

УДК 517.938.5

В. В. Ведюшкина, В. Н. Завьялов

Реализация геодезических потоков с линейным интегралом бильярдами с проскальзыванием

При помощи бильярдов с проскальзыванием на столах-комплексах удалось промоделировать произвольный геодезический поток на проективной плоскости и бутылке Клейна, имеющий линейный по компонентам импульса дополнительный первый интеграл. Требуемый стол кругового топологического бильярда с проскальзыванием строится алгоритмически. При этом линейные интегралы геодезических потоков удается свести к одному каноническому интегралу плоского кругового бильярда.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: Интегрируемая система, бильярд, геодезический поток, слоение Лиувилля, топологический инвариант.

§ 1. Введение

Изучению геодезических потоков на двумерных замкнутых поверхностях, обладающих полиномиальным по компонентам импульса дополнительным интегралом, посвящено большое количество работ (достаточно подробно история вопроса освещена в [1; гл. 2-3 т.2]). Отметим важный результат В.В.Козлова [2, 3] о несуществовании (в аналитической категории) дополнительных интегралов у геодезического потока на компактном римановом 2-многообразии, если многообразие имеет род 2 и выше. При этом условие аналитичности многообразия избыточно, если речь идет о полиномиальной интегрируемости, т.е. ведется поиск полиномиального по компонентам импульса интеграла ([1; комм. 2 к теореме 2.1, т.2]).

В случае интегралов степени 1 и 2 (т.е. линейно или квадратично интегрируемых геодезических потоков) был полностью решен ряд задач о классификации таких потоков. Напомним, что такие потоки можно классифицировать с точки зрения канонического вида метрики, топологии слоения Лиувилля (лиувиллевой эквивалентности), траекторной и геодезической эквивалентностей [5]. В случае интегралов более высоких чем 2 степеней вопрос остается открыт (имеются примеры геодезических потоков на 2-многообразиях с интегралом степени 3 или 4.).

Важные результаты В.Н. Колокольцова [4] затем были развиты и дополнены в работах И.К. Бабенко, Н.Н. Нехорошева, В.С. Матвеева (см. [1], а также [4], [6]). В частности, В.С. Матвееву удалось получить топологическую классификацию линейно интегрируемых геодезических потоков на неориентируемых поверхностях путем изучения инволюции, действующей на фазовом пространстве такого потока, заданного на соответствующей ориентируемой поверхности.

В настоящей работе мы промоделируем геодезические потоки с линейным интегралом на проективной плоскости и бутылке Клейна с помощью бильярдов из недавно введенного А.Т.Фоменко [7] (см. также [8]) класса бильярдов с проскальзыванием (и введения проскальзывания вдоль граничных дуг топологических бильярдов, введенных В.В.Ведюшкиной в [10]).

Построенные В.В.Ведюшкиной классы топологических бильярдов и их обобщений — бильярдных книжек [23] — позволяют промоделировать многие интегрируемые системы из приложений и их особенности. Столы-комплексы, по которым движется бильярдный шар, состоят из элементарных бильярдов [11] (двумерные клетки), склеенные по ребрам с некоторыми перестановками, описывающие правило перехода по ребрам склейки (одномерные клетки). Дальнейшие обобщения бильярдов на столах-комплексах возникают, например, при введении на их плоских листах дополнительных структур: потенциала [17], магнитного поля [22], метрики Минковского [16], проскальзывания вдоль границ, а также их комбинации (см., например, [24]). Также активно изучаются слоения бильярдов на трехмерных софокусных столах ([18] и [19]).

С помощью бильярдных книжек получены существенные продвижения в доказательстве гипотезы А.Т. Фоменко о бильярдах [12], которая ставит вопрос о реализации гладких и вещественно-аналитических интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС) подходящими интегрируемыми бильярдами с точки зрения топологии их слоений Лиувилля.

Инвариант Фоменко-Цишанга, то есть граф-молекула с числовыми метками, классифицирует интегрируемые гамильтоновы системы с невырожденными особенностями на трехмерных уровнях энергии относительно лиувиллевой эквивалентности. В разделах **A** и **B** гипотезы был поставлен вопрос о реализации атомов-бифуркаций и грубых молекул, который был положительно решен В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой. Их алгоритм построения бильярдной книжки, моделирующей данный 3-атом и данную грубую молекулу описан в работах [13] и [14] соответственно, см. также [31].

Раздел **C** является наиболее общим. В нем ставится вопрос о реализации любого инварианта Фоменко-Цишанга бильярдами. Полный ответ на данный вопрос пока неясен, но имеются следующие существенные продвижения, помимо реализации произвольных атомов и грубых молекул. Так при изучении “локальной” версии этой гипотезы [20] удалось реализовать произвольное значение числовой метки (подробнее об этом см. [21] и [32], а также [33], где доказана некоторая комбинация локальной гипотезы и пункта **B** общей гипотезы).

Раздел **D** гипотезы посвящен проблеме реализации трехмерных многообразий как поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых бильярдов. В.В. Ведюшкиной удалось алгоритмически задать бильярдную книжку, чье многообразие Q^3 гомеоморфно произвольной связной сумме линзовых пространств и произведений $S^1 \times S^2$, см. [15]. Отсюда, в частности, следует, что реализуемое бильярдом Q^3 может не быть многообразием Зейферта: связная сумма трех экземпляров $\mathbb{R}P^3 = L(1, 2)$ таковым не является [34].

В работе [9] с помощью топологических бильярдов и бильярдных книжек были реализованы произвольные геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях — сфере и торе — обладающие линейным или квадра-

тичным по импульсам первым интегралом. Настоящая работа посвящена развитию этого результата на случай неориентируемых поверхностей и линейного интеграла.

Также В.В. Ведюшкиной и А.Т.Фоменко удалось реализовать слоения многих известных интегрируемых систем из механики и математической физики в подходящих зонах энергии [25], [26] и [27].

Дальнейшие обобщения интегрируемых бильярдов позволили перейти к реализации бильярдами слоений Лиувилля на четырехмерных подмножествах фазового пространства. Так, недавно введенный А.Т.Фоменко класс силовых эволюционных бильярдов (геометрии стола разрешается меняться при изменении энергии шара) позволил моделировать интегрируемые системы сразу в нескольких неособых зонах энергии, см. [28]-[30]. В то же время добавление потенциала Гука к топологическим бильярдам и бильярдным книжкам позволило получить существенные продвижения в задаче моделирования бильярдами невырожденных локальных и полудокальных особенностей ранга 0, т.е. окрестностей положения равновесия системы и содержащего ее слоя слоения (см. [35, 36, 37]).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 20-71-00155) в МГУ имени М.В.Ломоносова

§ 2. Топологические бильярды с проскальзыванием и основной результат

Стандартные бильярдные системы описывают движение точки внутри области с естественным отражением на границе, допускающей конечное число изломов с углом $\frac{\pi}{2}$. Фиксируем координаты (x, y) на плоскости \mathbb{R}^2 . Рассмотрим семейство концентрических окружностей с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Бильярд, ограниченный концентрическими окружностями, является интегрируемым, поскольку вдоль траектории сохраняется угол φ между отрезками траектории и касательной к граничной окружности. Далее будем работать с областями, которые ограничены окружностями.

Пусть F - изометрия границы, переводящая точку x в диаметрально противоположную ей точку y . С точки зрения самой окружности это означает поворот радиус-вектора точки x на угол π . Бильярд в круге с введенной изометрией на окружности будем называть *бильярдом с проскальзыванием*.

