поэтому на траекториях мы эту точку выкалываем, а на фазовом пространстве – нет.

Из замечания 8 об особых траекториях в бильярдной книжке следует, что когда траектория касается дуги квадрики, то она принадлежит сразу всем листам, граничащим с этой дугой. Иными словами, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) \in \bar{e}^1$ для некоторого $e^1 \in X^1$ (здесь рассматривается замыкание одномерной клетки, поэтому точка $\pi(x_2, v_2)$ может принадлежать некоторой нульмерной клетке);
- $\Sigma(e^1)(\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$;
- $v_1 = v_2 \parallel T_{\rho\pi(x_1, v_1)}\rho(e^1)$;

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

3. *Случай конической точки.*

Случай конической точки или случай попадания в угол на нульмерную клетку e^0 был описан в лемме 2. А именно, траектория переходит на лист по перестановке $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)$ и либо идет в обратном направлении, либо отражается о стенку, либо продолжает свое движение по прямой в зависимости от расположения листов, а $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ – перестановки из определения 8. Итак, есть три подслучая:

(а) Рассмотрим случай, изображенный на рис. 4а. Пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) = e^0$ для некоторой нульмерной клетки $e^0 \in X^0$;
- листы с номерами $\tilde{N}(x_1, v_1)$ и $\tilde{N}(x_2, v_2)$ в окрестности угла e^0 образуют случай рис. 4а, то есть совпадают при отображении ρ на плоскость;
- $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$;
- вектор v_2 направлен внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$, и $v_1 = -v_2$.

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

(б) Рассмотрим случай, изображенный на рис. 4б, который похож на обычное отражение о дугу, но номер листа, на котором будет продолжаться движение определен по-другому. Итак, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) = e^0$ для некоторой нульмерной клетки $e^0 \in X^0$;
- листы с номерами $\tilde{N}(x_1, v_1)$ и $\tilde{N}(x_2, v_2)$ в окрестности угла e^0 образуют случай рис. 4б, то есть при отображении ρ на плоскость они разделены некоторой дугой l из семейства софокусных квадрик;
- $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$;
- вектор v_1 направлен наружу листа с номером $\tilde{N}(x_1, v_1)$, а вектор v_2 – внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$;
- $|v_1| = |v_2|$ и $v_1 - v_2 \perp T_{\rho\pi(x_1, v_1)}l$.

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

(с) Рассмотрим случай, изображенный на рис. 4в. Пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют следующим условиям:

- $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) = e^0$ для некоторой нульмерной клетки $e^0 \in X^0$;
- листы с номерами $\tilde{N}(x_1, v_1)$ и $\tilde{N}(x_2, v_2)$ в окрестности угла e^0 образуют случай рис. 4в, то есть они диаметрально противоположны при отображении ρ на плоскость;
- $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(\tilde{N}(x_1, v_1)) = \tilde{N}(x_2, v_2)$;
- вектор v_2 направлен внутрь листа с номером $\tilde{N}(x_2, v_2)$;
- $v_1 = v_2$.

Тогда $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$.

Профакторизовав по описанному выше отношению эквивалентности, получаем фазовое пространство M^4 . Траектории в бильярдной книжке будут соответствовать некоторой кривой в M^4 . Также заметим, что на фазовом пространстве M^4 естественно определяется топология, полученная из топологии на клеточном комплексе и плоскости, отвечающей пространству векторов скорости.

