Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем

В.В.Ведюшкина, В.А.Кибкало

Аннотация

Настоящая работа посвящена изучению топологии интегрируемых биллиардных книжек (склеенных из плоских областей, ограниченных дугами софокусных квадрик) и состоит из трех частей. В первой части изучается пункт фундаментальной гипотезы Фоменко о моделировании биллиардами интегрируемых гамильтоновых систем. Во второй – исследуется слоение Лиувилля содержащих фокусы биллиардных книжек малой сложности, а также классифицируются биллиардные столы над областью A_1 (с одним фокусом и границей, состоящей из двух дуг — эллиптической и гиперболической. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 20-71-00155) в МГУ имени М.В.Ломоносова

1 Введение

Зафиксируем семейство софокусных квадрик соотношением

$$(b-\lambda)x^2+(a-\lambda)y^2=(b-\lambda)(a-\lambda).$$

Здесь $a,\ b$ — фиксированные параметры семейства, которые в частности фиксируют расстояние между фокусами. Если $a>b>0$, данное соотношение описывает семейство софокусных эллипсов и гипербол, в которые включены фокальная прямая $y=0$ и предельная гипербола $x=0$.

Под элементарным биллиардом понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик и не содержит углов $3\pi/2$. Отметим, что софокусные квадрики всегда пересекаются под прямыми углами. Запрет углов $3\pi/2$ позволяет корректно определить биллиардное движение после попадания материальной точки в угол. А именно, после отражения точка продолжает движение в противоположном направлении по тому же отрезку, по которому попала в угол.

На множестве элементарных биллиардов можно ввести естественное отношение эквивалентности, которое, как было показано ранее [1], сохраняет слоение Лиувилля. Нестрого говоря, два биллиарда называются эквивалентными, если один получается из другого изометрией плоскости или же изменением параметров границ так, чтобы изменяемые дуги границ во время деформации не меняли бы своего типа. Определение запрещает сегменту изменяемой границы менять свой тип, то есть сегменты во время деформации остаются либо эллиптическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(-\infty,\ b)$), либо гиперболическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(b,\ a]$), либо все время лежат на фокальной прямой (во все время деформации параметр остается равным b). При этом повторим, что мы предполагаем что все эллипсы и гиперболы принадлежат одному семейству софокусных квадрик с параметрами a и b. Примеры элементарных биллиардов различных классов, необходимых в настоящей работе изображены на рис. 1. Их обозначения совпадают с теми, которые даны в статье [1].

2 Локальная гипотеза А.Т. Фоменко о биллиардах.

Фиксируем в семействе софокусных квадрик некоторый эллипс e_0 и некоторую гиперболу h_0. Рассмотрим следующие плоские интегрируемые биллиарды: биллиард A_1, ограниченный дугой эллипса e_0 и выпуклой

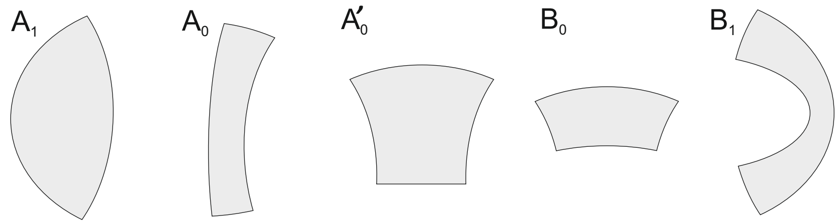

Рис. 1: Плоские биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик.

дугой гиперболы h_0 (см. рис. 1), и биллиард A_0, ограниченный тем же эллипсом e_0 и двумя дугами гиперболы h_0. Фиксируем число n и склеим из $2m$ экземпляров биллиарда A_1 и одного биллиарда A_0 биллиардную книжку. Рассмотрим m экземпляров A_1, склеим их друг с другом вдоль дуги гиперболы, и вдоль этой же дуги приклеим к левой дуге граничной гиперболы биллиарда A_0. Оставшиеся биллиарды A_1 также склеим друг с другом вдоль дуги гиперболы и вдоль этой же дуги приклеим вдоль правой дуги гиперболы к биллиарду A_0. Левые биллиарды A_1 обозначим через a_i, правые – через c_i, а биллиард A_0 через b. Теперь укажем на корешках полученной книжки следующие перестановки. На корешке между группой биллиардов a_1 и биллиардом b поставим циклическую σ, переставляющую биллиарды в следующем порядке $b,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_m$. На другом корешке книжки – циклическую перестановку ρ, которая переставляет биллиарды в порядке $b,\ c_1,\ c_2,\ ...,\ c_m$. Полученную книжку обозначим через $\mathbb{B}_1$. Пример такой книжки для $m = 3$ изображен на рисунке 2 а).

Утверждение 1 *Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности биллиардной книжки B_1, состоящей из $2m$ экземпляров биллиарда A_1 и одного биллиарда b с циклическими перестановками на корешках, имеет вид, изображенный на рис. 2б).*

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы на два шага. Вначале вычислим грубую молекулу для данной биллиардной книжки, а затем вычислим метки.

Шаг первый. Вычисление грубой молекулы.

Опишем вначале поведение критических траекторий. При наименьшем значении интеграла траектории представляют собой криволинейные движения по дугам эллипса e_0. Таких траекторий ровно две. Покажем это, рассмотрев два случая. Пусть m – нечетно. Тогда одна траектория – проходит по нечетным листам a_i вверх, по четным листам a_i вниз, по верхнему граничному сегменту биллиарда b слева направо, далее по нечетным листам c_i вниз, а по четным – вверх, и после выхода на биллиард b проходит по нижнему сегменту справа налево. Другая траектория проходит по тем же листам в противоположном направлении. Пусть теперь m – четно. Тогда после выхода с листов c_i обратно на лист b траектория опять проходит по верхнему сегменту биллиарда b но уже справа налево. Вторая траектория при движении по биллиарду b проходит по нижнему сегменту.

При значении параметра дополнительного интеграла соответствующего вырожденной квадрике (оси Ox) траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы. Этот уровень назовем фокальным уровнем. Критическая траектория ровно одна, она проходит вдоль отрезков оси Ox. Последовательность отрезков вместе с направлением на них следующая: движение по b направо, далее в каждом из биллиардов c_i движение направо и после удара влево, движение по b влево, далее в каждом из биллиардов a_i движение влево и после удара направо.

При значении параметра интеграла, соответствующего гиперболе, лежащей на оси Oy, получаем ровно одну траекторию проходящую только по листу b.

Остальные значения интеграла невырождены и им соответствуют двумерные торы. Покажем это, доказав, что окрестности седлового слоя соответствует атом B.

Рассмотрим биллиард A_1. Бифуркация на его фокальном слое описывается атомом A^*. Соответствующее этому атому слоение Зейферта имеет один особый слой. Трансверсальное критической окружности сечение – 2-атом B. Отменим в биллиарде A_1 биллиардный закон на дуге граничной гиперболы. Прообраз этой дуги есть трансверсальное сечение 3-атома A^*, т.е. 2-атом B. На рисунке 2 в) жирным выделена граничная

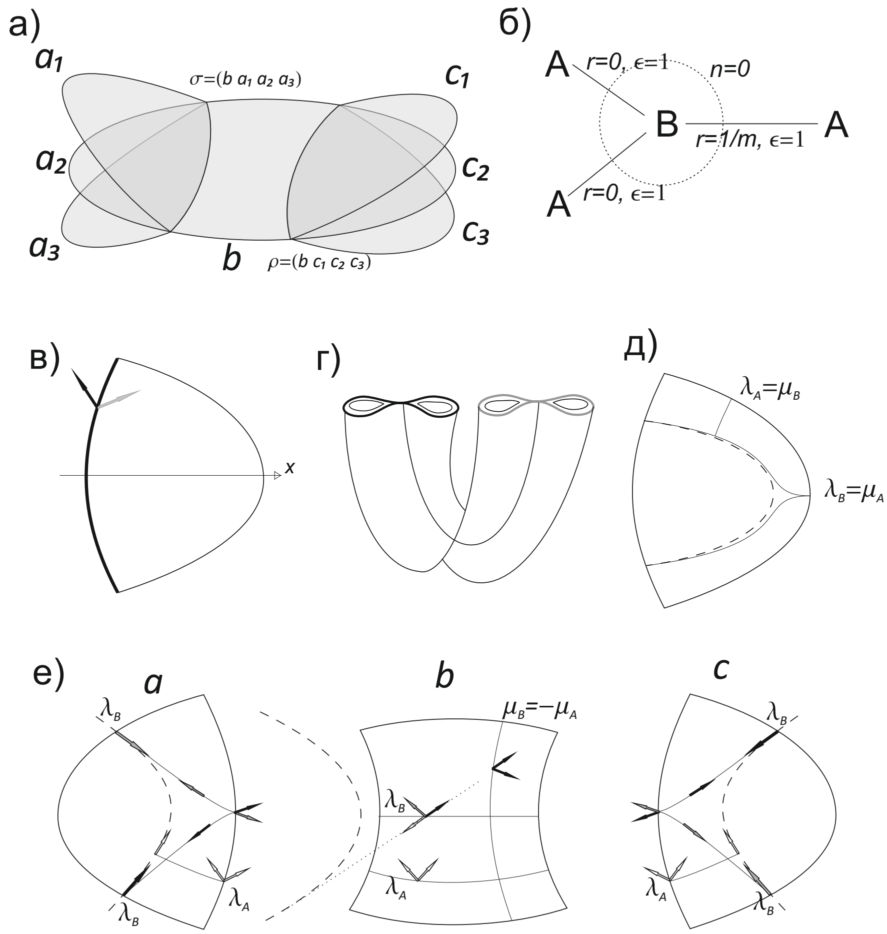

Рис. 2: а) биллиардная книжка $\mathbb{B}_1$ при $m = 3$. б) инвариант Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля изоэнергетической 3-поверхности биллиардной книжки $\mathbb{B}_1$.

