

# Реализация квадратичных геодезических потоков бильярдами с проскальзыванием

*В.Н. Завьялов, Москва  
МГУ имени М.В.Ломоносова*

## 1 Введение

Изучению геодезических потоков на двумерных замкнутых поверхностях, обладающих полиномиальным по компонентам импульса дополнительным интегралом, посвящено большое количество работ (достаточно подробно история вопроса освещена в [1, гл. 2-3 т.2]). Отметим важный результат В.В.Козлова [2, 3] о несуществовании (в аналитической категории) дополнительных интегралов у геодезического потока на компактном римановом 2-многообразии, если многообразие имеет род 2 и выше. При этом условие аналитичности многообразия избыточно, если речь идет о полиномиальной интегрируемости, т.е. ведется поиск полиномиального по компонентам импульса интеграла ([1, комм. 2 к теореме 2.1, т.2]).

В случае интегралов степени 1 и 2 (т.е. линейно или квадратично интегрируемых геодезических потоков) был полностью решен ряд задач о классификации таких потоков. Напомним, что такие потоки можно классифицировать с точки зрения канонического вида метрики, топологии слоения Лиувилля (лиувиллевой эквивалентности), траекторной и геодезической эквивалентностей [5]. В случае интегралов более высоких чем 2 степеней вопрос остается открыт (имеются примеры геодезических потоков на 2-многообразиях с интегралом степени 3 или 4.).

Важные результаты В.Н. Колокольцова [4] затем были развиты и дополнены в работах И.К. Бабенко, Н.Н. Нехорошева, В.С. Матвеева (см. [1], а также [4], [6]). В частности, В.С. Матвееву удалось получить топологическую классификацию линейно интегрируемых геодезических потоков на неориентируемых поверхностях путем изучения инволюции, действующей на фазовом пространстве такого потока, заданного на соответствующей ориентируемой поверхности. В настоящей работе мы промоделируем геодезические потоки с квадратичным интегралом на проективной плоскости с помощью бильярдов из недавно введенного А.Т.Фоменко [7] (см. также [8]) класса бильярдов с проскальзыванием (и введения проскальзывания вдоль граничных дуг топологических бильярдов, введенных В.В.Ведюшкиной в [10]).

Автор выражает благодарность А.Т. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, В.В. Ведюшкиной за многочисленные ценные обсуждения и В.А. Кибкало за ряд существенных замечаний при написании данной работы. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 20-71-00155) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

## 2 Топологические бильярды с проскальзыванием

Стандартные бильярдные системы описывают движение точки внутри области с естественным отражением на границе, допускающей конечное число изломов с углом  $\frac{\pi}{2}$ . Фиксируем координаты  $(x, y)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим семейство софокусных квадратиков с центром в начале координат

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \quad \lambda \leq a.$$

Бильярд, ограниченный дугами софокусных квадратиков, является интегрируемым, поскольку траектории касаются некоторой софокусной квадратика, одной и той же для всех отрезков траектории.

Пусть  $F$  - изометрия эллипса, переводящая точку  $x$  в диаметрально противоположную ей точку  $y$ . С точки зрения самого эллипса это означает поворот радиус-вектора точки  $x$  на угол  $\pi$ . Биллиард внутри эллипса с введенной изометрией на границе будем называть *биллиардом с проскальзыванием*.

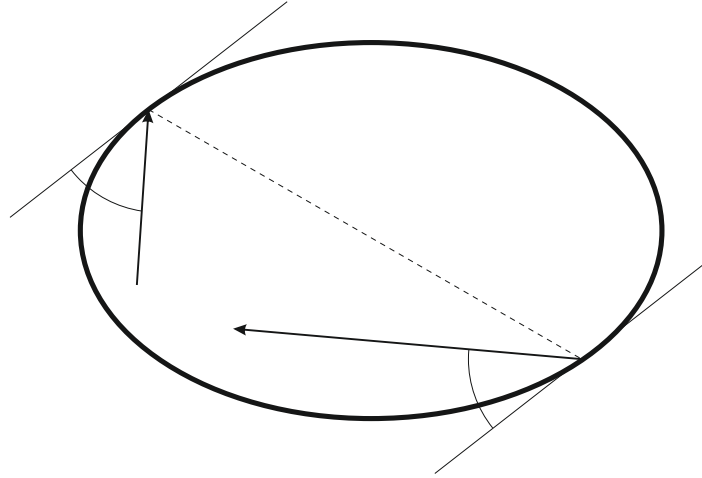


Рис. 1: Движение материальной точки в диске с проскальзыванием.

Как показано в статье [8], такая биллиардная система будет также интегрируема с тем же дополнительным интегралом: поворот на угол  $\pi$  сохранит касание траектории софокусной квадрики, отвечающей данному значению интеграла. Также в этой статье был рассмотрен биллиард с проскальзыванием в области, ограниченной эллипсом. Данный биллиард моделирует пример геодезического потока на проективной плоскости, имеющего квадратичный по импульсам дополнительный интеграл.

Напомним конструкцию склейки двух биллиардов вдоль общей границы, введенную В.В. Ведюшкиной в работе [10]. Пусть два биллиарда имеют общую границу и на плоскости располагаются относительно этой границы с одной стороны. Склеим области биллиардов вдоль дуг их границ по их изометриям. Материальная точка при движении по одному листу биллиарда после удара о границу склейки продолжит двигаться в области другого биллиарда. В случае, если склеиваемые биллиарды – плоские биллиардные области, а результат склейки – ориентируемое многообразие, то это определение склейки топологического биллиарда, введенное В.В. Ведюшкиной.