Замечание 9. (Явный вид первых интегралов). Теперь, определив фазовое пространство M^4 , можем выписать явные формулы первых интегралов бильярдной книжки. Итак, пусть $m \in M^4$. Берем любой элемент m' из класса эквивалентности точки m , описанного выше. Это – точка из $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Рассмотрим отображение $\rho \circ \pi : [X]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Воспользуясь этим отображением, можем связать с $[X]^2$ декартовы координаты в плоскости \mathbb{R}^2 . А значит, точке m' можно сопоставить декартовы координаты (x_1, x_2, v_1, v_2) в пространстве \mathbb{R}^4 . Тогда интегралы имеют вид:

$$H = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \text{ – полная энергия; } (3)$$

$$\Lambda = \frac{(x_1 v_2 - x_2 v_1)^2 + v_1^2 b + v_2^2 a}{v_1^2 + v_2^2} \text{ – параметр каустики.}$$

Значение обоих интегралов не зависит от выбора представителя m' . Этот факт проверяется явной подстановкой в интегралы точек, которые мы отождествили. Это означает, интегралы корректно определены на всем фазовом пространстве M^4 .

Определение 10. *Изоэнергетическим многообразием* называется топологическое пространство $Q^3 := \{m \in M^4 : H(m) = h\}$ с топологией, индуцированной топологией на M^4 , где $h > 0$ – фиксированное число, а $H(m)$ – гамильтониан (в случае бильярдных книжек он задается уравнением (3)).

Замечание 10. Расширим определение 9 проекции расслоения. Нетрудно заметить, что в описанном выше отношении эквивалентности мы отождествляли только точки, у которых $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2)$. Это означает, что проекцию расслоения можно определить не на произведении $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, а на фазовом пространстве M^4 , то есть далее считаем, что:

$$\pi : M^4 \rightarrow W.$$

Перейдем к основному результату этой статьи.

Теорема. *Для любой бильярдной книжки топологическое пространство $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$, называемое изоэнергетическим многообразием, для фиксированного $h > 0$ является трехмерным многообразием.*

Доказательство. Пусть дана бильярдная книжка $\Delta B(W = X^0 \cup X^1 \cup X^2, \Sigma, \rho, N)$. Так как склейка по отношению эквивалентности была только на границе листов, то M^4 внутри листов гомеоморфно декартову произведению $X^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Исходя из вида интеграла H (замечание 9) получаем, что Q^3 внутри листов гомеоморфно декартову произведению $X^2 \times S^1$. Вдоль границы (на одномерных и нульмерных клетках) происходит склейка и части Q^3 , гомеоморфные декартову произведению $D^2 \times S^1$, склеиваются по закону отражения. Каждый случай отражения был подробно разобран в отношении эквивалентности при описании фазового пространства. Покажем, что эта склейка не выводит Q^3 из класса многообразия, то

есть склеивает внутренние части листов так, что в точках склейки существует окрестность, гомеоморфная трехмерному диску.

Итак, рассмотрим каждый из случаев склейки отдельно. Будем придерживаться такого же порядка, как и в описании фазового пространства.

1. *Случай отражения о дугу.* Пусть без ограничения общности листы находятся по разные стороны дуги при отображении ρ на плоскость. Если это не так, то в малой окрестности листы можно “развернуть”. Итак, пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют условиям пункта 1б в отношении эквивалентности и условию $|v_1|^2 = |v_2|^2 = 2h$. Второе условие гарантирует принадлежность точки рассматриваемому изоэнергетическому многообразию. Тогда рассмотрим полудиск на каждом из листов и малую дугу на окружности $|v_1|^2 = 2h$, содержащую точку v_1 (рис. 5а). Если склеить эти два полудиска в диск D^2 и рассмотреть его декартово произведение с дугой I , получится окрестность точки $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$ в топологическом пространстве Q^3 , которая является декартовым произведением $D^2 \times I$, гомеоморфным трехмерному диску.
2. *Случай касания кривой границы.* Рассмотрим точку $q = (x, v) \in Q^3$. Пусть точка x комплекса W лежит на некоторой одномерной клетке e^1 , а вектор v из пространства векторов скорости является касательным к этой дуге e^1 в точке x . Кроме того, поскольку $q \in Q^3$, то $|v|^2 = 2h$. Рассмотрим трансверсальный отрезок I к квадрике $\rho(e^1)$ в плоскости \mathbb{R}^2 (рис. 5б). Будем описывать множество $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$ в окрестности точки q . Мы рассматриваем трансверсальное сечение, чтобы сократить размерность изучаемого пространства до двух. Если мы покажем, что топологическое пространство $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$ в окрестности точки q гомеоморфно двумерному диску, то окрестность точки q будет гомеоморфна декартову произведению $D^2 \times D^1$, которое в свою очередь гомеоморфно трехмерному диску. Это верно, поскольку малый сдвиг вдоль дуги e^1 отрезка I не меняет прообраз $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$.