дуга гиперболы и указана пара векторов, которые были склеены до отмены биллиардного закона: черный вектор при этом направлен наружу области биллиарда A_1, а серый – внутрь. После отмены мы получаем, что бифуркация в окрестности фокального слоя распалась в прямое произведение 2-атома B на отрезок. На рисунке г) изображен результат после разреза, а границы этого разреза соответствуют парам точка-вектор своего цвета (черного наружу области, а серого – внутрь).

Склеим теперь m экземпляров разрезанного стола A_1 по правилу – пары точка-вектор склеиваются, если они соответствуют одной точке на дуге гиперболы и черный вектор предыдущего экземпляра A_1 отождествляется с серым вектором следующего. Эта склейка продиктована новым биллиардным законом, который отвечает перестановкам σ и ρ. Разрезанные 3-атомы A^* склеиваются в единый атом, представляющий собой прямое произведение 2-атома B на отрезок.

Отметим следующий факт. Необходимо помнить, что если биллиардный закон в столе A_1 вернуть, то соответствующий 3-атом не имеет структуру прямого произведения. В его 3-атоме возникает "перекрутка". Эту перекрутку можно представлять себе так. Протащим по разрезанному 3-атому 2-атом B – дугу гиперболы, оснащенную векторами внутрь. У этой дуги до протаскивания выделяется часть выше оси Ox и ниже оси Ox. После того как эта часть перейдет в эту же гиперболу с векторами наружу эти части поменяются местами (более подробно см. [6]). Этот эффект обеспечивает наличие одного фокуса в биллиарде A_1.

Осталось приклеить к двум описанным кускам бифуркации разрезанный прообраз листа b. Бифуркация на фокальном слое соответствующего ему биллиарда A_0 есть 3-атом B. В самом деле, рассмотрим прообраз любой гиперболы софокусного семейства, пересекающейся с биллиардом A_0. Прообраз этой гиперболы есть пара 2-атомов B, один атом соответствует направлению на критической окружности направо, а другой – налево. Седловой 3-атом разбивается таким образом на два куска – одна часть отвечает движению направо (и гомеоморфна прямому произведению 2-атома B на отрезок), а вторая – движению налево. При этом до отмены биллиардного на гиперболических границах биллиарда A_0 эти части склеиваются так что часть прообраза гиперболы на одном куске, расположенная выше оси Ox склеивается с частью прообраза гиперболы на другом куске также расположенной выше оси Ox. Это обеспечивает то, что при склейке всех разрезанных кусков изоэнергетической поверхности Q^3 в один в полученном произведении 2-атома B на отрезок будет четное число перекруток. Т.е. итоговый атом гомеоморфен 3-атому B.

Для завершения вычисления грубой молекулы осталось заметить, что если каустика совпадает с гиперболой h_0, то на этом уровне бифуркации не происходит, т.е. уровень дополнительного интеграла по прежнему гомеоморфен двумерному тору.

Шаг второй. Вычисление меток. Напомним, что циклы λ на граничных торах седловых атомов выбираются гомотопными слоям расслоения Зейферта, т.е. критическим окружностям. Они определены однозначно, причем их ориентация обязана совпадать с ориентацией критических окружностей. Дополняющие их циклы μ выбираются неоднозначно, но все они должны лежать на граничных окружностях трансверсального критической окружности сечения — 2-атома. Циклы λ на граничных торах минимаксных атомов A однозначно выбираются как стягиваемые в точку внутри атомов-полноторий. Несмотря на то что сами по себе дополняющие их циклы μ выбираются неоднозачно, на них тем не менее можно однозначно определить ориентацию. Дело в том, что при стремлении к критическому слою-окружности атома A эти циклы переходят в эту самую критическую окружность траекторию, которая и задаст на них искомую ориентацию.

Для наглядного представления цикла на граничном торе в нашем случае будем изображать проекцию этого цикла на биллиардный стол. Для восстановления цикла необходимо рассмотреть прообраз этой кривой на торе. Этот прообраз может быть несвязен. В этом случае мы либо в качестве цикла берем любую компоненту связности или либо ту, которая соответствует указанным на рисунке векторам скорости (например, направленным вправо или вверх).

На ребрах графа Фоменко, соответствующих траекториям, касающихся эллипсов (назовем такие ребра и соответствующие им торы эллиптическими) проекции циклов на столы A_i, входящие в состав биллиардной книжки $\mathbb{B}_1$, изображены на рисунке 2д). Очевидно, что цикл $\lambda_B = \mu_A$ переходит часть критической траектории при стремлении к тора к особым слоям атомов B и A, а другой цикл их дополняет и стягивается в точку внутри полнотория A. Циклы $\lambda_B = \mu_A$ на листе b биллиардной книжки проходят по сегменту каустики–эллипсу. Очевидно, что матрица склейки в этом случае имеет вид $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, причем вклада в метку n такие матрицы не дают.

На гиперболическом ребре (траектории касаются гипербол) проекции циклов изображены на рисунке 2е). Прокомментируем цикл λ_B. На листах a_i и c_i для этого цикла необходимо выбирать прообраз кривой, оснащенной черными стрелками на нечетных листах и серыми стрелками на четных листах. На листе b в случае нечетного m необходимо выбрать часть прообраза кривой, соответствующей векторам направленным вправо вверх и влево вниз (черные и белые стрелки), а в случае четного – только вверх (черные и серые стрелки). Заметим, что этот цикл пересекается с циклом λ_A, ровно в m точках: каждая пара a_i, c_i дает только одну точку пересечения с данным циклом.

Выберем ориентацию цикла μ_B так, чтобы она была противоположна ориентации цикла μ_A. Напомним, что мы вольны выбирать здесь ориентацию, так как она зависит, вообще говоря, от выбора ориентации на Q^3. Тогда матрица склейки на этом ребре примет вид $\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $\left[-\frac{-1}{m}\right] = 0$. Утверждение доказано.

■

Замечание 1 *Заметим, что если мы модифицируем книжку и удалим часть биллиардов A_1 то это мо-*

жет привести к изменению грубой молекулы. А именно, в том и только в том случае, если число биллиардов A_1 станет нечетным. В этом случае у произведения 2-атома B на отрезок будет нечетное число перекруток, что приведет к тому, что полученный седловой атом будет гомеоморфен 3-атому A^*.

Фиксируем гиперболу h_1, параметр которой больше чем параметр гиперболы h_0, т.е. которая расположена ближе к оси Oy, чем гипербола h_0. Разобьём в биллиардной книжке $\mathbb{B}_1$ лист b по дуге некоторой гиперболы h_1 на два листа b_1 и b_3 и вклеим в линию разреза лист b_2, который помимо дуг гиперболы h_1 и эллипса e_0 ограничен осью Oy. Полученную биллиардную книжку обозначим через $\mathbb{B}_1(A_0)$ (см. пример на рисунке 3а)).

Утверждение 2 *Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности биллиардной книжки $\mathbb{B}_1(A_0)$, имеет вид, изображенный на рис. 3б), где на всех ребрах метки $r = 0,\ \varepsilon = 1$.*

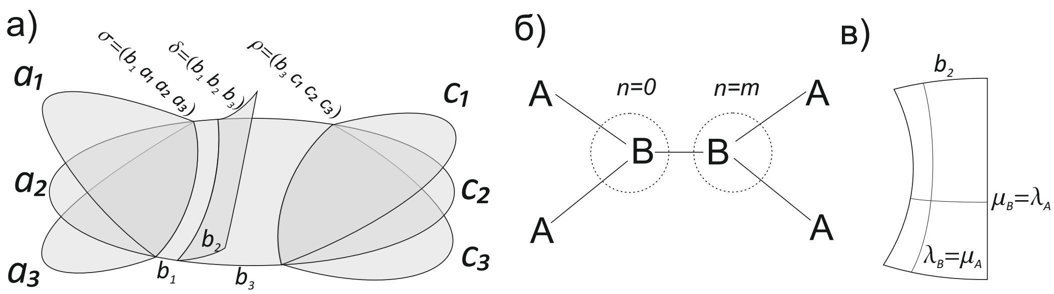

Рис. 3: На рисунке а) представлен пример биллиардной книжки $\mathbb{B}_1(A_0)$ для $m = 3$. В молекуле на рисунке б) все метки на ребрах $r = 0,\ \varepsilon = 1$.