Рассмотрим плоские области, ограниченные дугами квадрик софокусного семейства. Параметры дуг внешнего эллипса, которые ограничивают нашу область, всегда будем считать  $\lambda = 0$ . Считаем, что одна из граничных дуг лежит на оси  $Oy$  – вырожденной гиперболе  $\lambda = a$ . Также введем обозначение для граничных дуг. Дуги большего эллипса будем называть “внешними эллиптическими”, а меньшего – “внутренними эллиптическими”. Дуги большей гиперболы будем называть “внешними гиперболическими”, а меньшей – “внутренними гиперболическими”. Области, которые мы будем использовать в данной работе, показаны на рис. 2.

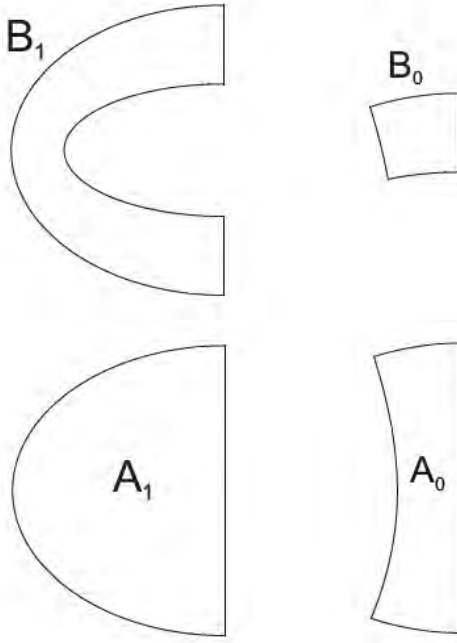


Рис. 2: Элементарные бильярдные столы. В верхней строке нарисованы  $B_1$  (слева) и  $B_0$  (справа). В нижней строке  $A_1$  (слева) и  $A_0$  (справа).

### 3 Основной результат

**Утверждение 1 (Матвеев В.С.) [1, гл. 3 т.2]** Пусть на проективной плоскости задана метрика  $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$ , где функции  $f$  и  $g$  гладкие, четные (подробнее см. [1, т.2 гл. 2 теорема 2.24]). Отвечающая этому геодезическому потоку молекула  $\widetilde{W}$  показана на рис. 4. В данных графах-молекулах присутствуют только атомы  $B_n$  и  $B_n^*$ . Эти графы-инварианты обладают следующими числовыми метками:

- На внутренних ребрах графов  $\widetilde{W}(f)$  и  $\widetilde{W}(g)$  метки таковы. На ребрах между седловыми атомами  $r$ -метки равны бесконечности. Между седловыми атомами и атомами  $A$  метки  $r$  равны нулю, за исключением тех случаев, когда атом  $A$  (т.е. локальный максимум функции) отвечает неподвижной точке инволюции. В этом случае  $r$ -метка равна  $\frac{1}{2}$ .
- На оставшихся четырех ребрах метки указаны на рис. 4.
- Количество звезд и меток  $\frac{1}{2}$  в сумме равно четырем. По одной в каждом подграфе  $\widetilde{W}(f)$  или  $\widetilde{W}(g)$ .

Основной результат нашей работы составляет следующую теорему.

**Теорема 1 (Завьялов В.Н.)** Любой геодезический поток на проективной плоскости, обладающий квадратичным по импульсам дополнительным интегралом, лиувиллево эквивалентен

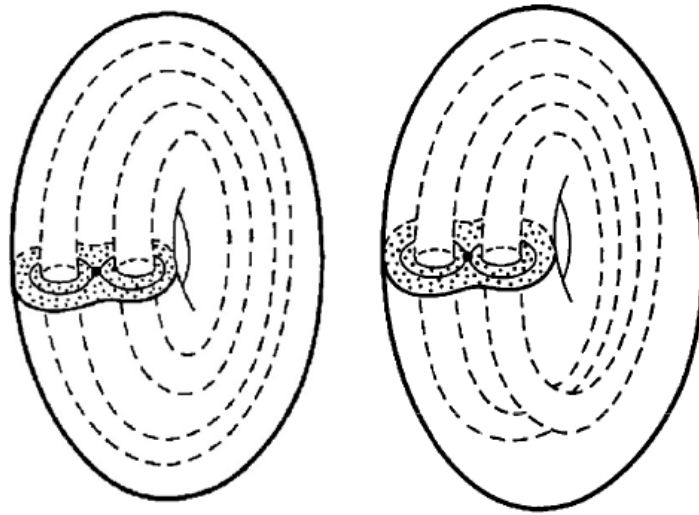


Рис. 3: Трехмерные атомы  $B$ (слева) и  $A^*$ (справа).

топологическому бильярду с проскальзыванием, состоящему из плоских бильярдов, ограниченных кривыми из фиксированного софокусного семейства. При этом квадратичный интеграл такого потока сводится к каноническому на бильярде.

**Замечание 1** Полученная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой. Дело в том, что слоение Лиувилля бильярда на таком ориентируемом  $Q^3$  является, вообще говоря, лишь кусочно-гладким. Тем не менее, неособые слои гомеоморфны торами, особенности послойно гомеоморфны боттовским 3-атомам, а особые окружности седловых 3-атомов ориентированы одинаково. Иными словами, определен аналог инварианта Фоменко— Цишанга, позволяющий сравнивать слоения бильярдов друг с другом.