Итак, приступим к доказательству того, что топологическое пространство $\pi^{-1} \circ \rho^{-1}(I) \cap Q^3$ в окрестности точки q гомеоморфно двумерному диску. Пусть дуга e^1 соединяет листы с номерами $i_1, i_2 = \Sigma(e^1)(i_1), \dots, i_k = \Sigma(e^1)(i_{k-1})$ для наименьшего числа $k \in \mathbb{N}$ такого, что $i_1 = \Sigma(e^1)(i_k)$. Для точек $x' \in \rho^{-1}(I)$, лежащих внутри листов, окрестность в пространстве векторов скорости является малой дугой окружности $|v|^2 = 2h$, содержащей точку v . При приближении точек к одномерной клетке e^1 , эти дуги склеиваются. Видим, что вектор скорости, который касается дуги, принадлежит сразу всем листам: i_1, i_2, \dots, i_k . А в остальных случаях происходит отражение (случай 1) и склеиваются только векторы “соседних” листов (i_1 с i_2 , i_2 с i_3 и т.д.). После циклической склейки k двумерных дисков получаем общий двумерный диск, что завершает доказательство этого пункта.

3. *Случай конической точки.* В случае попадания в угол на нульмерную клетку e^0 траектория переходит на лист по перестановке $\sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)$ и либо идет в обратном направлении, либо отражается о стенку, либо продолжает свое движение по прямой в зависимости от расположения листов, где $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ – перестановки из определения 8. Сведем три подслучая из пункта 3 отношения эквивалентности к одному, “развернув”, как и в случае 1 отражения о дугу, листы, то есть будем считать, что имеет место рис. 4в.

Тут есть два подслучая. Один аналогичен случаю 1 отражения о дугу, второй – случаю 2 касания кривой границы. Рассмотрим их.

- (а) Пусть две точки $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in [X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ удовлетворяют условиям 3с отношения эквивалентности, условию $|v_1|^2 = |v_2|^2 = 2h$, и вектор $v_1 = v_2$ не является касательным ни к одной из двух дуг квадрик, проходящих через точку $\rho(x_1) = \rho(x_2)$ (рис. 5в). Тогда рассмотрим четверть диска на каждом из четырех листов листов $i = \tilde{N}(x_1, v_1), \sigma_1(e^0)(i), \sigma_2(e^0)(i), \sigma_1(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i)$ (функция \tilde{N} определена в формуле (2)) и малую дугу I на окружности $|v_1|^2 = 2h$, содержащую точку v_1 . Если склеить эти четыре части диска в диск D^2 и рассмотреть его декартово произведение с дугой I , получится окрестность точки $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$ в топологическом пространстве Q^3 , которая является декартовым произведением $D^2 \times I$, гомеоморфным трехмерному диску.
- (б) Рассмотрим точку $q = (x, v) \in Q^3$ такую, что x принадлежит некоторой нульмерной клетке e^0 , а вектор v касается одной из дуг l_1 или l_2 , проходящих через $\rho(e^0)$. Пусть без ограничения общности имеем случай, изображенный на рис. 5г, то есть вектор v касается квадрики l_1 с перестановкой $\sigma_1(e^0)$ (определение 8). Будем аналогично случаю 2 касания дуги рассматривать трансверсальные отрезки, чтобы уменьшить размерность.