Доказательство. Обозначим параметр гиперболы h_1 через λ_1. Покажем, что при вклейке в книжку $\mathbb{B}_1$ листа b_2, во-первых, не меняется вид бифуркации на фокальном слое, а во-вторых, появляется новая бифуркация B на уровне $\Lambda = \lambda_1$.

Напомним, что на фокальном слое биллиарда A_0, которому эквивалентен лист b_2, бифуркация гомеоморфна прямому произведению атома B на окружность. Отмена биллиардного закона на дуге гиперболы h_1 — это разрез этого 3-атома трансверсально критической окружности. Замена биллиардного закона на этой дуге с перестановки $(b_1,\ b_3)$ на перестановку $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ представляет собой разрез исходного 3-атома B трансверсально критической окружности и вклейку прямого произведения 2-атома B на отрезок. При этом не происходит смены атома на A^* так как в новом листе b_2 нет фокусов и следовательно, не происходит "перекруток".

Заметим, что по отношению к биллиардам b_2 и b_3 дуга гиперболы h_1 является невыпуклой. Тогда на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_1$ не определено продолжение траектории, которая коснулась этой дуги. При дальнейшем увеличении значения интеграла Λ траектории разбиваются на два класса – проходящие по листу b_2 и по листу b_3. Каждый тип траектории лежит на одном торе (так как это просто биллиарды, эквивалентные биллиарду A_0). На этих торах прообраз дуги гиперболы h_1 есть окружность. При $\Lambda = \lambda_1$ происходит склейка этих торов вдоль этих окружностей с образованием особого слоя 3-атома B. При дальнейшем уменьшении значения интеграла происходит разрыв вдоль этой окружности и приклейка кольца – разрезанного тора, соответсвующего прообразу листа b_1. В качестве критической окружности мы будем здесь рассматривать пары точка-вектор, где точка лежит на дуге гиперболы h_1, а вектора скорости её касаются. Заметим, что в данном случае невыпуклая склейка не является траекторией.

Покажем вычисление меток. На рисунке 3в) показаны проекции циклов λ_B и μ_B, соответствующих бифуркации на уровне $\Lambda = \lambda_1$, на биллиардный лист b_2. Очевидно, что гомеоморфный слою расслоения Зейферта на 3-атоме B цикл λ_B совпадает с периодическим циклом μ_A, который переходит в траекторию на атоме A. Дополняющий их цикл стягивается в точку на атоме A, то есть с одной стороны является циклом λ_A, а с другой – μ_A. Получаем что на ребрах между атомом B и атомами A матрицы склейки $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Они задают искомые метки на ребрах и не дают вклада в метки n.

Рассмотрим соотношение циклов на ребре между атомами B. Ориентируем ребро по направлению к фокальному атому B. Фактически, по сравнению с вычислением предыдущей матрицы склейки нам необходимо вместо циклов λ_A, μ_A взять соответственно циклы μ_B, λ_B нового атома B. Для удобства выберем теперь ориентацию цикла μ^+ противоположной чем в доказательстве предыдущего утверждения. Тогда матрица склейки примет вид $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метки, задаваемые такой матрицей, будут искомыми, а вклад в метку n равен $\left[-\frac{0}{1}\right] = 0$ в левую семью и $\left[\frac{m}{1}\right] = m$ в правую семью. Утверждение доказано.

■

Возникает естественный вопрос – можно ли вместо нового атома B добавить в молекулу произвольную семью? Напомним что в терминах теории Фоменко-Цишанга семьей называется часть молекулы, которая содержит только седловые атомы, все метки на ребрах между которыми бесконечны, причем на всех ребрах между семьей и остальным графом конечны. В молекулах выше семьи состоят из одних атомов B.

Напомним здесь два важных результата, которые были получены в рамках доказательства общей гипотезы А.Т.Фоменко о моделировании интегрируемых систем биллиардами.

Теорема 1 *Для любого ориентируемого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов A_0' (см. рис. 1), такая что слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла $\Lambda = b$ (в случае атома A особого значения $\lambda = 0$) её изоэнергетической поверхности Q^3 послойно гомеоморфно данному атому.*

Теорема 2 *Для любой грубой молекулы алгоритмически построена биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов B_0 (см. рис. 1), такая, что ее инвариант Фоменко–Цишанга имеет структуру графа, совпадающего с данной грубой молекулой. Более точно: изоэнергетическая поверхность такой биллиардной книжки склеена из кусков наперед заданных атомов в порядке, задаваемом грубой молекулой.*

Аналогично данным утверждениям докажем следующий факт.

Теорема 3 *Пусть W — произвольная грубая молекула, в вершинах которой находятся атомы без звездочек, а из висячих вершин удалены атомы A. Пусть на ребрах графа между седловыми атомами стоят метки $r = \infty, \varepsilon = 1$.*

Тогда алгоритмически строится биллиардная книжка $\mathbb{B}(W, 0)$, склеенная из биллиардов A_0, меченая молекула которой имеет следующий вид. К каждому свободному нижнему ребру графа W приписывается атом B и два исходящих из него ребра, оканчивающихся атомами A. К каждому свободному верхнему ребру графа W приписывается атом A. На всех ребрах, кроме ребер между седловыми атомами стоят метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$. Все семьи имеют метку $n = 0$.

Доказательство. Воспользуемся конструкцией-алгоритмом, использованным для доказательства теорем 1,2. Биллиарды, реализующие произвольные атомы без звездочек устроены следующим образом. Они получены склейкой нескольких экземпляров биллиарда A_0' вдоль фокальной прямой и вдоль выпуклого эллиптического ребра. При этом все склейки вдоль фокальной прямой локально склеивают не более двух биллиардов (а каждой такой склейке соответствует транспозиция в перестановке на фокальном корешке). Алгоритм работает по-разному для различных функций высоты на атомах. К примеру, для атома B перестраивающего один тор в два и два тора в один будут получаться различные биллиардные книжки. Теперь заменим все биллиарды A_0' на биллиарды B_0. В результате фокальный слой переместится на уровень меньшего граничного эллипса. Несмотря на то, что траектории на этом уровне при касании границы склейки не определены, слоение Лиувилля по прежнему можно определить. Окрестность нового особого слоя по-прежнему будет послойно гомеоморфна наперед заданному атому.

Склейка же произвольной грубой молекулы (без атомов со звездочками) происходит следующим образом. Каждому седловому особому слою приписывается некоторый строго положительный параметр эллипса λ так, что чем больше λ, тем выше в грубой молекуле расположен атом. Далее каждый атом реализуется алгоритмом выше некоторой биллиардной книжкой, склеенной из биллиардов B_0. При этом границы биллиарда B_0 лежат на эллипсах с параметром 0 (больший) и λ (меньший). Для всех седловых атомов гиперболические границы биллиардов B_0 лежат на дугах одних и тех же гипербол. Последовательно склеим все атомы в молекулу. Каждой склейке двух атомов по ребру будет соответствовать изменение перестановки на большей дуге эллипса (перестановка на меньшей останется неизменной). Подробнее о том как меняются перестановки, см. работу [4]

Пусть теперь W – граф, указанный в формулировке теоремы. Заменим его на граф W^- поменяв знак соответствующей функции высоты. Эта операция в частности меняет направление роста функции на атомах, а также меняет местами верхние и нижние висячие вершины. Склеим по графу граф W^- (дополненному атомами A) биллиардную книжку из биллиардов B_0 по алгоритму Ведюшкиной–Харчевой. Заменим теперь каждый биллиард B_0 на биллиард B_1, удлинив его, выбрав другую дугу гиперболы. В этом случае можно показать, что слоение на уровне $\lambda < b$ не изменится. При этом все перестройки, соответствующие графу W^-, происходят на уровнях $\lambda < b$.

Рассмотрим набор торов Лиувилля, соответствующий движению на уровне интеграла $b-\varepsilon$ для достаточно малого положительного ε. Количество торов в точности равно количеству “верхних” ребер в графе W^-. При прохождении уровня $\Lambda = b$ движение по биллиарду B_1 распадается на два движения по биллиардам B_0. Каждый тор верхнего ребра в графе W^- распадается на два тора. Перестройка очевидно, происходит с помощью атома B.