Как показано в статье [8], такая бильярдная система будет также интегрируема с тем же дополнительным интегралом: поворот на угол π сохранит касание траектории концентрической окружности, отвечающей данному значению интеграла. Также в этой статье были рассмотрены случаи диска, который моделирует склейку двух полноторий в линзовое пространство $L_{4,1}$ на изоэнергетическом уровне, для случая проективной плоскости, и двух колец, склеенных по внутренней окружности для бутылки Клейна. Как оказалось, указанные бильярды с проскальзыванием моделируют примеры геодезических потоков

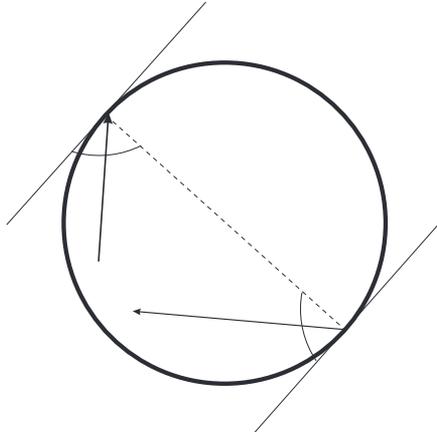


Рис. 1. Движение материальной точки в диске с проскальзыванием.

на проективной плоскости и бутылке Клейна, имеющих линейный или квадратичный по импульсам дополнительный интеграл.

Напомним конструкцию склейки двух бильярдных областей вдоль общей границы, введенную В.В.Ведюшкиной в работе [10]. Пусть два бильярда имеют общую границу и на плоскости располагаются относительно этой границы с одной стороны. Склеим области бильярдных областей вдоль этой общей границы. Материальная точка при движении по одному листу бильярда после удара о границу склейки продолжит двигаться в области другого бильярда. В случае, если склеиваемые бильярды – плоские бильярдные области, а результат склейки – ориентируемое многообразие, то это определение склейки топологического бильярда, введенное В.В. Ведюшкиной.

Рассмотрим области на плоскости \mathbb{R}^2 области, ограниченные одной или двумя концентрическими окружностями. Такую область, гомеоморфную диску, и заданный в ней бильярд обозначим через D . Радиус внешней окружности будем считать всегда равным единице. Рассмотрим область, ограниченную двумя концентрическими окружностями (обозначим ее через C), причем меньшая окружность пусть задается уравнением $x^2 + y^2 = \lambda$, $0 < \lambda \leq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если на граничной окружности области C задано проскальзывание, то такой бильярд назовем «инволютивным A_λ », а если на меньшей (невыпуклой по отношению к бильярдному столу типа C) окружности — то бильярдом « A_λ^* ». Область C без проскальзывания назовем *промежуточной* B_λ . Четыре перечисленные выше области $C, D, A_\lambda, A_\lambda^*$ показаны на рисунке 2, где символами a и b показано проскальзывание.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. (Матвеев В.С.) [1; гл. 3 т.2] Пусть на бутылке Клейна задана (L, g) -метрика $g(y)(dx^2 + dy^2)$, где гладкая функция g не постоянна. Тогда слоение Лиувилля геодезического потока на изоэнергетической поверхности Q задается молекулой на рис. 3 справа. Теперь пусть на проективной плоскости задана метрика $ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2$. Отвечающая геодезическому

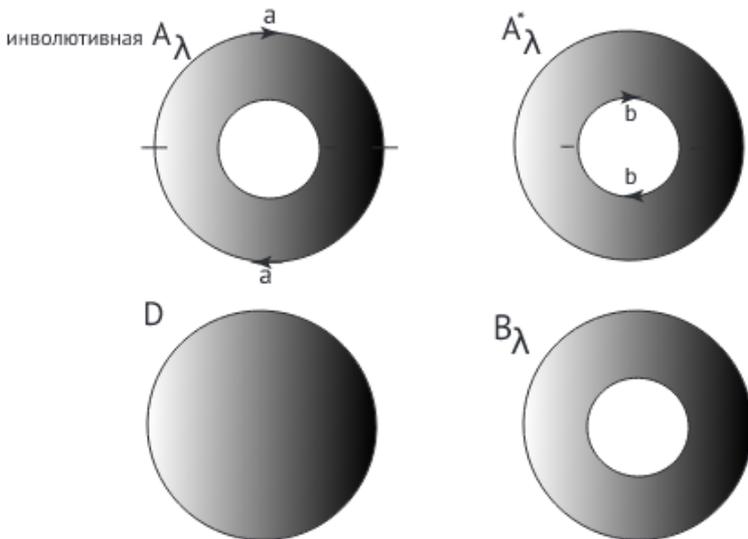


Рис. 2. Слева: сверху показана область инволютивной A_λ , снизу D . Справа: сверху A_λ^* , а снизу промежуточная область B_λ .

потоку молекула \widetilde{W} для случая проективной плоскости показана на рис. 3 слева. В данных графах-молекулах присутствуют только атомы B_n , B_n^* и B_n^{**} . Эти графы-иварианты обладают следующими числовыми метками:

- На внутренних ребрах графов $\widetilde{W}(f)$ и $\widetilde{W}(g)$ метки таковы. На ребрах между седловыми атомами r -метки равны бесконечности. Между седловыми атомами и атомами A метки r равны нулю, за исключением тех случаев, когда атом A (т.е. локальный максимум функции) отвечает неподвижной точке инволюции. В этом случае r -метка равна $\frac{1}{2}$.
- На единственном центральном ребре, соединяющем два экземпляра молекулы $\widetilde{W}(f)$ или $\widetilde{W}(g)$, метка r равна бесконечности, а метка ε равна -1 . Здесь имеется ровно одна семья, совпадающая со всей молекулой \widetilde{W} , из которой выброшены все концевые атомы A . Метка p на этой семье равна -2 .
- Количество звезд и меток $\frac{1}{2}$ в сумме равно двум для геодезического потока на проективной плоскости и четырем в случае бутылки Клейна.

Основной результат нашей работы составляет следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Любой геодезический поток на двумерном неориентируемом многообразии (бутылке Клейна или проективной плоскости), обладающий линейным по импульсам дополнительным интегралом, лувиллево эквивалентен бильярду с проскальзыванием, состоящему из плоских бильярдов, ограниченных концентрическими окружностями. При этом линейный интеграл

такого потока сводится к каноническому на бильярде, которым является угол между траекторией и границей любого бильярдного стола.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.

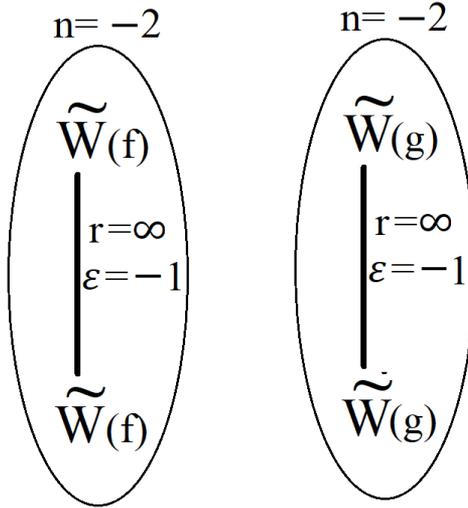


Рис. 3. Молекулы геодезических потоков с линейным интегралом на проективной плоскости (слева) и бутылке Клейна (справа).

2.1. Алгоритмическое построение стола для случая $\mathbb{R}P^2$. Обозначим через R следующий бильярд, полученный последовательной склейкой одной области с проскальзыванием (области A_{λ_0} или области $A_{\lambda_0}^*$), области D и некоторого числа n промежуточных областей B_{λ_i} , $i \in \{1..n\}$.