Пусть один из листов, граничащих с e_0 имеет номер i_1 . Рассмотрим листы с номерами $i_1, i_2 = \sigma_1(e^0)(i_1), \dots, i_k = \sigma_1(e^0)(i_{k-1})$, где $k \in \mathbb{N}$ такое наименьшее число, что $i_1 = \sigma_1(e^0)(i_k)$. Также рассмотрим лист с номером $j_1 = \sigma_2(e^0)(i_1)$ и связанный с ним цикл, то есть листы с номерами $j_1, j_2 = \sigma_1(e^0)(j_1), \dots, j_{k'} = \sigma_1(e^0)(j_{k'-1})$, где $k' \in \mathbb{N}$ – такое наименьшее число, что $j_1 = \sigma_1(e^0)(j_{k'})$.

Покажем, что $k = k'$. В самом деле, в силу коммутативности перестановок $\sigma_1(e^0)$ и $\sigma_2(e^0)$ получаем, что

$$j_1 = \sigma_2(e^0)(i_1) = \sigma_2(e^0) \circ \sigma_1^k(e^0)(i_1) = \sigma_1^k(e^0) \circ \sigma_2(e^0)(i_1) = \sigma_1^k(e^0)(j_1).$$

Отсюда $k \geq k'$. Пропустив симметричные преобразования, получаем обратное неравенство $k' \geq k$, откуда и следует равенство $k = k'$.

Аналогично случаю 2, рассмотренному выше, получаем, что в прообразе трансверсального отрезка I_1 в окрестности точки q , содержащего точки листов с номерами i_1, i_2, \dots, i_k находится диск D_1^2 , изображенный на рис. 5г, в прообразе трансверсального отрезка I_2 , содержащего точки листов с номерами j_1, j_2, \dots, j_k – диск D_2^2 , изображенный на рис. 5г. Малый сдвиг этого отрезка вдоль дуги не меняет прообраза, за исключением случая, когда он проходит через клетку e^0 . Поэтому в обоих случаях мы получаем прообразы $D_1^2 \times D^1$ и $D_2^2 \times D^1$. А когда трансверсальный отрезок проходит через клетку e^0 , в прообразе получается диск, который одновременно содержит как точки листов i_1, i_2, \dots, i_k , так и листов j_1, j_2, \dots, j_k , то есть эти диски склеиваются. В итоге в прообразе точки q будет склейка $D_1^2 \times D^1 \cup D_2^2 \times D^1 = D^2 \times D^1$, гомеоморфная трехмерному диску.

Получили, что любая точка $q \in Q^3$ имеет окрестность гомеоморфную трехмерному диску, а значит Q^3 является трехмерным многообразием. Теорема доказана.

Следствие. Для любой бильярдной книжки фазовое пространство M^4 является четырехмерным многообразием, гомеоморфным декартову произведению изоэнергетического многообразия Q^3 и открытого одномерного диска.

Доказательство. Доказательство сразу следует из теоремы выше в силу произвольного выбора h , поскольку фазовое пространство M^4 – это объединение всех изоэнергетических многообразий при разных уровнях интеграла энергии $h > 0$.

Замечание 11. Заметим, что в доказательстве нигде не использовалось, что листы в бильярдной книжке являются элементарными бильярдными областями, то есть областями, ограниченными дугами софокусных квадрик. Важно только то, что углы в этих областях всегда равны $\pi/2$. Это позволяет корректно определить отражение материальной точки в углу. Поэтому теорема также верна для бильярда, склеенного из любых двумерных областей с кусочно-гладкой границей с углами излома $\pi/2$.

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям А.Т. Фоменко и В.В. Ведюшкиной за постановку задачи, существенную помощь и постоянное внимание к работе, Е.А. Кудрявцевой и А.А. Ошемкову за многочисленные полезные замечания и слушателям семинара по интегрируемым бильярдам, который проводится на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, за внимание и замечания к работе.