Опишем метки в возникающей молекуле. Рассмотрим тор Лиувилля и его проекцию на биллиардную книжку. Она проектируется в некоторое количество биллиардов B_1. В каждом биллиарде B_1 рассмотрим связную часть прообраза некоторых фиксированных эллипса и гиперболы (см. рис. 4). Очевидно, что на торе эти циклы пересекаются в одной точке. При этом эта пара циклов всегда является подходящей парой циклов для некоторого атома. Например, в графе W^- на торах между седловыми атомами прообразы эллипсов – это циклы λ_S, а прообразы гипербол – дополняющие их циклы μ_S. Все они гомологичны и одинаково ориентированы, что приводит к меткам $r = \infty, \varepsilon = 1$ на ребрах между седловыми атомами в графе W^-. Аналогично разбираются случаи всех остальных ребер: на них циклы λ уже не гомологичны, что приводит к меткам $r = 0, \varepsilon = 1$, при этом вклад в метку n всегда нулевой.

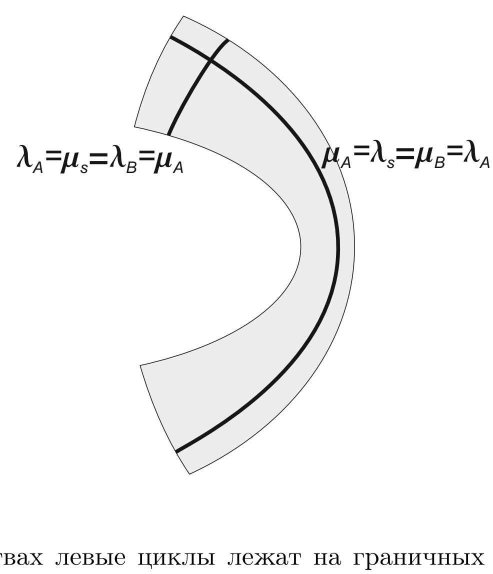

Рис. 4: В представленных равенствах левые циклы лежат на граничных торах минимальных атомов А, а правые – максимальным.

Для получения искомой биллиардной книжки осталось заменить каждый биллиард B_1 на биллиард A_0. При этом все дуги эллипсов с параметром 0 переходят в дугу гиперболы с параметром a (вертикальная прямая). Все склейки теперь происходят вдоль дуг гипербол. Этот переход переворачивает молекулу, в результате мы получаем, что требовалось. ∎

3 Биллиардные книжки малой сложности: классификация, свойства слоений Лиувилля

В работах [1] и [3] В.В.Ведюшкиной были классифицированы топологические биллиарды, имеющие только с выпуклые дуги склейки и имеющие произвольные (выпуклые и невыпуклые) дуги склейки. Напомним, что склейка стола-комплекса происходит по общим гладким дугам границы стола (эллипсам , гиперболам или отрезкам осей). А именно, для каждого плоского листа (элементарного биллиардного стола) определена проекция на плоскость, причем проекции всех граничных дуг всех листов являются дугами кривых из одного и того же семейства софокусных квадрик (в том числе, двух вырожденных).

Напомним, что в топологическом биллиарде каждая граничная дуга плоских столов комплекса является либо склейкой ровно двух плоских столов (проекции которых лежат или по одну, или по разные стороны от проекции ребра склейки, т.е. дуги некоторой софокусной квадрики), либо свободной границей ровно одного плоского листа.

При этом могут возникать вершины склейки: когда два листа склеиваются хотя был по двум своим граничным дугам, имеющим общую точку. Здесь и далее мы полагаем, что каждый угол каждого плоского листа равен $\pi/2$, т.е. не равен $3\pi/2$.

В терминах биллиардных книжек топологический биллиард можно описать следующим образом. Каждая перестановка на каждом 1-ребре стола-комплекса является тождественной (свободная границы) или транспозицией. Тем самым, каждой дуге на плоскости (проекции одной или несколько ребер стола-комплекса) сопоставлена перестановка, состоящая из неподвижных точек и независимых транспозиций. В каждой вершине выполнено условие коммутирования перестановок на пересекающихся ребрах.

Естественным следующим вопросом является задача классификации биллиардных книжек. Данная задача существенно сложнее, чем в случае топологических биллиардов. Дело в том, последние не могли иметь "разветвлений": окрестность каждой точки конфигурационного пространства гомеоморфна или открытому диску, или полудиску (как частный случай, четверть диска с центром в вершине угле). Единственным условием для книжек является коммутирование перестановок в каждой вершине комплекса (и в каждой точке пересечения проекций дуг).

Напомним, что для каждого стола-комплекса определена проекция на плоскость, при которой каждый плоский лист отображается в стол элементарного плоского биллиарда. Все они (для конкретного стола-комплекса) ограничены дугами одного и того же семейства софокусных квадрик. Движение частицы по 2-грани комплекса вдали от ребер и вершин его склейки определяется поднятием такой проекции (и потому интегрируемо), а продолжение траектории после достижения ребра склейки определяется циклической перестановкой, соответствующей ему.

Будем обозначать перестановки на эллиптических дугах ω, на гиперболических σ, а на фокальных (лежащих на оси Ox) τ.

Опишем все биллиардные столы-комплексы с малым (1, 2 или 3) числом ребер склейки. Поскольку граница проекции стола на плоскость заведомо не может иметь меньше гладких граничных дуг, чем количество ребер комплекса, то граница стола может быть лишь областями вида A_2, A_1, A_2', A_1'. Они изображены на рисунке Если граница проекции стола имеет хотя бы 4 граничные дуги, то комплекс имеет не менее 4-х ребер.

Лемма 1 *1. Любая биллиардная книжка с одним 1-ребром имеет вид $A_2(\sigma, N)$, т.е. является склейкой N эллипсов по циклической перестановке $\omega = (1, \dots, N)$.*

2. Особыми значениями интеграла являются $\lambda = 0, b, a$. При этом уровень $\lambda = 0$ состоит из двух (минимальных) окружностей, уровень $\lambda = a$ состоит из одной (при нечетном N) или двух (при четном N) максимальных окружностей. Уровень $\lambda = b$ содержит такое же количество особых окружностей, и слоение Лиувилля в окрестности такой окружности послойно гомеоморфно седловой боттовской (невырожденной) окружности.

Доказательство. 1. Первый факт следует из того, что элементарные биллиарды (кроме области A_2, ограниченной эллипсом) имеют более одной граничной дуги.

2. Известно, что класс гомеоморфности уровня биллиарда меняется лишь при тех уровнях λ, которым соответствуют граничные дуги склеиваемых 2-граней комплекса или полуоси $\lambda = b, a$.

Уровень $\lambda = 0$ содержит границу каждой плоской области стола $A_2(\sigma, N)$. Поскольку в комплексе имеется лишь одно такое ребро, то ему соответствует движение по эллипсу (по или против часовой стрелки). По аналогии с областями $A_2, 2A_2$ и.т.п (см. [1]) нетрудно видеть, что в окрестности данной окружности слои являются торами, и каждая из двух полулокальных особенностей послойно гомеоморфна минимальному атому A [2], т.е произведению расслоенного диска на окружность.

При $\lambda = a$ в проекции на плоскость Oxy движение частицы происходит по вертикальной оси Oy. Каждая траектория частицы замкнута, т.е. после нескольких отражений она должна вернуться на тот же лист и иметь то же направление (вверх или вниз), что в начале. Поскольку каждое отражение меняет направление, то циклу соответствует четное число ударов о границу (т.е. четное количество применения σ — степень перестановки σ^2). Если $N \vdots 2$, то перестановка σ^2 для циклической σ состоит из двух циклов длины $N/2$. Аналогично доказательству для простейших изученных книжек [5], это один или 2 атома A.

В случае $\lambda = b$ особое множество проектируется на ось Ox. При этом проекция особого слоя (и близких слоев $\lambda = b \pm \varepsilon$) содержит не только окрестность данного отрезка. Аналогично $\lambda = a$, особое множество состоит из двух окружностей. В окрестности каждой точки отрезка оси Ox (лежащего внутри эллипса), исключая фокусы и концы отрезка (отражение от границы), слоение Лиувилля послойно гомеоморфно слоению вблизи седловой боттовской точки ранга 1 в Q^3 интегрируемой системы. Т.к. фокусы лежат далеко от границы, то для них то же саоме следует из анализа области A_2, а для окрестности точки отражения это следует по аналогии с топологическими биллиардами.

Лемма доказана. ∎

Теперь опишем произвольную биллиардную книжку, имеющую две граничные дуги.