Проведем анализ траекторий таких бильярдов. Значению интеграла $\varphi = 0$ сопоставим движение материальной точки по дугам окружностей радиуса 1, т.е. по выпуклым дугам склейки бильярдов, входящих в состав бильярда R . Пусть при этом траектории обходят начало координат по часовой стрелке. Значениям интеграла $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ соответствует движение по часовой стрелке. Значениям интеграла $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ соответствует движение против часовой стрелки, причем значению $\varphi = \pi$ — движение по дугам окружностей радиуса 1. Наконец, траектории на уровне интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ состоят из отрезков прямых, проходящих через начало координат. При этом ясно, что топологическое описание совместных уровней интеграла при значении $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\varphi > \frac{\pi}{2}$ совпадает: при обращении траектории траектории первого типа переходят в траектории второго.

Построим по бильярду R кусочно-линейную функцию \hat{f} . Если R содержит инволютивную A_{λ_0} , то рассмотрим точки с координатами $(i+1/2, \lambda_i)$, где числа λ_i есть радиусы меньших граничных окружностей областей с проскальзыванием и промежуточных областей B_{λ_i} . Дополним их точкой $(n+3/2, 0)$. Назовем

эти точки *минимальными*. Рассмотрим точки с координатами $(i, 1)$, расположенные между минимальными точками. Соединим последовательно точки в ломаную, так чтобы минимальные точки были бы минимумами возникающего графика функции. Добавим к этой ломаной её отражение вдоль оси Oy . Функцию, график которой есть полученная симметричная ломаная, обозначим через \hat{f} . Для области $A_{\lambda_0}^*$ точки минимума расположим в точках (i, λ_i) , а точки максимума — в точках $(i/2, 1)$, дополняя минимальной точкой $(n+1, 0)$. Ломаную, построенную по данным точкам с её отражением также назовем \hat{f} .

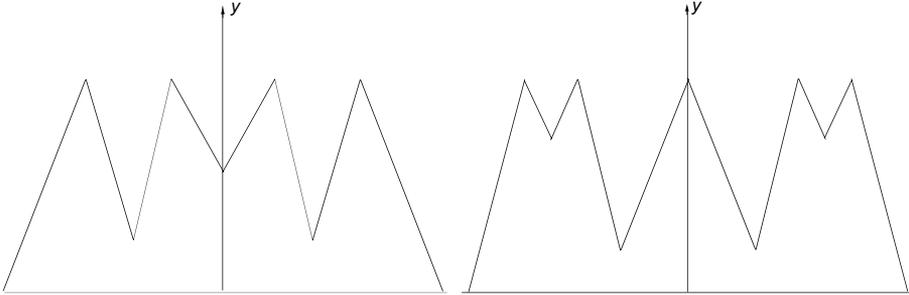


Рис. 4. Пример построения кусочно-линейной функции \hat{f} для билиярда R , содержащего $A_{\lambda_0}^*$ слева, и для A_{λ_0} справа.

График этой функции, фактически, является профилем билиярда, который произвольная прямая с центром в начале координат высекает в билиярдах, входящих в билиярд R . Более того, по любому графику функции можно однозначно восстановить билиярд R .

Рассмотрим интегрируемый геодезический поток на проективной плоскости. Тогда он однозначно задается гладкой четной функцией f , которая обращается в нуль на концах интервала — своей области определения — и имеет некоторые условия сглаживания в концах. Рассмотрим график этой функции и заменим его ломаной, соединив точки минимума и максимума. Далее сохраняя взаимное расположение минимумов и максимумов, изменим график так, чтобы

- либо все минимумы оказались бы в целых ненулевых точках, максимумы — в половинных вида $i/2$, и значения в максимумах стали бы равными 1,
- либо наоборот минимумы в половинных, а максимумы со значением равным единице в целых.

В результате мы получим функцию \hat{f} . По данной функции можно построить билиярд с проскальзыванием R . Это и будет билиярд лиувиллево эквивалентный исходному геодезическому потоку. Для этого осталось показать, что инвариант Фоменко-Цишанга, вычисленный по билиярду R , совпадает после замены f на \hat{f} с инвариантом, изображенным на рисунке 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Построение функции \hat{f} имеет более наглядную геометрическую интерпретацию. Возьмем график нашей функции \hat{f} и склеим точки симметричные относительно оси Oy . Точка на оси Oy останется неподвижной при данной склейке. Далее совершим вращение графика нашей половинчатой функции вокруг оси Ox . На окружности, соответствующей неподвижной точке склейки, склеим диаметрально противоположные точки. Полученная поверхность вращения (гармошка) будет изометрична бильярду R , по которому была построена функция \hat{f} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Бильярдный стол R , построенный по данной конструкции, после отождествления всех стрелок на границах инволютивных областей окажется гомеоморфен проективной плоскости.*

Доказательство: Промежуточными областями являются кольца, каждое из которых гомеоморфно цилиндру. Инволютивные области A_λ и A_λ^* после отождествления обозначающих проскальзывание стрелок на границе (см. рис. 2), гомеоморфны лентам Мебиуса. Тогда полученный бильярдный стол R гомеоморфен цилиндру (из промежуточных областей B_λ), вдоль одной граничной окружности которого приклеена лента Мебиуса, а с другой – с диск D . Очевидно, что тогда бильярдный стол R гомеоморфен проективной плоскости. Утверждение доказано.

§ 3. Доказательство основной теоремы в случае $\mathbb{R}P^2$

3.1. Шаг 1. Вычисление грубой молекулы. Рассмотрим график непрерывной неотрицательной функции f на отрезке $[a, b]$, принимающей на концах этого отрезка равные значения. Дополнительно положим, что нулевые значения могут приниматься функцией только на концах того же отрезка. Если значения на концах отрезка нулевые, то расслоим область под графиком функции на отрезки, образованные пересечением $y = const$ с областью под графиком функции. Стянем каждый отрезок в точку. В результате область, расположенная между графиком и прямой $y = 0$, превратится в дерево.

Сопоставим вершинам полученного графа следующие атомы. Точкам, прообразы которых были максимумами функции f , сопоставим атомы A . Всем остальным вершинам сопоставим атомы B_k , где k – это количество минимумов, через которые проходит соответствующий горизонтальный отрезок (см. рис. 4 для произвольной положительной функции f). Назовем такой граф $W(f)$.

Если значения на концах отрезка ненулевые, то склеим область под графиком функции в цилиндр по отрезкам $[(a, 0), (a, f(a))]$ и $[(b, 0), (b, f(b))]$, которые параллельны оси Oy . Пересечение уровня $y = const$ с областью под графиком функции расслаивает область на окружности и отрезки. Если линия $y = const$ лежит ниже минимума функции f или прямой, проходящей через концевые точки функции f , то в пересечении будут получаться окружности. В остальных случаях в пересечении будут отрезки. Стянем каждый отрезок и каждую окружность в точку. Максимумам функции сопоставим атомы A . Перестройкам отрезка в отрезки сопоставим атомы B_k , где k – это количество минимумов,

через которые проходит соответствующий горизонтальный отрезок. Перестройкам окружности в отрезки сопоставим атомы C_k , где k – это количество отрезков, в которые перестраивается окружность. Назовем такой граф $W_2(f)$.

Теперь рассмотрим график функции \hat{f} . Так как значения нашей функции \hat{f} нулевые только на концах отрезка, то построим по \hat{f} граф $W(\hat{f})$. В нашем случае полученный граф $W(\hat{f})$ является симметричным, так как функция f была симметричной. Перейдем, наконец, к графу $\widetilde{W}(f)$, профакторизовав полученную молекулу по имеющейся симметрии. Пусть ось симметрии проходит через атом B_k .

a. Пусть она проходит через максимум (рис. 6.а), лежащий на оси Oy , то есть при факторизации она переходит в себя. В этом случае имеем атом B_{2k} , так как минимум не лежит на оси симметрии, то получаем, что число минимумов четно. При факторизации число минимумов уменьшится вдвое и перейдет в атом B_k .

b. Пусть она проходит через минимум (рис. 6.б), лежащий на оси Oy . Исходя из четности числа минимумов вне оси, получаем, что ось проходит через атом B_{2k+1} . При данной симметрии это точка на оси симметрии неподвижна, а число минимумов вне оси уменьшается вдвое, следовательно, атом факторизуется в атом B_k^* .