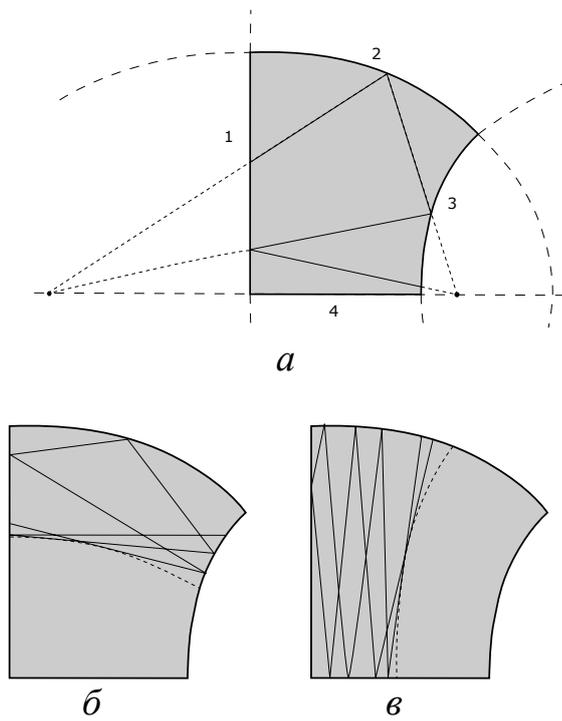


Рис. 1. Пример, иллюстрирующий дополнительный интеграл в элементарном бильярде. На рисунке а прямые, содержащие сегменты траекторий, проходят через любой из фокусов, б – касаются эллипса, в – касаются гиперболы.

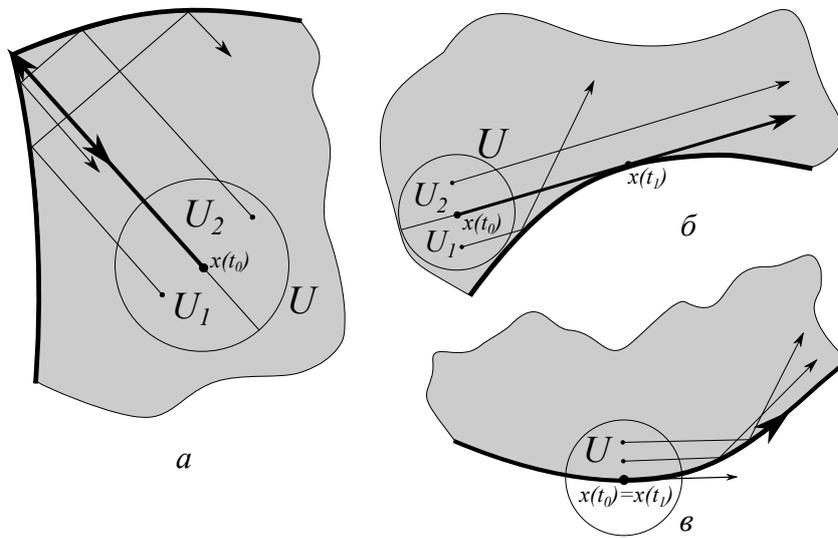


Рис. 2. Особые траектории в элементарном бильярде. На рисунке а траектория попадает в угол излома, б – касается невыпуклой дуги границы, в – идет вдоль выпуклой дуги границы.