Лемма 2 • *Любая биллиарная книжка с двумя граничными ребрами является склейкой N листов вида A_1 по перестановкам σ, τ или A'_2 с перестановками σ, ω следующего вида:*

- $A_1(\sigma, \omega, N) : N \in \mathbb{N}, \sigma = (1, \ldots, N), \omega = \sigma^k, \gcd(k, N) = 1.$
- $A_2(\sigma, \tau, N) : N \in \mathbb{N}, \sigma = (1, \ldots, N), \tau = \sigma^k, \gcd(k, N) = 1.$

Доказательство. Доказательство следует из того, что две эти перестановки должны коммутировать, и каждая при этом должна быть циклической — состоять лишь из одного независимого цикла. ∎

Теперь обсудим свойства особых окружностей их слоений Лиувилля. А именно, выясним, когда окрестность каждой такой точки (и их орбиты целиком) в трехмерном уровне энергии Q^3 послойно гомеоморфна таковой для боттовской (невырожденной) особенности ранга 1 в интегрируемой системе.

Фокальному уровню биллиарда на столе $A_1(\sigma, \omega, N)$ соответствует одна или несколько седловых критических окружностей, т.е. окрестность каждой такой окружности в полулокальной особенности послойно гомеоморфна боттовской (невырожденной) седловой окружности. На удалении от концевых точек отрезка (оси Ox, лежащего внутри данной области типа A_1) это следует из свойств слоения для A_1, а вблизи концов (лежащих “вдали” от фокусов) — из поведения слоения Лиувилля при склейке (в биллиардных книжках), далекой от фокусов семейства квадрик.

Фокальному уровню биллиарда на столе $A_2(\sigma, \tau, N)$ соответствует неботтовская седловая критическая окружность, если ω содержит циклы длины 3 и более (т.к. что напрямую следует для невыпуклой склейки более чем двух областей). В оставшемся (боттовском) случае имеем $N = 2, \omega = \sigma^1 = (12)$. Его инвариант Фоменко–Цишанга известен и вычислен в [6] (там такой стол был обозначен как $\delta_\beta(A'_2)^2_{2x}$).

Лемма 3 • *Любая биллиарная книжка с тремя граничными ребрами является склейкой N листов вида A_1 по перестановкам σ, τ или A'_2 с перестановками σ, ω следующего вида:*

- *$A_1(\sigma, \omega, N) : N \in \mathbb{N}, \sigma = (1, \ldots, N), \omega = \sigma^k, \gcd(k, N) = 2$;*
- *$A_2(\sigma, \tau, N) : N \in \mathbb{N}, \gcd(k, N) = 2$, где $\sigma = (1, \ldots, N), \tau = \sigma^k$ или $\tau = (1, \ldots, N), \sigma = \sigma^k$.*
- *стол склеен из N_1 "левых" половин эллипса и N_2 "правых" половин эллипса (областей типа A_1). Тогда $N_1 = N_2 = N$, и слоение Лиувилля такого биллиарда совпадает со слоением биллиарда, склеенного из $2N$ областей типа A_1 по перестановкам вида $\omega = (1, \ldots, 2N)$ на вертикальной (гиперболической) граничной дуге и $\sigma = \omega^2$ на эллиптической. Все особые окружности являются боттовскими*
- *стол склеен из N областей типа A_1' (например, часть эллипса, лежащая в одном из четырех квадрантов). При этом каждая из перестановок σ (на эллиптической дуге), ω (на гиперболической или вертикальной) и τ (на фокальной) должны быть циклическими длины N степенями одной и той же перестановки (например, $\omega = \sigma^k, \tau = \sigma^m$). Исключая $N = 1, 2$, слоения Лиувилля обладают неботтовскими особенностями.*

Случай $A_1(\sigma, \omega, N)$ с перестановками $\sigma = (1, \ldots, N), \omega = \sigma^k$ и наибольшим общим делителем $\gcd(k, N) = 2$ означает, что перестановка ω имеет 2 цикла длины $N/2$.

Замечание 2 *Разумеется, можно построить стол из класса $A_1(\sigma, \omega, N)$, поменяв перестановки σ, ω местами, т.е. взяв $\sigma = \omega^2, \omega = (1, \ldots, N)$. Слоения Лиувилля двух таких систем будут отличаться направлением роста интеграла, а сами столы-комплексы будут изоморфны друг другу.*

Отметим, что при разбиении областей A_1 или A_2' на половинки (и нетривиальной перестановки их склейки) мы получим не менее четырех ребер склейки (новое ребро поделит хотя бы одну из существующих дуг хотя бы на 2 части).

Стол $A_1'(N, \omega, \sigma, \tau)$, исключая $\tau = (1, 2) \ldots (2m-1, 2m)(2m+1) \ldots (N)$, имеет неботтовские перестройки на уровне $\lambda = b$. При условии наличия не более трех ребер комплекса, имеем или $N = 1, \sigma = \omega = \tau = (1) = id$, или $N = 2, \sigma = \omega = \tau = (12)$. При $N = 1$ слоение Лиувилля не имеет седловых особенностей, а во втором — имеет атом A^* с метками $r = 1/2$, меткой $n = -1$ и изоэнергетической поверхностью Q^3, гомеоморфной сферическому расслоению Зейфера с тремя особыми слоями [6]

3.1 Биллиардные столы над областью A_1

В данном разделе обсудим вопрос классификации билилардных книжек $A_1(\omega, \sigma, N)$ над областью A_1 (содержащей один фокус и ограниченной дугой эллипса и дугой ветви гиперболы), склеенных из N ее одинаковых экземпляров по перестановкам ω, σ на гиперболической и эллиптической дугах соответственно.

Напомним, что перестановки ω и σ коммутируют, а связность стола означает, что образ любого элемента $1 \ldots N$ под действием перестановок $\omega^\alpha, \sigma^\beta$ по всем $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ совпадает со всем множеством N листов.

Лемма 4 *Пусть $\omega \circ \sigma = \sigma \circ \omega$, и элемент 1 входит в $O_\sigma(1)$ — независимый цикл длины p перестановки σ. Тогда множество $O_\sigma(\omega(1))$ есть независимый цикл длины p перестановки σ, который либо совпадает с $O_\sigma(1)$ (если $\omega(1) = \sigma^k(1), 0 < k < p$), либо не пересекается с $O_\sigma(1)$.*

Доказательство. Данный факт следует из коммутативности σ и ω: $\omega(\sigma^k(1)) = \sigma^k(\omega(1))$. Если $\omega(1) \in O_\sigma(1)$, то цикл $O_\sigma(\omega(1)) \subset O_\sigma(1)$. Тогда множество образов 1 при действии всех $\omega^\alpha, \sigma^\beta$ совпадет с $O_\sigma(1)$, т.е. из связности стола будет следовать цикличность перестановок σ и $\omega = \sigma^k$.

Замечание 3 *Пара чисел k, N полностью задает данную пару перестановок. Перестановка $\omega = \sigma^k$ имеет $\gcd(N, k)$ независимых циклов длины $\dfrac{N}{\gcd(N, k)}$. Отметим, что при $\gcd(N, k) = 2$ отсюда следует результат леммы 2 для столов $A_1(\omega, \sigma, N)$.*

Если $\omega(1) \notin O_\sigma(1)$, то циклы $O_\sigma(1)$ и $O_\sigma(\omega(1))$ не пересекаются. Т.к. число p — первый натуральный номер, начиная с которого $\sigma^p(1) = \sigma^0(1) = 1$, то $\omega(\sigma^k(1)) = \sigma^k(\omega(1)) \neq \omega(1)$ при $0 < k < p$ (и номера совпадают при

$k = p$). ■

Тем самым, все циклы $O_\sigma(1), O_\sigma(\omega(1)), \dots O_\sigma(\omega^q(1)) = O_\sigma(1)$ имеют одну и ту же длину p. Здесь q — длина цикла $O_\omega(1)$ (и остальных независимых циклов перестановки ω).

Иными словами, из связности слоя следует, что обе перестановки σ и ω есть произведение независимых циклов соответствующих длин p и q. В группе всех перестановок вида $\omega^\alpha, \sigma^\beta$ степени перестановки σ и степени перестановки ω образуют циклические подгруппы.