Это построение совпадает с построением графа $\widetilde{W}(f)$, для геодезического потока на проективной плоскости, характеризующегося функцией f .

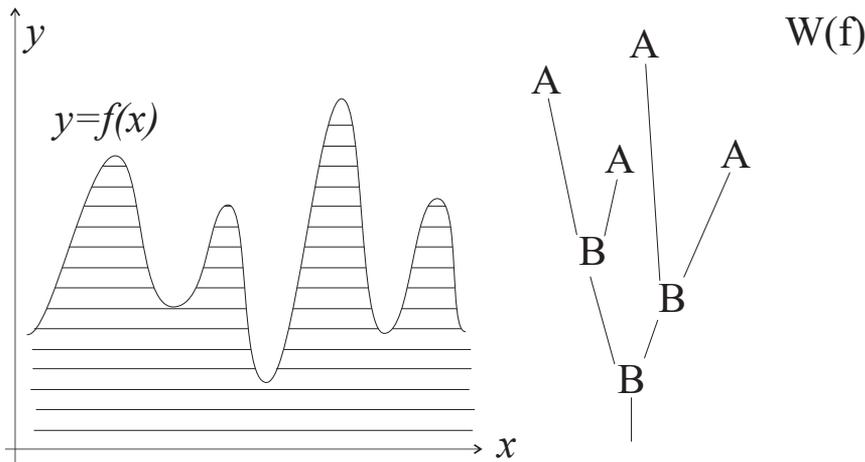


Рис. 5. Построение графа $W(f)$.

Фиксируем уровень интеграла $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Ему будет соответствовать некоторая горизонтальная прямая $y = c < 1$, где c – радиус окружности, которой на данном уровне интеграла касаются траектории. Рассмотрим соответствующую этому значению интеграла поверхность уровня и спроецируем её на бильярд. Проекция поверхности уровня может быть получена удалением из каждого бильярда в составе бильярда R внутренности окружности радиуса c . В результате такого удаления бильярд R распадается на несколько компонент связно-

сти. Все они (быть может, кроме одной) гомеоморфны цилиндрам, полученным склейками из областей типа C , которые остаются при удалении внутренности окружности из областей D , B_λ и A_λ^* (в случае, если $\lambda < c$). Оставшая область (при наличии таковой) будет гомеоморфна листу Мебиуса. Она получается при удалении внутренности окружности радиуса c из инволютивных областей A_λ или A_λ^* (в случае, если мы должны вырезать окружность меньшего радиуса, чем радиус граничных окружностей области A_λ^*).

Отметим, что число компонент связности совпадает с количеством отрезков, отсекаемых прямой $y = c$ под графиком функции \hat{f} при $x > 0$ (поскольку в этой части график функции \hat{f} есть профиль бильярда).

Пусть прямая $y = c$ не проходит через минимумы функции \hat{f} . Тогда прообраз каждого цилиндра и каждой ленты Мебиуса есть некоторый двумерный тор (по аналогии с топологическими бильярдами и простейшими бильярдами с проскальзыванием, см. работы [8, 10]).

Пусть прямая $y = c$ проходит через несколько минимумов функции, но при этом не проходит через возможный минимум, лежащий на оси Oy . Тогда, как и в топологических бильярдах, бифуркация на данном уровне описывает склейку нескольких торов в один вдоль критических окружностей, соответствующих невыпуклым склейкам вдоль окружностей с радиусом c . Несложно убедиться, что эта бифуркация описывается атомом B_k , где k – это количество положительных минимумов, которых касается прямая $y = c$.

Пусть прямая $y = c$ проходит через несколько минимумов функции, в том числе через минимумом, лежащий на оси Oy (в этом случае бильярд R обязан содержать инволютивную A_λ^* , причем в этом случае $\lambda = c$). Тогда можно показать, что бифуркация описывается атомом B_k^* , где k – это количество положительных минимумов, в которых прямая $y = c$ касается графика функции. Отменим проскальзывание на внутренней окружности инволютивной A_c^* . Тогда соответствующая бифуркация описывается атомом B_k . На особом слое атома B_k выделим особую окружность – прообраз внутренней граничной окружности области A_c^* . Она будет единственной, так как на особом слое траектории касаются окружности с радиусом c . При значениях интеграла, меньших чем c , этот прообраз будет пустым, а при больших – состоять из двух окружностей. Разрежем 3-атом по прообразу этой окружности, а затем вернем проскальзывание на этой окружности. В результате получим, что эта выделенная окружность на особом слое атома B_k склеится с собой дважды. Эта склейка, будучи пространена на весь атом (т.е. и на неособые слои), приводит к образованию атома B_k^* , как склейка тора по выделенному циклу (так что цикл обходит себя дважды) приводит к образованию особого слоя атома A^* .

Полученная в результате грубая молекула имеет вид $\widetilde{W}(\hat{f})$, что и требовалось показать.

3.2. Шаг 2. Вычисление меток меченой молекулы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *На ребрах между седловыми атомами стоят метки $r = \infty$. Между седловыми атомами и атомами A – метки $r = 0$, за исключением тех случаев, когда атом A отвечает неподвижной точке инво-*

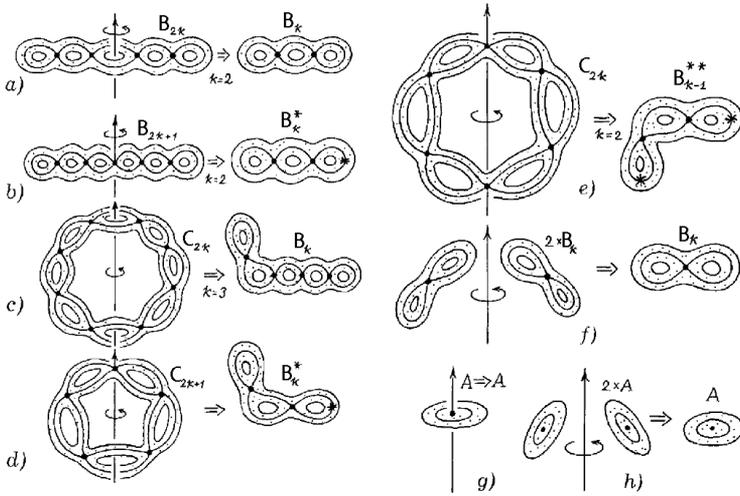


Рис. 6. Инволюция атомов по симметрии.

люции [1] (в построении выше это означает, что отвечающий этому атому A максимум лежит на оси Oy). В этом случае метка $r = \frac{1}{2}$.

Доказательство:

При выборе циклов на граничных торах 3-атомов мы будем изображать их с помощью проекции на бильярд R . Изобразим на столе бильярда получаемые кривые и оснастим их подходящими векторами скорости.