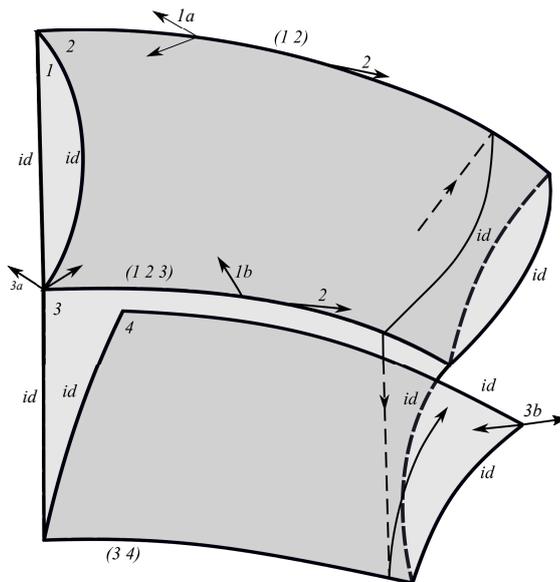


Рис. 3. Пример бильярдной книжки. На бильярдной книжке изображена траектория, которая идет вверх по первому листу, переходит на второй по циклической перестановке (1 2), идет вниз второму листу, переходит на третий по перестановке (1 2 3) и продолжает движение вниз, а после переходит четвертый лист по перестановке (3 4). На рисунке также изображены примеры точек на $[X]^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, которые считаются эквивалентными в фазовом пространстве M^4 (формула (1)). Примерам точек приписаны номера пунктов в описании отношения эквивалентности.

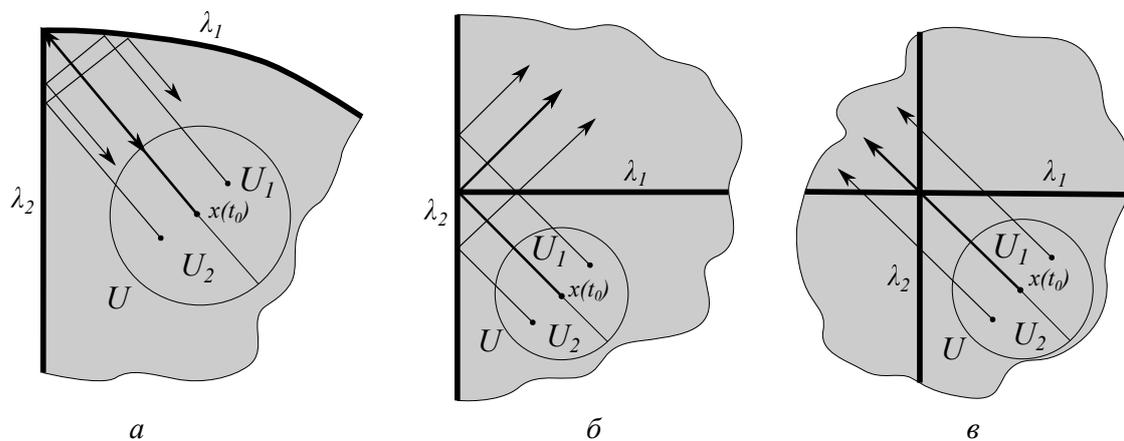


Рис. 4. Иллюстрация леммы 2.