Тем самым, возникают следующие соотношения для некоторых наименьших натуральных s, t и некоторых $\alpha \in [0, p-1]$,:

$$\omega^s = \sigma^\beta, \qquad \sigma^t = \omega^\alpha, \qquad\qquad \alpha \in [0, q-1],\ \beta \in [0, p-1].$$

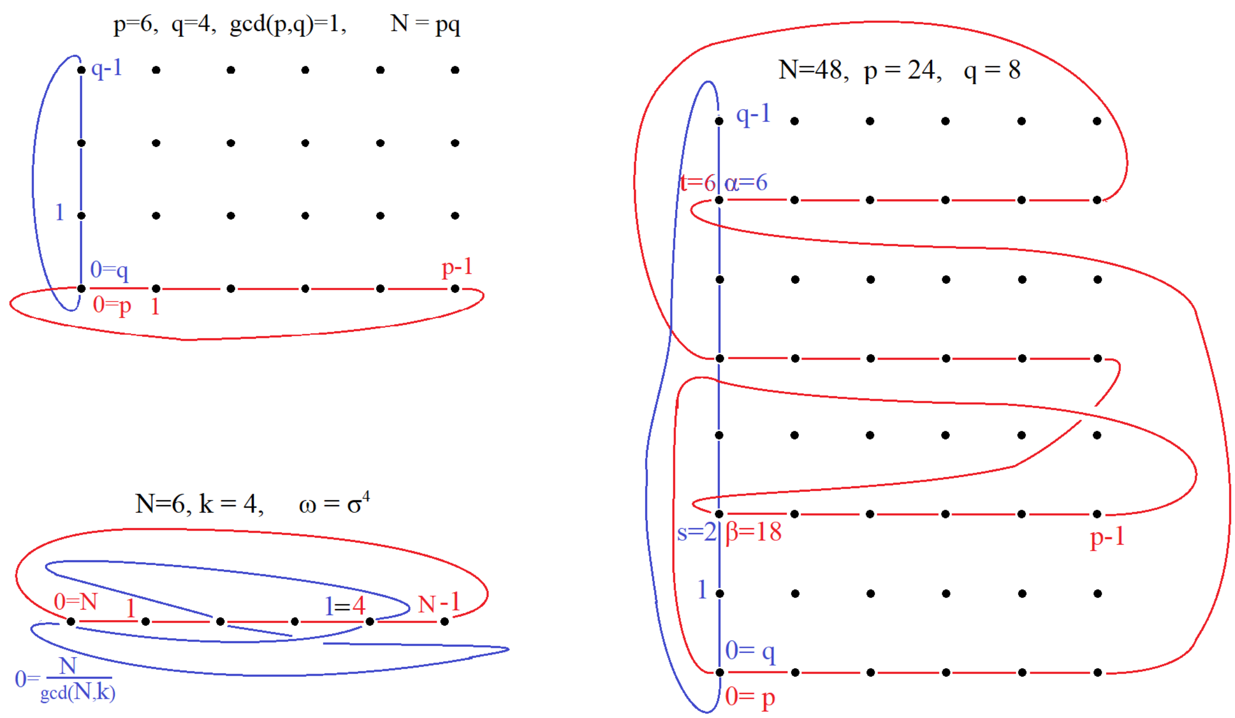

Рис. 5: Пары перестановок на множестве из N элементов. Синим и красным — степени перестановок ω и σ соответственно для достижения данного элемента из начального. Случаи: а. $\omega = \sigma^k$, б. $N = pq$, в. $N < pq, \omega^2 = \sigma^{18}, \sigma^6 = \omega^6$.

Стартуем с чисел N, p, q. Здесь N — количество листов в книжке, а числа p, q — длины циклов σ и ω соответственно. В качестве таких длин подходят любые делители N, такие что $pq \vdots N$. Количество циклов в перестановках σ и ω равно N/p и N/q соответственно.

Циклы $O_\sigma(1)$ и $O_\omega(1)$ имеют pq/N пересечений. Расстояние между двумя последовательными (в смысле σ, например) пересечениями равно $p/(pq/N) = N/q$ (т.е. такая степень σ) переведет первое в O_σ пересечение в следующее. Тем самым,

$$s = N/p, \qquad t = N/q.$$

Числа α, β являются произведениями чисел N/p и N/q с некоторыми порождающими элементами (натуральными числами a, b) в циклической группе длины $\dfrac{pq}{N}$ (т.к. орбиты элемента 1 при действии степени перестановки σ^β или ω^α порождают пересечение O_σ и O_ω целиком).

$$\sigma^t = \omega^\alpha = \omega^{a\cdot s} \qquad \omega^s = \sigma^\beta = \sigma^{b\cdot t} = (\sigma^t)^b = \omega^{ab\cdot s}.$$

Иначе говоря, имеем

$$ab \equiv 1 \,\mathrm{mod} \frac{p\cdot q}{N}.$$

Тем самым, в кольце вычетов $\mathbb{Z}_r$, где $r = \dfrac{p\cdot q}{N}$, надо выбрать группу обратимых элементов $\mathbb{Z}_r^\times$, и в ней взять два взаимно-обратных элемента a, b.

Утверждение 3 *Связная биллиардная книжка типа $A_1(N,p,q)$ полностью задается следующими данными:*

- $N \in \mathbb{N}$ *— количество листов книжки*
- $p, q: \quad N \vdots p,\ N \vdots q,\ p\cdot q \vdots N$ *— длины циклов $O_\sigma(1), O_\omega(1)$ перестановок σ и ω соответственно,*
- $a \in \mathbb{Z}_r^\times$ *(где $r = \dfrac{p\cdot q}{N} \in \mathbb{N}$) задает величины сдвигов на пересечении циклов $O_\sigma(1)$ и $O_\omega(1)$*

$$\sigma^t = \omega^\alpha = \omega^{at}, \qquad \omega^s = \sigma^\beta = \sigma^{bt}, \qquad\qquad s = \frac{N}{q}, t = \frac{N}{p}, a\cdot b \equiv 1 \,\mathrm{mod}\, r.$$

Все такие биллиарды имеют боттовские особенности. Данный результат несложно обобщить на случай трех коммутирующих перестановок, где третья перестановка τ стоит на фокальной граничной дуге. Если она не является произведением независимых транспозиций и неподвижных элементов, то особенность на уровне $\lambda = b$ заведомо не будет боттовской.

3.2 Конструкция биллиардной книжки $\mathbb{B}(W, m)$ для произвольной семьи W без звездочек.

Пусть W – связный граф Фоменко (граф Риба, в вершинах которого указаны атомы–перестройки), у которого удалены все минимаксные атомы A, а седловые особенности не содержат особых слоев расслоения Зейферта (т.е. описывающие их атомы не содержат звездочек). Для этого графа построим по алгоритму из теоремы 3 биллиардную книжку $\mathbb{B}(W, 0)$. Эта книжка склеена из биллиардов вида A_0, не содержащих фокусов и расположенных между ветвями гипербол из фиксированного софокусного семейства. Потребуем, что все биллиарды A_0 были ограничены дугами одного и того же эллипса.

Напомним, что все ребра графа W имеют ориентацию по направлению роста дополнительного интеграла. Рассмотрим произвольное нижнее ребро e этого графа. При реализации книжкой $\mathbb{B}(W, 0)$ это ребро (с нулевой меткой r) соединяет граф W с атомом B, из которого исходят два атома A. Напомним, что траектории, которые отвечают этому участку молекулы устроены так. Пусть $A_0^1, A_0^2, ...A_0^k$ это набор биллиардов-листов книжки $\mathbb{B}(W, 0)$ причем по биллиардам A_0^i с нечетными номерами i траектории, отвечающие ребру e совершают движения слева направо, а с четными – справа налево. Направление движения меняется в те моменты, когда траектория достигает граничной гиперболы и переходит на другой биллиард. Если k нечетно, то как минимум один биллиард в этом наборе встретится дважды (один раз с четным, а другой раз – с нечетным номером).

При движении по ребру e вниз при достижении атома B выделяется одна критическая траектория, проходящая по отрезкам фокальной прямой. Расположенным ниже этого атома B ребрам отвечают движения по двум наборов биллиардов $B_0^1, B_0^2, ...B_0^k$, расположенных выше и ниже фокальной прямой. Они являются подобластями биллиардов $A_0^1, A_0^2, ...A_0^k$ и получены из них удалением внутренности эллипса – каустики, которой касаются траектории.

Модифицируем книжку $\mathbb{B}(W, 0)$ следующим образом. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольное натуральное число. Рассмотрим биллиарды A_0^1, A_0^2 и A_0^3. Пусть биллиарды A_0^1 и A_0^2 склеены вдоль гиперболической дуги h_1, а биллиарды A_0^2 и A_0^3 вдоль гиперболической дуги h_2. Траектории проходящие по листу A_0^1 слева направо после удара о корешок склейки h_1 переходят на биллиард A_0^2 и продолжают движение справа налево. Траектории проходящие по листу A_0^2 справа налево после удара о корешок склейки h_2 переходят на биллиард A_0^3 и продолжают движение слева направо. В силу алгоритма построения книжки одна из дуг h_1 или h_2 лежит на оси Oy. Без ограничения общности можно считать, что это дуга h_1, так как можно считать, что на последнем шаге алгоритма все невыпуклые эллиптические дуги склейки перешли в гиперболические дуги, расположенные левее оси Oy.

Приклеим к корешку h_1 справа от вертикальной оси m подходящих биллиардов A_1 (то есть ограниченных тем же эллипсом, что и все биллиарды A_0 и вертикальной прямой). На корешке h_1 изменим перестановку, вставив в цикл между номерами биллиардов A_0^1 и A_0^2 новые номера, присвоенные биллиардам A_1.