Напомним правила выбора циклов. На граничных торах атомов A в качестве однозначно выбранного цикла λ выбирается цикл, который стягивается в точку внутри полнотория A . В качестве цикла μ выбирается любой цикл дополняющий его до базиса. При стремлении к особому слою цикл μ переходит в критическую окружность. Это позволяет однозначно определить на нём ориентацию (она должна совпасть с ориентацией критической окружности). На граничных торах седловых атомов циклы λ выбираются гомологичными слоям расслоения Зейферта. Для атомов без звездочек это означает, что они должны быть гомологичны (и сонаправлены) критическим окружностям при достижении торами особого слоя. Циклы μ для атомов без звездочек выбираются как граничные окружности двумерного атома – трансверсального критической окружности сечения 3-атома. Если так поступить для атома со звездочкой, то может возникнуть (и как правило в реальных задачах возникает) следующая ситуация. Возникающие циклы $\hat{\mu}$ могут пересекать цикл λ в двух точках. В нашем случае атома B_k^* на одном торе цикл $\hat{\mu}$ пересечет λ в одной точке, а на другом в двух. Тогда на том торе, где пересечение есть одна точка в качестве базисного цикла μ_s берем $\hat{\mu}$, а на другом – $\frac{\hat{\mu} + \lambda}{2}$ (см. подробнее в книге А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1]).

Пусть бильярд R содержит только инволютивную область A_λ . Тогда проекции циклов на плоские бильярды, входящие в состав бильярда R , и вектора скоростей циклов изображены на рисунке 7. Стрелки, которыми снабжены

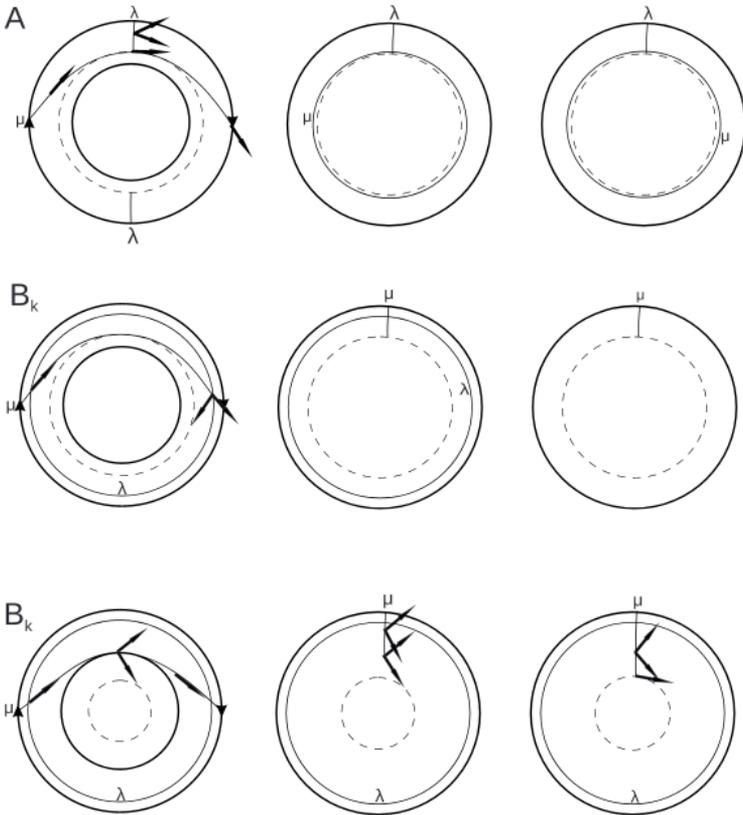


Рис. 7. Проекция циклов на граничных торах атомов A (верхняя строка) и атомов B_k на плоские билиарды, входящие в состав билиярда R : в первом столбце проекция на инволютивную область A_λ , во втором – на промежуточный билиард B_λ , в третьем на билиард D .

точки кривых, показывают, как выглядит вектор скорости в прообразе проекции тора на билиард. Поясним выбор цикла μ на верхнем торе для атома B_k (считаем что молекула ориентирована сверху вниз). При прохождении по области инволютивной A_λ , цикл переходит на промежуточные билиарды B_λ ровно в тот момент, когда кривая в его проекции достигает ребра склейки столов. Заметим ещё один факт. Пусть радиус окружности меньше радиусов всех внутренних окружностей инволютивной области A_λ и областей B_λ . Тогда на этом слое лежит один тор. Можно показать, что цикл μ гомологичен циклу, переходящему в движение по диаметру окружности при значении интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пусть билиард R содержит только инволютивную область A_λ^* . Тогда проекции циклов на билиарды, входящие в состав билиярда R , и вектора скоростей циклов изображены на рисунке 8. Стрелками снабжены точки кривых, кото-

рые показывают, как выглядит вектор скорости в прообразе проекции тора на бильярд.

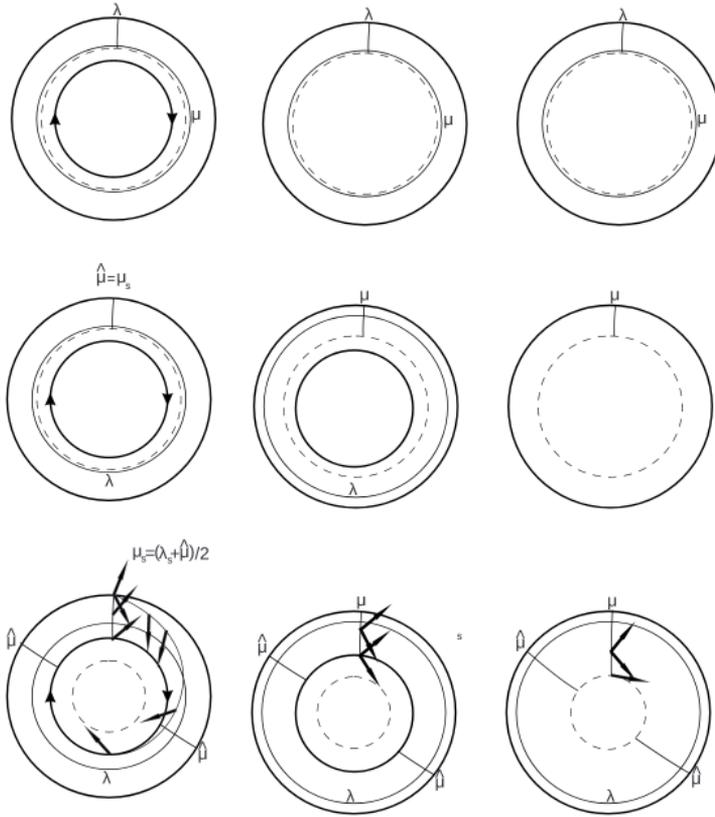


Рис. 8. Проекция циклов на граничных торах атомов A (верхняя строка) и атомов B_k^* (а также тех атомов B_k , которые расположены выше атома со звездочкой по направлению возрастания интеграла) на бильярды, входящие в состав бильярда R : в первом столбце проекция на инволютивную A_s^* , во втором – на промежуточный бильярд B_λ , в третьем – бильярд D .

Для атомов B_k , расположенных в молекуле ниже уровня атома со звездочкой, циклы выбираются также, как и в предыдущем случае. Поясним выбор циклов на граничных торах атома со звездочкой. В качестве циклов $\hat{\mu}$ можно взять прообраз отрезков прямой, проходящей через начало координат. На нижнем уровне интеграла таких циклов будет два, каждый из них пересечет цикл λ в одной точке (см. рис. 8). Для выбора цикла μ_s берем один из них. На нижнем уровне интеграла этот цикл будет пересекать циклы λ дважды. Поэтому в качестве цикла μ_s берем полусумму $\hat{\mu}$ и λ . Итоговый цикл изображен на рис. 8 в нижней строке. При этом его проекция на промежуточные бильярды B_λ выглядит так же, как и ранее, и лежит на фиксированном радиусе

семейства окружностей. Эти же пары λ и μ_s необходимо выбирать в качестве циклов на граничных торах атомов B_k , расположенных выше уровня атома со звездочкой.