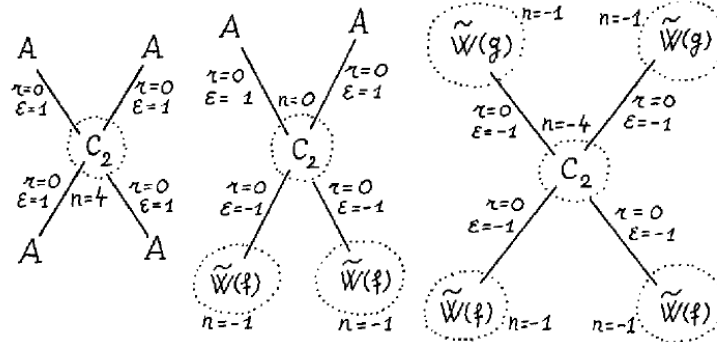


Рис. 4: Все молекулы геодезического потока с квадратичным интегралом на проективной плоскости.

### 3.1 Алгоритмическое построение стола бильярда, моделирующего геодезический поток

В данной работе мы будем пользоваться терминологией и обозначениями топологических бильярдов, введенной В.В. Ведюшкиной [12]. Рассмотрим гомеоморфный диску топологический бильярд  $\Delta = \Delta_\alpha(A_1 + mA_0 + 2nB_1 + 2mnB_0 + A_1)$ . Опишем, как склеивается данный бильярд. Склеиваем последовательно “экземпляры” по гиперболическим границам  $2n$  областей  $B_0$  так, чтобы у двух из них не были склеены внешние гиперболические границы. Приставим одной из них номер 1, а другой  $2n$ . Далее поставим номер 2 области  $B_0$ , имеющей с областью  $B_0$  с номером 1 общее ребро. Продолжим далее расставлять номера областям  $B_0$ , пока не дойдем до области  $B_0$  с номером  $2n$ . Это возможно, так как склейка проводилась последовательно, то есть по одной границе склеивались только два листа. Берем два таких экземпляра. Как уже говорилось ранее, у каждого из них есть два вертикальных ребра (внешние гиперболические границы), не участвующие в склейках. К ним приклеиваем по области  $B_0$ . Такой бильярдный стол гомеоморфен кольцу. Аналогично склеиваем бильярдный стол, гомеоморфный диску из областей  $A_0$  и  $A_1$ . Далее последовательно склеиваем данные кольца по эллиптическим границам. По одной из двух оставшихся границ приклеиваем диск. Далее по границе диска (то есть на последнем кольце из  $B_0$  и  $B_1$ ) вводим проскальзывание следующим образом: точка, попадая на границу области  $B_1$ , выходит из другого листа  $B_1$  этого кольца с поворотом на  $\pi$ . Если точка попадает на лист  $B_0$  с условным номером  $k$ , то она выходит во втором экземпляре кольца из листа  $B_0$  с условным номером  $2n - k$  с поворотом на угол  $\pi$ . Склейка показана наглядно на рис. 5. Черным выделена граница, по которой вводится проскальзывание. Такой бильярд назовем  $\tilde{\Delta}$ .

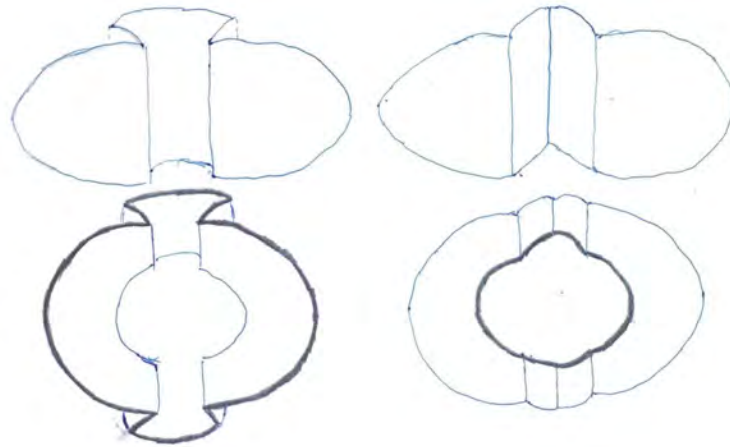


Рис. 5: Наглядная склейка бильярдного стола  $\tilde{\Delta}$ . Черным указаны эллиптические дуги, на которых введено проскальзывание.

Построим по бильярду  $\tilde{\Delta}$  кусочно-линейную функцию  $\hat{f}$ . Возьмем бильярд  $\Delta_\alpha(A_1 + mA_0 + nB_1 + mnB_0 + A_1)$ . Вырежем из элементарных бильярдов  $A_1$  и  $A_0$  вырожденный эллипс, соответствующий параметру  $\lambda = b$ , который является отрезком между фокусами. Полученное многообразие гомеоморфно цилиндру, так как мы удалили из диска отрезок, непересекающий край диска. Возьмем образующую полученного цилиндра, образованную дугами некоторой гиперболы. Она состоит из отрезков  $p_i$ . Если  $\tilde{\Delta}$  содержит проскальзывание на внешних эллиптических дугах, то рассмотрим точки с координатами  $(i + 1/2, b - \lambda_i)$ , где числа  $\lambda_i$  есть наименьший параметр эллипсов, которые пересекают отрезок  $p_i$ . Дополним их точкой  $(n + 3/2, 0)$ . Назовем

эти точки *минимальными*. Рассмотрим точки с координатами  $(i, b)$ , расположенные между минимальными точками. Соединим последовательно точки в ломаную, так чтобы минимальные точки были бы минимумами возникающего графика функции. Добавим к этой ломаной её отражение вдоль оси  $Oy$ . Функцию, график которого есть полученная симметричная ломаная, обозначим через  $\hat{f}$ . Если  $\tilde{\Delta}$  содержит проскальзывание на внутренних эллиптических дугах, то точки минимума расположим в точках  $(i, b - \lambda_i)$ , а точки максимума — в точках  $(i/2, b)$ , дополняя минимальной точкой  $(n + 1, 0)$ . Ломаную, построенную по данным точкам с её отражением также назовем  $\hat{f}$ .