Приклеим к корешку h_2 слева от него m подходящих биллиардов A_1 (то есть ограниченных тем же эллипсом, что и все биллиарды A_0 и гиперболой, на которой лежит корешок h_2). На корешке h_2 изменим перестановку, вставив в цикл между номерами биллиардов A_0^2 и A_0^3 новые номера, присвоенные биллиардам A_1. Полученную биллиардную книжку обозначим через $\mathbb{B}(W,m)$.

Теорема 4 *Пусть W — произвольная грубая молекула, в вершинах которой находятся атомы без звездочек, а из висячих вершин удалены атомы A. Пусть на ребрах графа между седловыми атомами стоят метки $r=\infty, \varepsilon=1$.*

Тогда алгоритмически строится биллиардная книжка $\mathbb{B}(W,m)$, склеенная из биллиардов A_0 и A_1, меченая молекула которой имеет следующий вид. К каждому свободному нижнему ребру графа W приписывается атом B и два исходящих из него ребра, оканчивающихся атомами A. К каждому свободному верхнему ребру графа W приписывается атом A. На всех ребрах, кроме ребер между седловыми атомами стоят метки $r=0,\ \varepsilon=1$. Семье, которую образует граф W, отвечает метка $n=m$, все остальные семьи имеют метку $n=0$.

Доказательство.

Сделаем важное замечание о связи траекторий биллиардных книжек $\mathbb{B}(W,0)$ и $\mathbb{B}(W,m)$. Оказывается, что при таком определении книжки $\mathbb{B}(W,m)$ меняются только торы Лиувилля (и отвечающие им траектории), соответствующие в молекуле Фоменко выбранному ребру e. В самом деле, для того чтобы траектория попала на биллиарды A_1 материальная точка должна либо удариться в ребро h_1, совершая движение слева направо, либо ударится в ребро h_2 при движении в обратном направлении. При этом очевидно, она должна находиться на выделенных нами биллиардах A_0^1 и A_0^2. Это позволяет говорить о том, что матрицы склейки на остальных ребрах молекулы не меняются.

Осталось рассмотреть траектории, проходящие по выделенным биллиардам $A_0^1, A_0^2, ...A_0^k$ в указанном в алгоритме направлении (по нечетным – слева направо, по четным – справа налево). Анализ соответствующих торов и траекторий почти дословно повторяет доказательство утверждения 2. Матрица склейки на ребре e теперь будет давать вклад в метку n для верхней семьи равный m. ■

Теорема 5 *Пусть $\sigma=(1\ 2\ ...\ m)$ – циклическая перестановка из m элементов. Рассмотрим биллиардные книжки, склеенные из m экземпляров биллиарда A_1, где на гиперболическом корешке стоит циклическая перестановка $\sigma=(1\ 2\ ...\ m)$, а на эллиптическом корешке – тождественная (биллиардная книжка $B(A_1,m,\sigma,id)$) или обратная ей перестановка (биллиардная книжка $B(A_1,m,\sigma,\sigma^{-1})$). Тогда их инварианты Фоменко-Цишанга, описывающие слоение Лиувилля изоэнергетических поверхностей изображены на рисунке 6а) (для биллиардной книжки $B(A_1,m,\sigma,id)$) и 6б) (для биллиардной книжки $B(A_1,m,\sigma,\sigma^{-1})$).*

Доказательство. Рассмотрим случай биллиардной книжки $B(A_1,m,\sigma,id)$.

Количество торов на уровне интеграла $\lambda<b$ (на нём траектории касаются эллипсов) описывается количеством циклов в перестановке σ^2. В самом деле, совершая движение сверху вниз вдоль каустики-эллипса и ударяясь только в эллиптическую границу материальная точка не меняет номер биллиарда. При ударе о гиперболическую границу номер биллиарда увеличивается на единицу (результат необходимо взять по модулю m), но направление вдоль эллипсов (каустики и граничного) меняется на противоположное. Чтобы снова его поменять, материальной точке необходимо дважды удариться о гиперболическую границу, поменяв номер

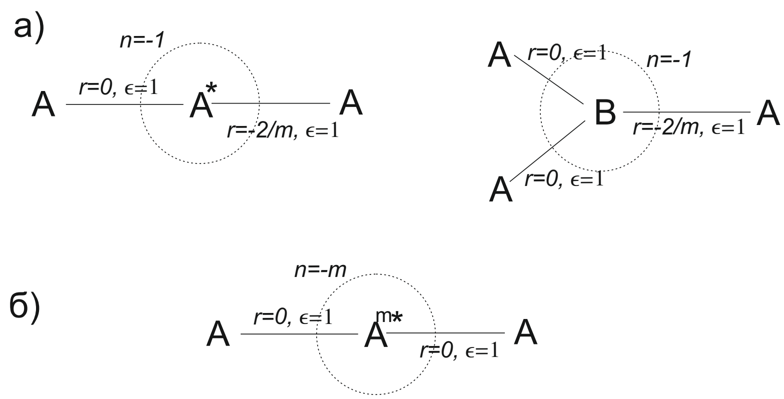

Рис. 6: Инварианты Фоменко-Цишанга для книжки, склеенной из n экземпляров биллиарда A_1, где на гиперболическом корешке стоит циклическая перестановка $\sigma = (1\ 2\ ...\ n)$, а на эллиптическом корешке – тождественная (а) или обратная ей (б) перестановка. В случае а) вид грубой молекулы зависит от четности n. Для нечетного n – молекула слева, а для четного – справа.

биллиарда по перестановке σ^2. Количество циклов этой перестановке фиксирует количество торов Лиувилля. Поэтому оно в случае четного m равно двум, т.к. $\sigma^2 = (1\ 3\ ...\ m-1)(2\ 4\ ...\ m)$, а в случае нечетного m – единице, т.к. $\sigma^2 = (1\ 3\ ...\ m\ 2\ 4\ ...\ m-1)$.

На уровне интеграла $\lambda > b$ (траектории касаются гипербол) всегда один тор. Материальная точка в результате ударов о гиперболическую границу может произвольно поменять номер биллиарда (ударившись подходящее число раз).

На уровне интеграла $\lambda = b$ выделена ровно одна критическая траектория, проходящая по фокальной прямой. Так как можно показать, что все перестройки в биллиардах невырожденные, то вид атома этим полностью определяется. Перестройку на этом уровне можно описать и по-другому. Перестройка торов в биллиарде A_1 на фокальном уровне описывается атомом A^*. Причемотмена биллиардного закона на гиперболической границе приводит к разрезу этого атома вдоль двумерного атома B, трансверсального критической окружности. Склейка m экземпляров разрезанного биллиарда m в биллиардную книжку $B(A_1, m, \sigma, id)$ приводит к склейке m разрезанных атомов A^*. Поэтому если число m четно, то у полученного атома будет четное число "перекруток" (что сделает его гомеоморфным атому B). Если m нечетно, то итоговый атом останется гомеоморфным атому A^* (см. аналогичное доказательство утверждения 1).

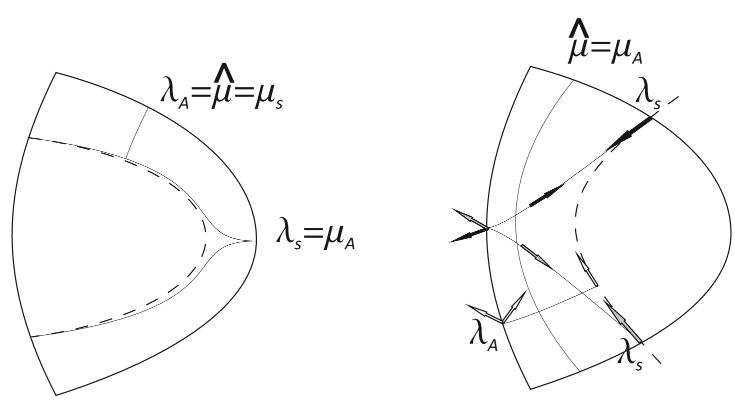

Рис. 7: Циклы для книжки $B(A_1, m, \sigma, id)$.

Вычислим метки. Ориентируем все ребра по направлению к седловому атому. На рисунке 7 изображены проекции циклов на биллиардный стол. Как и в доказательстве предыдущих утверждений мы будем изображать циклы их проекциями – кривыми на биллиардном столе, прообразы которых на торах Лиувилля будут реализовывать подходящие циклы λ и μ. На торах, траектории на которых касаются эллипсов, проекции циклов λ_A (и соответственно μ_s) лежат только на одном листе биллиардной книжки (без ограничения общности можно считать, что на первом). Проекция циклов λ_s и μ_A проходит по всем листам книжки. Вследствие очевидных соотношений $\lambda_s = \mu_A,\ \mu_s = \lambda_A$ получаем что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = 0,\ \varepsilon = 1$, а вклада в метку n такая матрица не дает.