Вычислим метки. Если проекция тора не затрагивает областей A_λ , то на ребрах между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = 0, \varepsilon = 1$, вклада в метку n здесь нет. Если проекция затрагивает инволютивную область A_λ , то на ребрах между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Эта матрица вносит вклад в семью, равный $[-\frac{1}{2}] = -1$. Если же проекция затрагивает A_λ^* , то на ребрах между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = 0, \varepsilon = 1$. Эта матрица вносит вклад в семью, равный $[-\frac{1}{1}] = -1$. Матрица склейки на ребре между седловыми атомами имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – все циклы λ гомологичны и одинаково ориентированы. Это приводит к тому, что метки $r = \infty, \varepsilon = 1$. Вклада в метку n эти внутренние ребра семьи не дают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *На единственном центральном ребре молекулы $\tilde{W}(f)$ метка $r = -\infty$, а метка $\varepsilon = -1$. В данной молекуле имеется ровно одна семья, метка на которой равна -2 .*

Доказательство: Мы описали движение по и против часовой стрелки, переходящие друг в друга через значение $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Циклы λ имеют противоположную ориентацию, а циклы μ переходят друг в друга. Тем самым, получаем матрицу склейки $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и метки на ребре $r = \infty, \varepsilon = -1$. Образуется одна семья, причем в метку n идут только значения от входящих ребер областей A_λ . Следовательно, метка $n = -2$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поясним теперь названия введенных нами областей. Инволютивная A_λ названа так, потому что 3-атом A , проекция которого лежит в данной области, имеет нетривиальную метку на исходящем из него ребре. Область A_λ^* , очевидно, моделирует на особом слое атом-бифуркацию, имеющий звезду.

Теорема 1 для случая проективной плоскости доказана.

§ 4. Доказательство основной теоремы в случае KL^2

Обозначим через K бильярд, полученный последовательной склейкой двух (не обязательно одинаковых) областей с проскальзыванием (областей A_{λ_0} или областей $A_{\lambda_0}^*$), и некоторого числа n промежуточных областей $B_{\lambda_i}, i \in \{1..n\}$.

Построим по бильярду K кусочно-линейную функцию \hat{g} , которая является профилем бильярда. Если в бильярде K присутствует хотя бы одна инволютивная область A_{λ_0} , то поставим минимумы в точках с координатами

$(i + 1/2, \lambda_i)$, причем последняя точка будет соответствовать другой области с проскальзыванием. Точки с координатами $(i, 1)$ будут максимальными. Если вторая область с проскальзыванием – это область типа A_{λ_0} , то последняя точка будет максимальной. Если же это область типа A_{λ}^* , то минимальной. Если в составе бильярда K обе области с проскальзыванием – это области A_{λ}^* , то точки минимума расположим в точках (i, λ_i) , а точки максимума в $(i/2, 1)$. Уточним, что последняя точка будет минимальной. Соединим последовательно точки в ломаную, так чтобы минимальные точки были бы минимумами возникающего графика функции. Добавим к этой ломаной её отражение вдоль оси Oy . Функцию, график которой есть полученная симметричная ломаная, обозначим через \hat{g} .

Интегрируемый геодезический поток на бутылке Клейна однозначно задается гладкой четной периодической функцией g . Рассмотрим график этой функции и заменим его ломаной, соединив точки минимума и максимума. Затем, сохраняя взаимное расположение минимумов и максимумов, изменим график так, чтобы

- либо все минимумы оказались бы в целых ненулевых точках, максимумы – в половинных вида $i/2$, и значения в максимумах стали бы равными 1,
- либо наоборот минимумы в половинных, а максимумы со значением равным единице в целых.

Функция может явно не совпасть с \hat{g} , но после сдвига функции g на половину периода, функция, построенная описанным выше способом, совпадет с \hat{g} (см. Теорему 2.17 в [1]). В результате, мы получим функцию \hat{g} , по которой можно построить бильярд K с проскальзыванием. Это и будет бильярд, лиувиллево эквивалентный исходному геодезическому потоку. Для этого осталось показать, что инвариант Фоменко-Цишанга, вычисленный по бильярду K , совпадает после замены g на \hat{g} с инвариантом, изображенным на рисунке 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Бильярдный стол K , построенный по данной конструкции, после отождествления всех стрелок на границах инволютивных областей окажется гомеоморфен бутылке Клейна.*

Доказательство: Бильярдный стол K получается из бильярдного стола R удалением области D , гомеоморфной диску, и склейкой по границе с областью, гомеоморфной ленте Мёбиуса, что и есть бутылка Клейна. Утверждение доказано.

4.1. Шаг 1. Вычисление грубой молекулы. Рассмотрим график функции \hat{g} . Так как наша функция \hat{g} всюду положительна на отрезке, то построим по функции \hat{g} граф $W_2(\hat{g})$. В нашем случае полученный граф $W(\hat{g})$ является симметричным, так как функция g была четной. Перейдем, наконец, к графу $\widetilde{W}_2(\hat{g})$, профакторизовав полученную молекулу по имеющейся симметрии. Отличие в факторизации в случае $W(f)$ и в случае $W_2(g)$ состоит в том, что область под графиком функции f была гомеоморфна диску, и мы факторизовали по одной оси симметрии. В случае $W_2(g)$ область под графиком функции g склеена в цилиндр, и мы имеем две оси симметрии (ось Oy и прямая, проходящая через точку функции g на конце отрезка, параллельная оси Oy). Поэтому

мы факторизуем не по прямой, а по плоскости, проходящей через оси симметрии цилиндра. Опишем факторизацию атома B_k графа $\widetilde{W}_2(f)$.

a. Пусть факторизация атома B_k происходит на уровне, который не содержит минимумов на осях симметрии. Тогда число минимумов чётно, и оси симметрии перейдут в себя. Получаем факторизацию атома B_{2k} в атом B_k .

b. Пусть факторизация атома B_k происходит на уровне, который содержит один минимум на одной из осей симметрии. Исходя из чётности числа минимумов вне оси, получаем, что ось проходит через атом B_{2k+1} . При данной симметрии это точка на оси симметрии неподвижна, а число минимумов вне оси уменьшается вдвое, следовательно, атом факторизуется в атом B_k^* .

Нам остается описать факторизацию атомов C_k .

c. Пусть какой-то λ_i ($0 < i < n+1$) является минимальным среди значений λ_i ($0 \leq i \leq n+1$), то на осях симметрии на этом уровне нет минимумов, а общее количество минимумов чётно. Следовательно, количество минимумов уменьшается вдвое, а ось переходит в себя. Поэтому наш атом C_{2k} факторизуется в B_k . Далее возможны только *a* или *b*, так как совершается переход отрезков в отрезки.

Рассмотрим случай, когда λ_i ($0 < i < n+1$) не являются минимальными среди значений λ_i ($0 \leq i \leq n+1$). Пусть ось симметрии Oy проходит через минимум. Тогда вторая ось симметрии тоже проходит через минимум.

d. Пусть λ_{n+1} и λ_0 отличаются, значит, количество точек минимума нечётно. Тогда на уровне $\min(\lambda_{n+1}, \lambda_0)$ будет атом C_{2k+1} , переходящий в B_k^* (рис 6.d), так как будет всего одна неподвижная точка. На уровне, который соответствует большему значению из λ_{n+1} и λ_0 , будет случай *b*, так как будет совершаться переход отрезков в отрезки. Также 6.d реализует случай, когда ось симметрии Oy проходит через максимум, а вторая ось симметрии проходит через минимум. В этом случае количество минимумов на уровне λ_{n+1} нечётно. Следовательно, на уровне λ_{n+1} имеем атом C_{2k+1} , который факторизуется в атом B_k^* . В остальных случаях будет переход отрезков в отрезки по случаю *a*.

e. Пусть значения λ_{n+1} и λ_0 совпадают, значит количество точек минимума чётно. Следовательно, в $W_2(\hat{g})$ на этом уровне будет стоять атом C_{2k} . Так как два минимума стоят на осях симметрии, то они оба будут неподвижны при действии факторизации, следовательно, атом C_{2k} факторизуется в B_k^{**} (рис 6.e).