Теперь построим функцию  $\hat{g}$ . Вырежем из  $A_1$  и  $B_1$  вырожденную гиперболу, соответствующую параметру  $\lambda = b$ . Эта гипербола является двумя открытыми лучами, исходящих из фокусов и лежащих на фокальной прямой. Рассмотрим отрезок между фокусами. Он состоит из отрезков  $q_i$ , которые соответствуют отрезкам пересечения областей  $A_1$  и  $A_0$  с вырожденным эллипсом. Определим функции  $g_i = l(x) - b$ , где  $l(x)$  - параметр гиперболы, проходящей через точку  $x \in q_i$ . Построим единую функцию  $G = g_i, x \in q_i$ . Функция  $\hat{g}$  получается из функции  $G$  сдвигом графика функции так, чтобы ось симметрии графика  $G$  лежала на оси  $Oy$ .

Рассмотрим интегрируемый геодезический поток на проективной плоскости. Тогда он однозначно задается гладкими четными функциями  $f$  и  $g$ , которые обращаются в нуль только на концах своих областей определения. Рассмотрим график этих функций и заменим их ломаными, соединив точки минимума и максимума. Далее сохраняя взаимное расположение минимумов и максимумов, изменим графики так, чтобы

- либо все минимумы оказались бы в целых ненулевых точках, максимумы — в половинных вида  $i/2$ , и значения в максимумах стали бы равными 1,
- либо наоборот минимумы в половинных, а максимумы со значением равным единице в целых.

В результате мы получим, соответственно, функции  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$ . По данным функциям можно построить бильярд с проскальзыванием  $\tilde{\Delta}$ . Это и будет бильярд, лиувиллево эквивалентный исходному геодезическому потоку. Для этого осталось показать, что инвариант Фоменко-Цишанга, вычисленный по бильярду  $\tilde{\Delta}$ , совпадает (после замены  $f$  и  $g$  на  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$ ) с инвариантом, изображенным на рисунке 4.

**Предложение 1** *Бильярдный стол  $\tilde{\Delta}$ , построенный по данной конструкции, после отождествления всех стрелок на границах инволютивных областей окажется гомеоморфен проективной плоскости.*

**Доказательство:** Склеивкой областей  $B_0$  и  $B_1$  мы получали кольцо, то есть цилиндр. Поверхность, полученная последовательной склейкой цилиндров, также гомеоморфна цилиндру. Одно кольцо после отождествления точек, соответствующих вводу проскальзывания, гомеоморфно ленте Мебиуса. Тогда полученный бильярдный стол гомеоморфен цилиндру, вдоль границ которого приклеены лента Мебиуса и диск. Это и будет проективной плоскостью. Утверждение доказано.

## 4 Доказательство основной теоремы в случае $\mathbb{R}P^2$

### 4.1 Шаг 1. Вычисление грубой молекулы.

Рассмотрим график непрерывной неотрицательной функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$ , принимающей на концах этого отрезка равные нулевые значения. Дополнительно положим, что нулевые зна-

чения могут приниматься функцией только на концах того же отрезка. Расслоим область под графиком функции на отрезки, образованные пересечением  $y = const$  с областью под графиком функции. Стянем каждый отрезок в точку. В результате область, расположенная между графиком и прямой  $y = 0$ , превратится в дерево.

Сопоставим вершинам полученного графа следующие атомы. Точкам, прообразы которых были максимумами функции  $f$ , сопоставим атомы  $A$ . Всем остальным вершинам сопоставим атомы  $B_k$ , где  $k$  – это количество минимумов, через которые проходит соответствующий горизонтальный отрезок (см. рис. 5 для произвольной положительной функции  $f$ ). Назовем такой граф  $W(f)$ .

Теперь рассмотрим графики функций  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$ . Так как значения наших функций  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  нулевые только на концах отрезка, то построим по  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  графы  $W(\hat{f})$  и  $W(\hat{g})$ , соответственно. В нашем случае полученные графы  $W(\hat{f})$  и  $W(\hat{g})$  являются симметричными, так как функции  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  были симметричными. Перейдем к графам  $\widetilde{W}(\hat{f})$  и  $\widetilde{W}(\hat{g})$ , профакторизовав полученные молекулы по имеющейся симметрии. Пусть ось симметрии проходит через атом  $B_k$ .

1. Пусть она проходит через максимум, лежащий на оси  $Oy$ , то есть при факторизации она переходит в себя. В этом случае имеем атом  $B_{2k}$ , так как минимум не лежит на оси симметрии, то получаем, что число минимумов четно. При факторизации число минимумов уменьшится вдвое и перейдет в атом  $B_k$ .

2. Пусть она проходит через минимум, лежащий на оси  $Oy$ . Исходя из четности числа минимумов вне оси, получаем, что ось проходит через атом  $B_{2k+1}$ . При данной симметрии это точка на оси симметрии неподвижна, а число минимумов вне оси уменьшается вдвое, следовательно, атом факторизуется в атом  $B_k^*$ .

Это построение совпадает с построением графов  $\widetilde{W}(f)$  и  $\widetilde{W}(g)$  для геодезического потока на проективной плоскости, характеризующегося функциями  $f$  и  $g$ .

Фиксируем уровень интеграла  $0 < \lambda < b$ . Ему будет соответствовать некоторая горизонтальная прямая  $y = c < 1$ , где  $c = b - \lambda$ . На данном уровне интеграла траектории касаются эллипса. Рассмотрим соответствующую этому значению интеграла поверхность уровня и спроецируем её на бильярд. Проекция поверхности уровня может быть получена удалением из каждого бильярда в составе бильярда  $\widetilde{\Delta}$  внутренности эллипса параметра  $\lambda$ . В результате такого удаления бильярд  $\widetilde{\Delta}$  распадается на несколько компонент связности. Все они (быть может, кроме одной) гомеоморфны цилиндрам. Оставшая область (при наличии таковой) будет гомеоморфна листу Мебиуса.