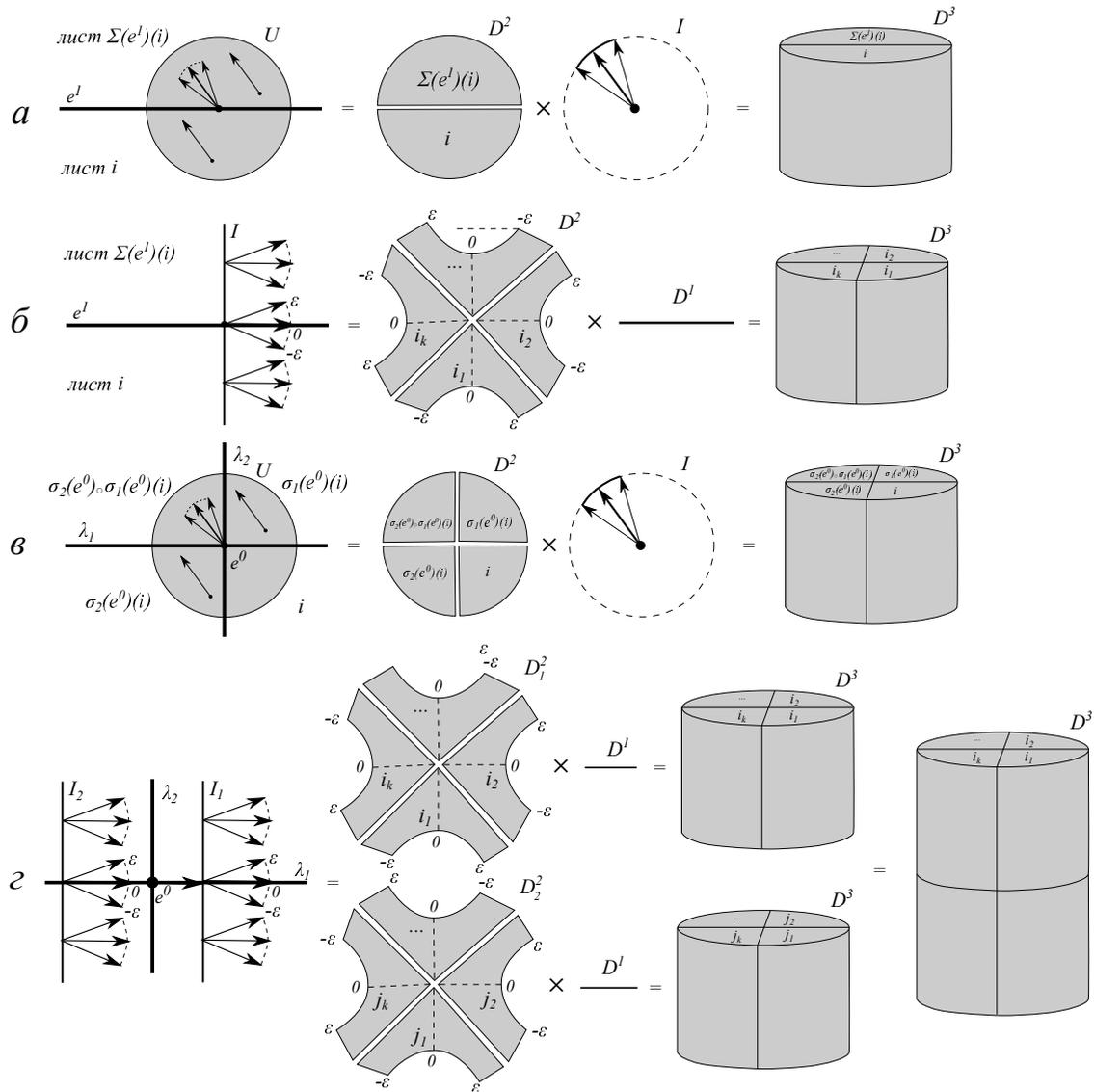


Рис. 5. Иллюстрация теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Козлов, Д. В. Трещёв. Генетическое введение в динамику систем с ударами // М.: Изд-во МГУ. 1991
2. А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация (т. 1,2) // М.: Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. 1999.
3. V. Dragovic, M. Radnovic. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dyn. Математический ин-т им.В.А.Стеклова РАН. 2009. 14. № 4-5. 479–494.
4. В. Драгович, М. Раднович. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе // М.: Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. 2010.
5. В. В. Фокичева. Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе” // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. М.: Издательство Московского университета. 2012. 5. 31–34
6. В. В. Фокичева. Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболой // Матем. сб. 2014. 205. № 8. 139–160.
7. В. В. Фокичева. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. М.: Издательство Московского университета. 2014. № 4. 18–27.
8. В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела // Доклады РАН, Математика. 465. № 2. 2015. 1–4.
9. В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируе-

- ных гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**. № 12. 17–56.
10. *В. В. Ведюшжина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева*. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами // Доклады Академии наук. 2018. **Т. 479**. № 6. 607–610.
11. *В. В. Фокичева*. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**. № 10. 127–176.
12. *В. В. Ведюшжина (Фокичева), А. Т. Фоменко*. Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Известия РАН. Математика. 2017. **81**. № 4. 3–50.
-