Это построение совпадает с построением графа $\widetilde{W}_2(g)$, для геодезического потока на проективной плоскости, характеризующегося функцией g .

Фиксируем уровень интеграла $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Ему будет соответствовать некоторая горизонтальная прямая $y = c < 1$, где c – радиус окружности, которой на данном уровне интеграла касаются траектории. Рассмотрим соответствующую этому значению интеграла поверхность уровня и спроецируем её на бильярд. Проекция поверхности уровня может быть получена удалением из каждого бильярда в составе бильярда K внутренности окружности радиуса c . В результате такого удаления бильярд K распадается на несколько компонент связности. Все они (быть может, кроме двух) гомеоморфны цилиндрам, полученным склейками из областей типа C , которые остаются при удалении внутренности окружности из областей A_λ , B_λ и A_λ^* (в случае, если $\lambda < c$). Оставшиеся

области (при наличии таковых) будут гомеоморфны листам Мебиуса. Они получают при удалении внутренности окружности радиуса c из инволютивных областей A_λ или A_λ^* (в случае если мы должны вырезать окружность меньшего радиуса чем радиус граничных окружностей области A_λ^*).

Отметим, что число компонент связности совпадает с количеством отрезков, отсекаемых прямой $y = c$ под графиком функции \hat{g} при $x > 0$ (поскольку в этой части график функции \hat{g} есть профиль бильярда).

Пусть прямая $y = c$ не проходит через минимумы функции \hat{g} . Тогда прообраз каждого цилиндра и каждой ленты Мебиуса есть некоторый двумерный тор.

Пусть прямая $y = c$ проходит через несколько минимумов функции, но при этом не проходит через минимумы, лежащие на осях симметрии. Тогда, как и в топологических бильярдах, бифуркация на данном уровне описывает склейку нескольких торов в один вдоль критических окружностей, соответствующих невыпуклым склейкам вдоль окружностей с радиусом c . Несложно убедиться, что эта бифуркация описывается атомом B_k , где k – это количество положительных минимумов, которых касается прямая $y = c$.

Пусть прямая $y = c$ проходит через несколько минимумов функции, в том числе через один минимум, лежащий на оси Oy или на прямой $(n+1, y)$ (в этом случае бильярд K обязан содержать одну инволютивную область A_λ^* , причем в этом случае $\lambda = c$). Тогда можно показать, что бифуркация описывается атомом B_k^* , где k – это количество положительных минимумов, в которых прямая $y = c$ касается графика функции. Отменим проскальзывание на внутренней окружности инволютивной A_c^* . Тогда соответствующая бифуркация описывается атомом B_k . На особом слое атома B_k выделим особую окружность – прообраз внутренней граничной окружности области A_c^* . Она будет единственной, так как на особом слое траектории касаются окружности с радиусом c . При значениях интеграла, меньших чем c , этот прообраз будет пустым, а при больших – состоять из двух окружностей. Разрежем 3-атом по прообразу этой окружности, а затем вернем проскальзывание на этой окружности. В результате получим, что эта выделенная окружность на особом слое атома B_k склеится с собой дважды. Эта склейка, будучи распространена на весь атом (т.е. и на неособые слои), приводит к образованию атома B_k^* , как склейка тора по выделенному циклу (так что цикл обходит себя дважды) приводит к образованию особого слоя атома A^* .

Пусть прямая $y = c$ проходит через несколько минимумов функции, в том числе через минимумы, лежащие на оси Oy и на прямой $(n+3/2, y)$ (в этом случае бильярд K обязан содержать две области A_c^*). Тогда бифуркация описывается атомом B_k^{**} .

Полученная в результате грубая молекула имеет вид $\widetilde{W}_2(\hat{g})$, что и требовалось показать.

4.2. Шаг 2. Вычисление меток меченой молекулы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *На ребрах между седловыми атомами стоят метки $r = \infty$. Между седловыми атомами и атомами A – метки $r = 0$, за исключением тех случаев, когда атом A отвечает неподвижной точке инво-*

люции [1] (в построении выше это означает, что отвечающий этому атому A максимум лежит на оси Oy). В этом случае метка $r = \frac{1}{2}$.

Доказательство:

Проекция циклов на бильярдные столы, входящие в состав бильярда K , полностью описаны в предложении 2, так как бильярд K состоит из бильярдных столов серий, используемых в бильярде R . Поэтому метки вне центрального ребра будут идентичны. Если проекция тора не затрагивает областей A_λ , то на ребрах между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = 0, \varepsilon = 1$, вклада в метку n здесь нет. Если проекция затрагивает инволютивную область A_λ , то на ребрах между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Эта матрица вносит вклад в семью, равный $[-\frac{1}{2}] = -1$. Если же проекция затрагивает A_λ^* , то на ребрах между седловыми атомами и атомами A матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Метки здесь $r = 0, \varepsilon = 1$. Эта матрица вносит вклад в семью, равный $[-\frac{1}{1}] = -1$. Матрица склейки на ребре между седловыми атомами имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – все циклы λ гомологичны и одинаково ориентированы. Это приводит к тому, что метки $r = \infty, \varepsilon = 1$. Вклада в метку n эти внутренние ребра семьи не дают.

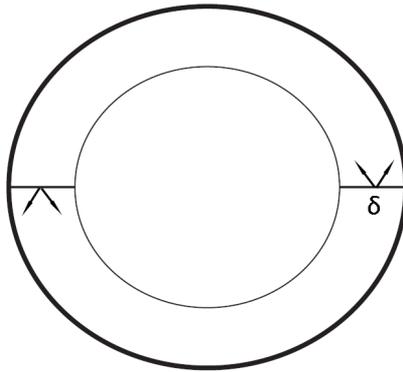


Рис. 9. Цикл δ на круговом бильярде с проскальзыванием, показанный на одном из бильярдных столов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. На единственном центральном ребре молекулы $\widetilde{W}_2(g)$ метка $r = -\infty$, а метка $\varepsilon = -1$. В данной молекуле имеется ровно одна семья, метка на которой равна -2 .

Доказательство: Нам нужно описать переход циклов через $\Lambda = \frac{\pi}{2}$. Циклы λ также будут переходить друг в друга сменой ориентации. Возьмем цикл δ ,

показанный на рис.9. При устремлении угла отражения от границы к нулю, циклы δ движения по часовой стрелке и против часовой стрелке перейдут друг в друга. Причем, $\delta = \lambda - \mu$. Исходя из полученных соотношений, он, $\lambda_+ + \mu_+ = \lambda_- + \mu_-$. Следовательно, $\mu_+ = 2\lambda_- + \mu_-$. Значит матрица склейки будет равна $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вклад в метку n равен 2. Сложив все вклады ребер, получаем $n = -4 + 2 = -2$. Метки на центральном ребре, соответственно, равны $r = \infty, \varepsilon = -1$. Утверждение доказано.

Теорема 1 для случая бутылки Клейна доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Продемонстрируем еще одно существенное отличие граф-молекул интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости и бутылке Клейна. При изменении ориентации изоэнергетического многообразия Q^3 метка n преобразуется в метку $n' = -n - l - \sum s$, где l - число ребер, несущих на себе нецелую метку r и являющихся выходящими ребрами данной семьи, а s - суммарное количество звездочек у атомов, входящих в состав данной семьи. Тем самым, метка $n = -2$ для случая проективной плоскости преобразуется в $n' = 0$, а для случая бутылки Клейна $n' = -2$.