Отметим, что число компонент связности совпадает с количеством отрезков, высекаемых прямой  $y = c$  под графиком функции  $\hat{f}$  при  $x > 0$ .

Пусть прямая  $y = c$  не проходит через минимумы функции  $\hat{f}$ . Тогда прообраз каждого цилиндра и каждой ленты Мебиуса есть некоторый двумерный тор (по аналогии с топологическими бильярдами и простейшими бильярдами с проскальзыванием, см. работы [8, 10]).

Пусть прямая  $y = c$  проходит через несколько минимумов функции, но при этом не проходит через возможный минимум, лежащий на оси  $Oy$ . Тогда, как и в топологических бильярдах, бифуркация на данном уровне описывает склейку нескольких торов в один вдоль критических окружностей, соответствующих невыпуклым склейкам вдоль эллиптических дуг, соответствующих параметру  $b - c$ . Несложно убедиться, что эта бифуркация описывается атомом  $B_k$ , где  $k$  – это количество положительных минимумов, которых касается прямая  $y = c$ .

Пусть прямая  $y = c$  проходит через несколько минимумов функции, в том числе через минимум, лежащий на оси  $Oy$  (в этом случае бильярд  $\widetilde{\Delta}$  содержит проскальзывание на эллиптических дугах, соответствующих параметру  $b - c$ ). Тогда можно показать, что бифуркация описывается атомом  $B_k^*$ , где  $k$  – это количество положительных минимумов, в которых пря-

мая  $y = c$  касается графика функции. Отменим проскальзывание на внутренних эллиптических дугах. Тогда соответствующая бифуркация описывается атомом  $B_k$ . На особом слое атома  $B_k$  выделим особую окружность – прообраз внутренних эллиптических дуг. Она будет единственной из построения. При значениях интеграла, меньших чем  $b - c$ , этот прообраз будет пустым, а при больших – состоять из двух окружностей. Разрежем 3-атом по прообразу этих дуг, а затем вернем проскальзывание на этих дугах. В результате получим, что эта выделенная окружность на особом слое атома  $B_k$  склеится с собой дважды. Эта склейка, будучи распространена на весь атом (т.е. и на неособые слои), приводит к образованию атома  $B_k^*$ , как склейка тора по выделенному циклу (так что цикл обходит себя дважды) приводит к образованию особого слоя атома  $A^*$ .

Полученная в результате грубая молекула имеет вид  $\widetilde{W}(\hat{f})$ , что и требовалось показать.

Фиксируя уровень интеграла  $b < \lambda < a$ , аналогичными рассуждениями грубая молекула совпадает с построением  $\widetilde{W}(\hat{g})$ .

## 4.2 Шаг 2. Вычисление меток меченой молекулы.

**Предложение 2** *На ребрах между седловыми атомами в  $\widetilde{W}(f)$  стоят метки  $r = \infty$ . Между седловыми атомами и атомами  $A$  – метки  $r = 0$ , за исключением тех случаев, когда атом  $A$  отвечает неподвижной точке инволюции на фазовом пространстве [1] (в построении выше это означает, что отвечающий этому атому  $A$  максимум лежит на оси  $Oy$ ). В этом случае метка  $r = \frac{1}{2}$ .*

### Доказательство:

При выборе циклов на граничных торах 3-атомов мы будем изображать их с помощью проекции на бильярд  $\widetilde{\Delta}$ . Изобразим на столе бильярда получаемые кривые и оснастим их подходящими векторами скорости.

Напомним правила выбора циклов. На граничных торах атомов  $A$  в качестве однозначно выбранного цикла  $\lambda$  выбирается цикл, который стягивается в точку внутри полнотория  $A$ . В качестве цикла  $\mu$  выбирается любой цикл дополняющий его до базиса. При стремлении к особому слою цикл  $\mu$  переходит в критическую окружность. Это позволяет однозначно определить на нём ориентацию (она должна совпасть с ориентацией критической окружности). На граничных торах седловых атомов циклы  $\lambda$  выбираются гомологичными слоям расслоения Зейферта. Для атомов без звездочек это означает, что они должны быть гомологичны (и сонаправлены) критическим окружностям при достижении торами особого слоя. Циклы  $\mu$  для атомов без звездочек выбираются как граничные окружности двумерного атома – трансверсального критической окружности сечения 3-атома. Если так поступить для атома со звездочкой, то может возникнуть (и как правило в реальных задачах возникает) следующая ситуация. Возникающие циклы  $\hat{\mu}$  могут пересекать цикл  $\lambda$  в двух точках. В нашем случае атома  $B_k^*$  на одном торе цикл  $\hat{\mu}$  пересечет  $\lambda$  в одной точке, а на другом в двух. Тогда на том торе, где пересечение есть одна точка в качестве базисного цикла  $\mu_s$  берем  $\hat{\mu}$ , а на другом –  $\frac{\hat{\mu} + \lambda}{2}$  (см. подробнее в книге А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]).