Вычислим метки на ребре графа, соответствующем торам траектории которых касаются гипербол. Разберем отдельно случаи четного и нечетного m.

Пусть m четно. Тогда при взятии прообраза кривой для восстановления цикла λ_s необходимо брать часть кривой с черными векторами скорости на нечетных номерах листов биллиардной книжки и часть кривой с серыми векторами скорости на четных номерах листов биллиардной книжки (см. рис. 7). Тогда такой цикл будет пересекаться с циклом $\hat{\mu} = \mu_s$ в одной точке (напомним что проекция этого цикла лежит только в одном листе биллиарда). Исчезающий цикл λ_A проходит по всем листам биллиардной книжки проходя на каждом листе от каустики до границы. В результате мы имеем на этом ребре следующие соотношения. Во-первых, $\mu_s = \mu_A$ – цикл $\hat{\mu}$ пересекается с циклом λ_A в одной точке и переходит в критическую траекторию, проходящую по гиперболическому корешку биллиарда. Во-вторых, $\lambda_s = -\lambda_A + \frac{m}{2}\mu_A$. Поясним, что цикл λ_A на каждом листе биллиарда проходит до каустики и обратно, так же как и соответствующая дуга-проекция цикла λ_s. Знак минус перед λ_A выбран таковым для того, чтобы итоговая матрица склейки имела отрицательный определитель (так как ранее мы фиксировали ориентацию на Q^3 ориентацией цикла μ_s выбрав её сонаправленной с ориентацией цикла μ_A). Далее заметим что цикл λ_s проходит вдоль каустики в обоих направлениях на каждой паре биллиардов A_1, то есть в итоге он проходит вдоль каустики ровно $\frac{m}{2}$ раз. Когда соответствующий тор Лиувилля стремится к седловому значению этот цикл переходит в критическую траекторию, а когда к максимальному то наматывается на критическую подходящее число раз, оставаясь сонаправленным с ней. Это определяет знак перед μ_A в рассматриваемом соотношении. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = -\frac{2}{m},\ \varepsilon = 1$, вклад в метку $n = [-\frac{1}{\frac{m}{2}}] = [-\frac{2}{m}] = -1$.

Пусть теперь m нечетно. Тогда для восстановления цикла λ_s необходимо брать обе части кривой, изображенной на рисунке 7 (как с черными так и с серыми векторами скорости). Теперь выражение этого цикла через базис на граничном торе атома A выглядит так: $\lambda_s = -2\lambda_A + m\mu_A$ (фактически мы вынуждены были удвоить этот цикл). Далее, такой цикл λ_s теперь пересекает цикл $\hat{\mu}$ в двух точках. Теперь в качестве μ_s необходимо выбрать цикл $\frac{\hat{\mu}+\lambda_s}{2}$ (см. подробнее правила выбора циклов на граничных торах атомов со звездочками [2]). Тогда $\mu_s = \frac{\hat{\mu}+\lambda_s}{2} = \frac{\hat{\mu}-2\lambda_A+m\mu_A}{2} = \frac{\mu_A-2\lambda_A+m\mu_A}{2} = -\lambda_A + \frac{m+1}{2}\mu_A$. Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -2 & m \\ -1 & \frac{m+1}{2} \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = -\frac{2}{m},\ \varepsilon = 1$, вклад в метку $n = [-\frac{\frac{m+1}{2}}{m}] = [-\frac{m+1}{2m}] = -1$.

Рассмотрим биллиардную книжку $B(A_1, m, \sigma, \sigma^{-1})$). Она отличается от предыдущей тем, что вместо тождественной перестановки на эллиптическом корешке теперь на нём стоит обратная к σ перестановка.

На минимальном и максимальном уровнях интеграла в силу симметрии теперь одна особая траектория (и примыкающий к ней один тор). А на седловом – ровно m критических траекторий, проходящих по фокальной прямой: траектория двигая по листу i влево и по листу $i+1 \mod m$ влево. Тогда, атом описывающий перестройку однозначно определяется как атом A^{m*}, где число звездочек равно m (только он перестраивает один тор в один так чтобы на особом слое лежало m критических траекторий). Накрывающий его атом C_m может быть восстановлен как прообраз дуги фиксированной гиперболы.

Вычислим метки. Отметим, что на ребре соответствующем тору, траектории которого касаются эллипсов проекции циклов можно взять также как на рисунке 7. Однако теперь цикл $\lambda_A = \hat{\mu} = \mu_s$ проходит по всем листам биллиардной книжки, а цикл $\lambda_s = \mu_A$ только по двум (например по первому и последнему). Поэтому они по-прежнему пересекаются только в одной точке. Рассмотрим тор, траектории которого касаются гипербол. Для выбора циклов $\lambda_s,\ \lambda_A,\ \hat{\mu}$ также воспользуемся рисунком 7. Цикл λ_s также проходит по двум листам, при этом можно считать, что на первом листе он направлен к каустике-гиперболе, а на последнем (с номером m) от неё. Этот цикл пересекается с циклом λ_A в одной точке и переходит в критическую траекторию, проходящую по гиперболическому корешку при стремлении тора к критической максимальной окружности. Следовательно, $\lambda_s = \mu_A$.

Для выбора μ_s согласно правилу выбора циклов необходимо чтобы выполнялось следующее соотношение $\frac{\sum \hat{\mu}+m\lambda_s}{2} = \sum \mu_s$ так как седловой атом имеет ровно m звездочек. На торе где траектории касаются эллипсов мы имеем один цикл $\hat{\mu}$ который в одной точке пересекается с циклом λ_s. Поэтому подправить прибавив необходимое число циклов λ_s необходимо цикл $\hat{\mu}$ на другом ребре.

Найдем связь между циклами $\hat{\mu}$ (связной частью прообраза дуги гиперболы) и циклами λ_A и $\mu_A = \lambda_s$. Цикл μ_A проходит вдоль каустики в обоих направлениях один раз, и от каустики до гиперболического корешка в обе стороны дважды. Цикл λ_A проходит от каустики до гиперболического корешка и обратно m раз (по разу на каждом листе). Сколько раз вдоль каустики проходит связная часть прообраза дуги гиперболы (цикл $\hat{\mu}$) зависит от четности m. Если m четно, то циклов $\hat{\mu}$ два. Для одного из них на нечетных листах вектора скорости направлены вверх, а на нечетных – вниз, а для другого – наоборот. Получается движение вдоль каустики и обратно было совершено $\frac{m}{2}$ раз. Если m нечетно, то движение вдоль каустики и обратно было совершено ровно m раз (на каждом листе вверх и вниз). Получаем, что при нечетном m искомое соотношение имеет вид

$$-2\lambda_A + \hat{\mu} = m\mu_A,$$

а при четном

$$-2\lambda_A + 2\hat{\mu} = m\mu_A.$$

В этих соотношениях как и в предыдущем случае знак минус перед λ_A выбран таковым для того, чтобы итоговая матрица склейки имела отрицательный определитель, так как мы зафиксировали ориентацию $\hat{\mu}$ на этом торе совпадающей с ориентацией μ_A.

Пусть теперь m нечетно. Тогда цикл $\hat{\mu}$ один и мы получаем, что

$$\mu_s = \frac{\hat{\mu} + m\lambda_s}{2} = \frac{m\mu_A + 2\lambda_A + m\lambda_s}{2} = \frac{m\mu_A + 2\lambda_A + m\mu_A}{2} = \lambda_A + m\mu_A.$$

Если m четно, то циклов $\hat{\mu}$ два и мы получаем, что

$$\mu_s = \hat{\mu} + \frac{m\lambda_s}{2} = \frac{m}{2}\mu_A + \lambda_A + \frac{m\lambda_s}{2} = \frac{m}{2}\mu_A + \lambda_A + \frac{m\mu_A}{2} = \lambda_A + m\mu_A.$$

Матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$. Откуда метки $r = 0,\ \varepsilon = 1$, вклад в метку $n = [-\frac{m}{1}] = -m$.

■

Список литературы

[1] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

[2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, 1999.

[3] В. В. Ведюшкина, *Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов*, Матем. сб., 210:3 (2019), 17-74.

[4] В. В. Ведюшкина, И.С. Харчева *Реализация баз слоений Лиувилля интегрируемыми биллиардными книжками*, Матем. сб., в печати. (см. также http://dfgm.math.msu.su/files/0students/2020-dip-kharcheva.pdf)

[5] В. В. Ведюшкина, *Интегрируемые биллиарды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы*, Дисс. докт. физ.-мат. наук, МГУ, 2020.

[6] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация интегрируемых биллиардов*, Дисс. канд. физ.-мат. наук, МГУ, 2016.