Список литературы

- [1] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
- [2] В.В. Козлов, "Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем", Докл. АН СССР, **249**:6 (1979), 1299–1302.
- [3] В.В. Козлов, "Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике", Изд-во УдГУ, Ижевск, 1995.
- [4] В. Н. Колокольцов, "Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом", Изв. АН СССР. Сер. матем., **46**:5 (1982), 994–1010;
V.N. Kolokol'tsov, "Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial in the velocities", Izvestiya: Mathematics, 1983, **21**:2, 291–306
- [5] А.В. Болсинов, В.С. Матвеев, А.Т. Фоменко, "Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия", Матем. сб., **189**:10 (1998), 5–32.
- [6] I.K. Babenko, N.N. Nekhoroshev, "On complex structures on two-dimensional tori admitting metrics with nontrivial quadratic integral", Math. Notes, **58**:5 (1995), 1129–1135
- [7] А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина, "Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности", Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 3, 15–25.
- [8] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav'yalov, "Liouville foliations of topological billiards with slipping", Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.
- [9] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, "Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды", Изв. РАН. Сер. матем., **83**:6 (2019), 63–103;
V.V. Vedyushkina (Fokicheva), A.T. Fomenko, "Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards", Izv. Math. **83**(6), 1137–1173 (2019).

- [10] В.В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., **206**:10 (2015), 127–176.
- [11] V. V. Fokicheva (Vedyushkina), “Topological classification of integrable billiards”, PhD Thesis, Lomonosov MSU, 2016.
- [12] А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 3, 15–25.
A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina, “Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential”, Moscow University Mathematics Bulletin **74**(3), 98–107, (2019).
- [13] В. В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб., **209**:12 (2018), 17–56;
V.V. Vedyushkina, I.S. Kharcheva, “Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems”, Sb. Math. **209**(12), 1690–1727 (2018).
- [14] V.V. Vedyushkina, “Integrable billiards on CW-complexes and integrable Hamiltonian systems”, D.Sc. Thesis, Lomonosov MSU, 2020).
- [15] В.В. Ведюшкина, “Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек”, Матем. сб., **212**:12 (2021), 3–19.
- [16] Е. Е. Каргинова, “Бильярды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского”, Матем. сб., **211**:1 (2020), 3–31;
E.E. Karginova, “Billiards bounded by arcs of confocal quadrics on the Minkowski plane”, Sb. Math., **211**:1 (2020), 1–28.
- [17] С. Е. Пустовойтов, “Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадраками, в потенциальном поле”, Матем. сб., **212**:2 (2021), 81–105;
S.E. Pustovoitov, “Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field”, Sb. Math., **212**:2 (2021), 211–233.
- [18] Г. В. Белозеров, “Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов на квадраках в трехмерном евклидовом пространстве”, Матем. сб., **211**:11 (2020), 3–40;
G.V. Belozеров, “Topological classification of integrable geodesic billiards on quadrics in three-dimensional Euclidean space”, Sb. Math., **211**:11 (2020), 1503–1538.
- [19] Г.В. Белозеров, “Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадраками”, Матем. сб., **213**:2 (2022), 3–36
- [20] В. В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, А.Т. Фоменко, “Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов”, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2020, Т. 493, № 1, стр. 9–12
V.V. Vedyushkina, V.A. Kibkalo, A.T. Fomenko, “Topological Modeling of Integrable Systems by Billiards: Realization of Numerical Invariants”, Dokl. Math. **102** (2020), 269–271.
- [21] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Реализация бильярдами числового инварианта расщепления Зейферга интегрируемых систем”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 4, 22–28; Moscow University Mathematics Bulletin, **75**:4 (2020), 161–168
- [22] А.Т. Фоменко, V.V. Vedyushkina, “Implementation of Integrable Systems by Topological, Geodesic Billiards with Potential and Magnetic Field”, Russ. J. Math. Phys. **26** (2019), 320–333.

- [23] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами”, Докл. РАН, **479**:6 (2018), 607–610
V.V. Vedyushkina, A.T. Fomenko, I.S. Kharcheva, “Modeling Nondegenerate Bifurcations of Closures of Solutions for Integrable Systems with Two Degrees of Freedom by Integrable Topological Billiards”, Dokl. Math. **97** (2018), 174–176.
- [24] В.В. Ведюшкина, А.И. Скворцов, “Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуковским потенциалом”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2022, № 1, 8–19
- [25] А.Т. Фоменко, В.В. Фокичева, “Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела”, ДАН, 465:2 (2015), 1-4.
А.Т. Fomenko, V.V. Fokicheva, “Integrable billiards model important integrable cases of rigid body dynamics”, Doklady Mathematics **92**(3), 682–684 (2015).
- [26] В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко, “Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **81**:4 (2017), 20–67;
V.V. Vedyushkina (Fokicheva), A. T. Fomenko, “Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems”, Izv. Math. **81**(4), 688–733 (2017).
- [27] В.В. Ведюшкина, “Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 1, 64–68.
- [28] А.Т. Fomenko, V.V. Vedyushkina, “Billiards with changing geometry and their connection with implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya cases”, Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 3, 2021, pp. 317–332.
- [29] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Эволюционные силовые бильярды”, Изв. РАН. Сер. матем., 86 (2022)
- [30] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Силовые эволюционные бильярды и бильярдная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа”, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2021, Т. 496, № 1, стр. 5-9.
А.Т. Fomenko, V.V. Vedyushkina, “Force evolutionary billiards and billiards equivalence of the Euler and Lagrange cases”, Doklady Mathematics **103**(1), 1-4 (2021).
- [31] В.А. Кибкало, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками”, Труды Московского математического общества, том 82, № 2.
V.A. Kibkalo, A.T. Fomenko, I. S. Kharcheva, “Realizing integrable Hamiltonian systems by means of billiard books”, Trans. Moscow Math. Soc. **2021**, 37-64
- [32] В.В. Ведюшкина, “Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2021, 2, 28–32
- [33] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Бильярдные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем”, Чебышевский сборник. 2022;23(1):2-31.
V.V. Vedyushkina, V.A. Kibkalo, “Billiard books of low complexity and realization of Liouville foliations of integrable systems”, Chebyshevskii sbornik, vol. 23, no. 1, 2022, pp. 2–31.
- [34] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, “Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии”, Издательство МГУ, 1991, 304.
S.V. Matveev, A.T. Fomenko, “Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds”, Springer, 1997, 352 p.

- [35] В.А. Кибкало, “Бильярды с потенциалом моделируют ряд четырехмерных особенностей интегрируемых систем”, Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, №2, 553-556.
V.A. Kibkalo, “Billiards with potential model series of 4-dimensional singularities of integrable systems”, Contemporary problems of mathematics and mechanics. Materials of international conference dedicated to 80-birthday of acad. V.Sadovnichii — V.2. — Moscow, 2019. — pp. 563–566
- [36] А.Т. Фоменко, В.А. Кибкало, “Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms,” Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics, Understanding Complex Systems, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer, Cham, 2021, pp. 1–26.
- [37] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, Пустовойтов С.Е., “Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем бильярдными книжками с потенциалом Гука”, Чебышевский сборник. 2021;22(5):44-57.

В. В. Ведюшкина, В. Н. Завьялов
(**V. V. Vedyushkina, V. N. Zav'yalov**)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: arinir@yandex.ru, vnzavyalov@mail.ru

Поступила в редакцию
05.04.2022