Пусть бильярд  $\widetilde{\Delta}$  содержит проскальзывание на внешних эллиптических дугах. Тогда проекции циклов на плоские бильярды, входящие в состав бильярда  $\widetilde{\Delta}$ , и вектора скоростей циклов изображены на рисунке 6. Стрелки, которыми снабжены точки кривых, показывают, как выглядит вектор скорости в прообразе проекции тора на бильярд. Выбор циклов для атома  $B_k$  повторяет идею выбора циклов в работах [8, 11]. Если проекция тора не затрагивает



области с проскальзыванием, то на ребрах между седловыми атомами и атомами  $A$  матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = 0, \varepsilon = 1$ , вклад в метку  $n$  здесь нет. Если проекция затрагивает область с проскальзыванием, то на ребрах между седловыми атомами и атомами  $A$  матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$ . Эта матрица вносит вклад в семью, равный  $[-\frac{1}{2}] = -1$ . На ребрах между седловыми атомами матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .

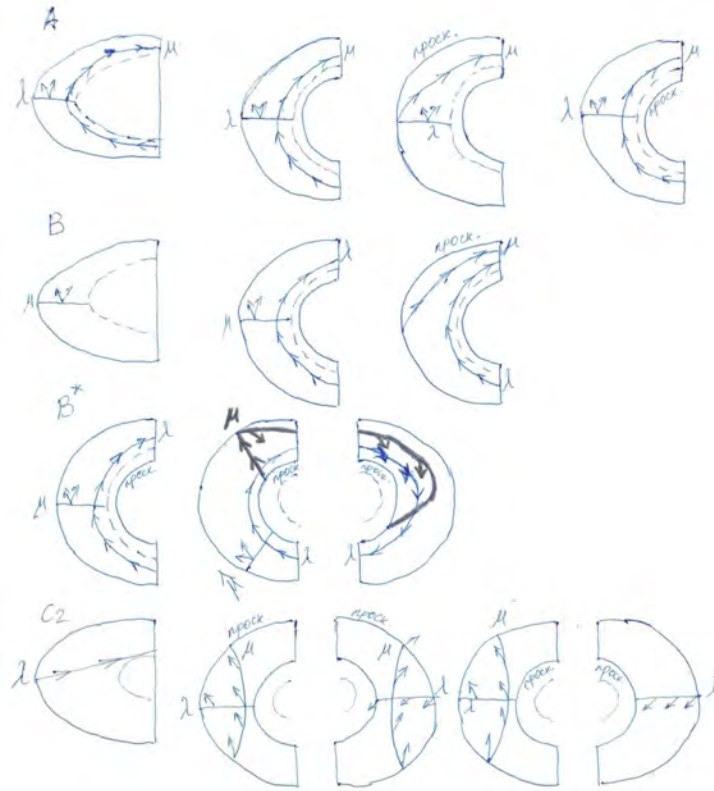


Рис. 6: Циклы билиарда  $\tilde{\Delta}$ , когда софокусная квадрика — эллипс.

Пусть билиард  $\tilde{\Delta}$  содержит проскальзывание на внутренних эллиптических дугах. Тогда проекции циклов на плоские билиарды, входящие в состав билиарда  $\tilde{\Delta}$ , и вектора скоростей циклов изображены на рисунке 6. Стрелки, которыми снабжены точки кривых, показывают, как выглядит вектор скорости в прообразе проекции тора на билиард.

Для атомов  $B_k$ , расположенных в молекуле ниже уровня атома со звездочкой, циклы выбираются также, как и в предыдущем случае. Поясним выбор циклов на граничных торах атома со звездочкой. В качестве циклов  $\hat{\mu}$  можно взять прообраз отрезков прямой, проходящей через начало координат. На нижнем уровне интеграла таких циклов будет два, каждый из них пересечет цикл  $\lambda$  в одной точке (см. рис. 9). Для выбора цикла  $\mu_s$  берем один из них. На нижнем уровне интеграла этот цикл будет пересекать циклы  $\lambda$  дважды. Поэтому в качестве цикла  $\mu_s$  берем полусумму  $\hat{\mu}$  и  $\lambda$ . Итоговый цикл изображен на рис. 9 в нижней строке. При этом его проекция на промежуточные билиарды  $B_\lambda$  выглядит так же, как и ранее, и лежит на фикси-

рованном радиусе семейства окружностей. Эти же пары  $\lambda$  и  $\mu_s$  необходимо выбирать в качестве циклов на граничных торах атомов  $B_k$ , расположенных выше уровня атома со звездочкой.

На ребрах между седловыми атомами и атомами  $A$  матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = 0, \varepsilon = 1$ , вклад в метку  $n$  здесь нет. На ребрах между седловыми атомами матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .

**Предложение 3** На ребрах между седловыми атомами в  $\widetilde{W}(g)$  стоят метки  $r = \infty$ . Между седловыми атомами и атомами  $A$  — метки  $r = 0$ , за исключением тех случаев, когда атом  $A$  отвечает неподвижной точке инволюции на фазовом пространстве [1] (в построении выше это означает, что отвечающий этому атому  $A$  максимум лежит на оси  $Oy$ ). В этом случае метка  $r = \frac{1}{2}$ .

**Доказательство:**

Пусть ось симметрии биллиарда  $\tilde{\Delta}$  проходит по внешним гиперболическим дугам. Обозначим параметр внутренней гиперболической дуги областей, содержащих ось симметрии, через  $\lambda = c$ . Выбор циклов атомов  $B_k$  разбивается на три случая. На рисунке 7 в нижней строке в пункте 1 показан выбор циклов на атомах  $B$  до  $\Lambda = c$ . В случаях  $\Lambda = c$  и после  $\Lambda = c$  цикл  $\mu$  совпадают с циклом  $\mu$  в пункте 2 нижней строки. Если проекция тора не затрагивает области с проскальзыванием, то на ребрах между седловыми атомами и атомами  $A$  матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = 0, \varepsilon = 1$ , вклад в метку  $n$  здесь нет. Если проекция затрагивает область с проскальзыванием, то на ребрах между седловыми атомами и атомами  $A$  матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$ . Эта матрица вносит вклад в семью, равный  $[-\frac{1}{2}] = -1$ . На ребрах между седловыми атомами матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .

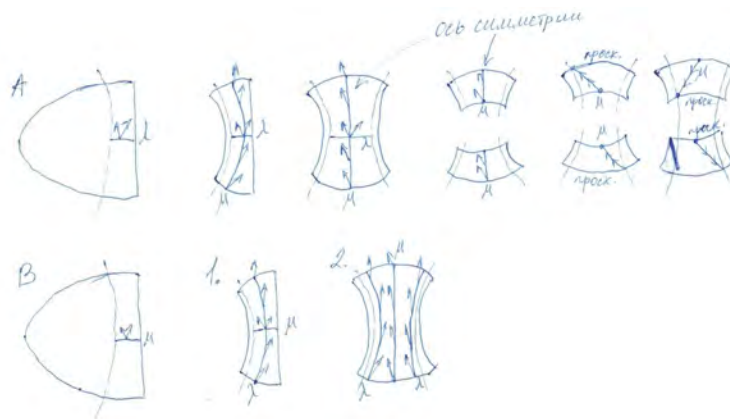


Рис. 7: Циклы атом  $B$  в молекуле  $\widetilde{W}(g)$ .

Пусть ось симметрии биллиарда  $\tilde{\Delta}$  проходит по внутренним гиперболическим дугам. Также обозначим параметр внутренней гиперболической дуги областей, содержащих ось симметрии, через  $\Lambda = c$ . Выбор циклов атомов  $B_k$  повторяет идею предыдущего абзаца и разбивается на 2

случая, которые изображены на рисунке 8. Цикл атома со звездочкой также показан на рисунке 8.

На ребрах между седловыми атомами и атомами  $A$  матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = 0, \varepsilon = 1$ , вклад в метку  $n$  здесь нет. На ребрах между седловыми атомами матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Метки здесь  $r = \infty, \varepsilon = 1$ .

**Предложение 4** Если количество областей  $B_0$  и  $B_1$  не равно 0, то на ребрах, соединяющих атом  $C_2$  с другими седловыми атомами, метка  $r = 0$ , а метка  $\varepsilon = -1$ . Соответственно, во всей молекуле имеются 5 семей. В семьях  $\widetilde{W}(f)$  и  $\widetilde{W}(g)$  метки  $n = -1$ . А в семье атома  $C_2$  метка  $n = -4$ .

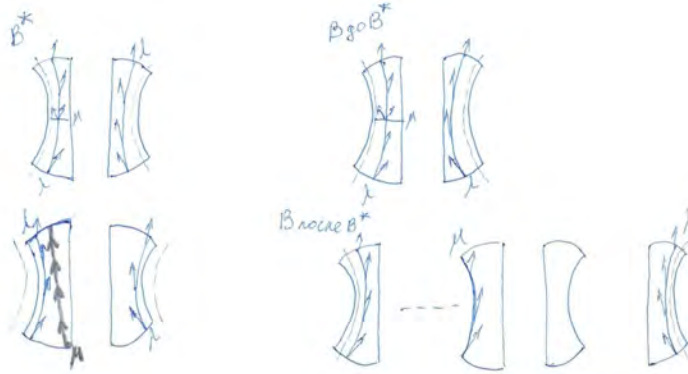


Рис. 8: Циклы атом  $B^*$  в молекуле  $\widetilde{W}(g)$ .

**Доказательство:** Циклы атома  $C_2$  показаны на рисунке 9. Матрица склейки на ребре, соединяющем атом  $C_2$  с другим седловым атомом из  $\widetilde{W}(f)$ , равна  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , когда бильярд  $\widetilde{\Delta}$  содержит проскальзывание на внешних эллиптических дугах, и  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , когда бильярд  $\widetilde{\Delta}$  содержит проскальзывание на внутренних эллиптических дугах. В обоих случаях вклад в метку  $n$  на  $C_2$  равен  $-1$ . В первом случае вклад в метку  $n$  на семье  $\widetilde{W}(f)$  равен нулю, а во втором равен  $-1$ . Матрица склейки на ребре, соединяющем атом  $C_2$  с другим седловым атомом из  $\widetilde{W}(g)$ , равна  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , когда ось симметрии бильярда  $\widetilde{\Delta}$  проходит по внешним гиперболическим дугам, и  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , когда ось симметрии бильярда  $\widetilde{\Delta}$  проходит по внутренним гиперболическим дугам. В обоих случаях вклад в метку  $n$  на  $C_2$  равен  $-1$ . В первом случае вклад в метку  $n$  на семье  $\widetilde{W}(f)$  равен нулю, а во втором равен  $-1$ . Получаем, что метка  $n$  на атоме  $C_2$  равна  $-4$ , а на семьях  $\widetilde{W}(f)$  и  $\widetilde{W}(g)$   $-1$ . На всех ребрах, которые были рассмотрены в данном утверждении, метки  $r = 0, \varepsilon = -1$ . Утверждение доказано.

**Предложение 5** Если количество областей  $B_0$  и  $B_1$  равно 0, то на ребрах, соединяющих атом  $C_2$  с другими седловыми атомами, метка  $r = 0$ , а метка  $\varepsilon = -1$ . На ребрах, соединяющих атом  $C_2$  с атомами  $A$ , метка  $r = 0$ , а метка  $\varepsilon = 1$ . Соответственно, во всей молекуле имеются 3 семьи. В семьях  $\widetilde{W}(f)$  и  $\widetilde{W}(g)$  метки  $n = -1$ . А в семье атома  $C_2$  метка  $n = 0$ .

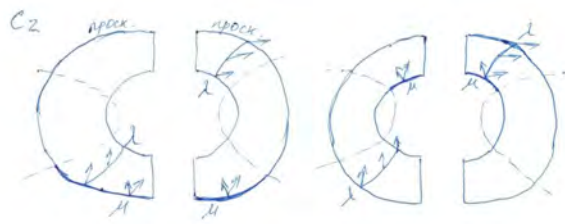


Рис. 9: Циклы атома  $C_2$ .

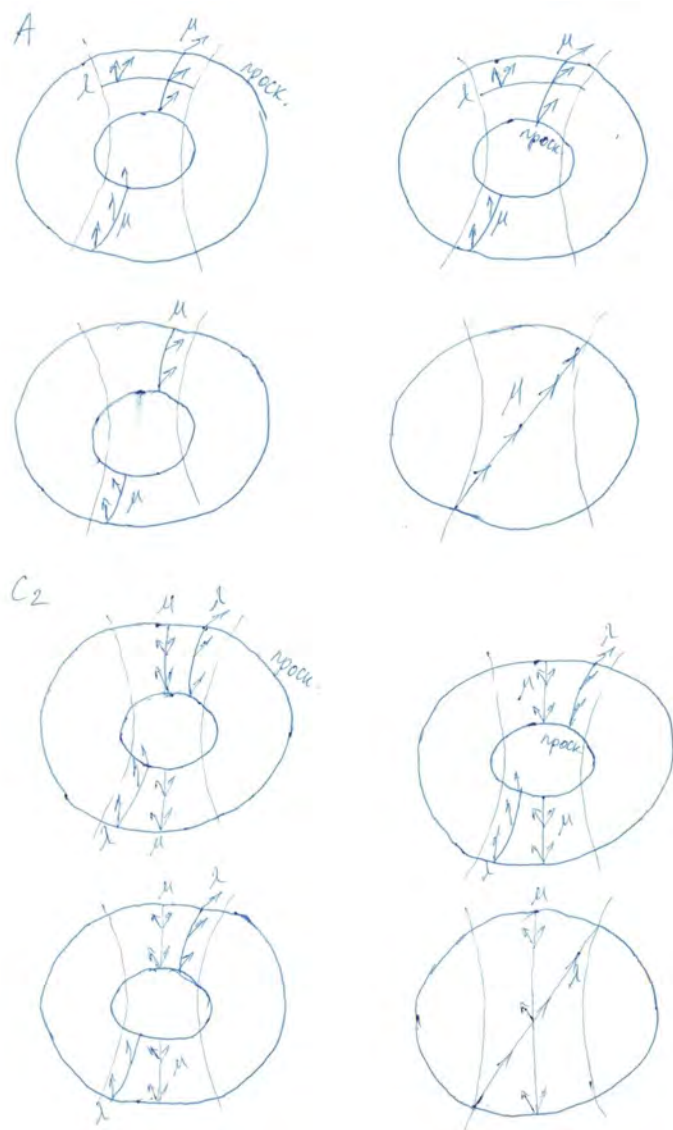


Рис. 10: Циклы атомов  $A$  и  $C_2$  в отсутствии областей  $B_0$  и  $B_1$  в составе  $\tilde{\Delta}$ , когда софокусная квадрака является гиперболой.

**Доказательство:** Циклы атома  $C_2$  показаны на рисунке 6 для эллиптического случая, и на рисунке 10 для гиперболического. Доказательство вида меток на ребре, соединяющем атом  $C_2$  с другим седловым атомом, показано в утверждении 4. В обоих случаях вклад в метку  $n$  на  $C_2$  равен  $-1$ . Циклы на атоме  $A$  также показаны на рисунке 10. Матрица склейки на этом ребре

получается  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Метка  $r = 0$  и  $\varepsilon = 1$ . Вклад в метку  $n$  на атоме  $C_2$  равно 1. Получаем, что метка  $n$  на атоме  $C_2$  равна  $2 - 2 = 0$ . Утверждение доказано.

Теорема 1 доказана.

## Список литературы

- [1] А.В. Болсинов , А.Т. Фоменко, "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
- [2] В.В. Козлов, "Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем", Докл. АН СССР, **249:6** (1979), 1299–1302.
- [3] В.В. Козлов, "Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике", Изд-во УдГУ, Ижевск, 1995.
- [4] В. Н. Колокольцов, "Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом", Изв. АН СССР. Сер. матем., **46:5** (1982), 994–1010;  
V.N. Kolokol'tsov, "Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial in the velocities", Izvestiya: Mathematics, 1983, **21:2**, 291–306
- [5] А.В. Болсинов , В.С. Матвеев , А.Т. Фоменко, "Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия", Матем. сб., **189:10** (1998), 5–32.
- [6] I.K. Babenko , N.N. Nekhoroshev, "On complex structures on two-dimensional tori admitting metrics with nontrivial quadratic integral", Math. Notes, **58:5** (1995), 1129–1135
- [7] А.Т. Фоменко , В.В. Ведюшкина, "Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности", Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 3, 15–25.
- [8] А.Т. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav'yalov, "Liouville foliations of topological billiards with slipping", Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.
- [9] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, "Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды", Изв. РАН. Сер. матем., **83:6** (2019), 63–103;  
V.V. Vedyushkina (Fokicheva) , А.Т. Fomenko, "Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards", Izv. Math. **83(6)**, 1137–1173 (2019).
- [10] В.В. Фокичева , "Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик", Матем. сб., **206:10** (2015), 127–176.
- [11] V. V. Fokicheva (Vedyushkina), "Topological classification of integrable billiards", PhD Thesis, Lomonosov MSU, 2016.
- [12] В. В. Ведюшкина, "Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов", Матем. сб., **210:3** (2019)