

Интегрируемый бильярд с проскальзыванием

В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов, Москва

МГУ, кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Введение

В настоящей работе изучим топологические свойства новой интегрируемой системы, принадлежащей классу бильярдов с проскальзыванием, который был предложен А.Т. Фоменко. В работе [1] А.Т. Фоменко и В.В. Ведюшкина представили подробную программу исследований интегрируемых бильярдов и их топологических свойств. Одним из направлений обобщения интегрируемого бильярда внутри эллипса или окружности является добавление проскальзывания на некоторый угол вдоль границы. Ожидается, что описанная ниже конструкция проскальзывания будет обобщаться на широкий подкласс топологических бильярдов и бильярдных книжек, введенных В.В. Ведюшкиной и успешно примененных для реализации типичных боттовых перестроек торов Лиувилля [2] (то есть, 3-атомов Фоменко [3], подробнее в книгах [4]), интегрируемых систем механики [5-6] и геометрии. Так, были реализованы [7] геодезические потоки на двумерных ориентируемых поверхностях, имеющих линейный или квадратичный дополнительный первый интеграл.

Пусть даны два компактных, односвязных множества X и Y с евклидовой метрикой и с гладкими границами ∂X и ∂Y одинаковой длины. Зададим на каждом из этих дисков ориентацию и выберем согласованное с ней направление обхода границы (касательный вектор и внешняя нормаль составляют положительный базис).

Зададим гладкую изометрию $F : \partial X \rightarrow \partial Y$ граничных кривых ∂X и ∂Y , сохраняющую направление обхода этих кривых. Пусть точка $A \in \partial X$ отображается в точку $B = F(A) \in \partial Y$. Тогда точка $A_l \in \partial X$, отстоящая от точки A на расстояние l в направлении обхода ∂X , отобразится в точку $B_l \in \partial Y$, отстоящей от точки B на расстояние l в направлении обхода ∂Y .

Склеим комплекс $Z = X \cup_F Y$ из областей X и Y путем отождествления их границ по изометрии F . Заметим, что X и Y остаются локально плоскими во всех своих внутренних точках, но Z не обязан изометрично вкладываться в \mathbb{R}^3 . Такой комплекс гомеоморфен сфере, поскольку X и Y были гомеоморфны дискам.

Определим теперь бильярд на комплексе Z . Пусть материальная точка прямолинейно движется по области X и попадает в точку x на ее границе ∂X под некоторым углом α . Отметим, что ориентированный угол α удобно отсчитывать против часовой стрелки от касательного вектора к границе ∂X плоского множества X , взятого в направлении обхода этой границы. Далее частица переходит на область Y , продолжая свое движение из точки $y = F(x)$, выходя под ориентированным углом $2\pi - \alpha$, определенного аналогичным образом. Другими словами комплекс Z склеен из двух “листов” X и Y и материальная точка, попадая на границу, проходит с листа на лист. При этом возвращаясь на исходный лист, она выходит из граничной точки, отличной от той, в которой она этот лист покинула. Наблюдая за движением точки на одном листе, мы видим, что точка попадая на границу, она продолжает свое движение, “проскальзывая” вдоль границы. На этом основании бильярд Z называется “**бильярдом с проскальзыванием**”.

Постановка задачи

Бильярд в плоской области с кусочно-гладкой границей, гладкие дуги которой лежат на

софокусных квадриках семейства (1), интегрируем с дополнительным интегралом Λ . Его значение λ на траектории есть параметр λ каустики (для всех звеньев траектории) как кривой из семейства (1).

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda) \quad (1)$$

Введем проскальзывание для бильярда внутри эллипса из семейства (1), имеющего параметр $\lambda = 0$. Пусть Ω - плоский компакт, ограниченный этим эллипсом. Конфигурационное пространство $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \sim$ есть результат отождествления центрально симметричных точек эллипса. Его также можно задать, как отождествление точки границы $\partial\Omega$ с её образом при диффеоморфизме $\hat{\rho}$ границы. Диффеоморфизм можно задать поворотом на плоскости на угол π .

Касательные прямые к эллипсу в двух любых его противоположных точках параллельны. Тем самым, ориентированные углы между осью Ox и направляющими векторами траектории (до и после удара) равны. Вместе с тем, оба звена траектории (или их продолжения) касаются одной и той же квадрики семейства (1), то есть проскальзывание на угол π сохраняет значение интеграла.

Далее опишем фазовое пространство бильярда с проскальзыванием. Отметим, что подход к изучению динамических систем, фазовое пространство которых склеено из нескольких кусков, на внутренности которых заданы гладкая и симплектическая структуры, а на границе имеется непрерывная склейка с некоторыми дополнительными условиями, был развит В.Ф. Лазуткиным [8]. Данный подход был применен Е.А. Кудрявцевой [9] для описания обобщенных геодезических потоков на склеенных конфигурационных псевдомногообразиях, в том числе для изучения связи интегрируемости (возможно локальной) и закона склейки гладких частей фазового пространства.

Обсуждаемый бильярд в эллипсе с проскальзыванием на угол π характеризуется следующим образом в рамках описанных выше подходов. Поскольку диффеоморфизм $\hat{\rho}$ является свободной инволюцией и изометрией, то склеенное конфигурационное псевдомногообразие $\tilde{\Omega}$ является гладким многообразием с непрерывной и кусочно-гладкой метрикой. Склеенный геодезический поток будет определен на открытом подмножестве его кокасательного расслоения. Склейка его границ в случае бильярда в эллипсе с проскальзыванием на угол π не является отражением от границы. В терминах работы [9] он является стандартным (гюйгеновым) законом бильярдного преломления для $\tilde{\Omega}$ и инволюции $\hat{\rho}$.

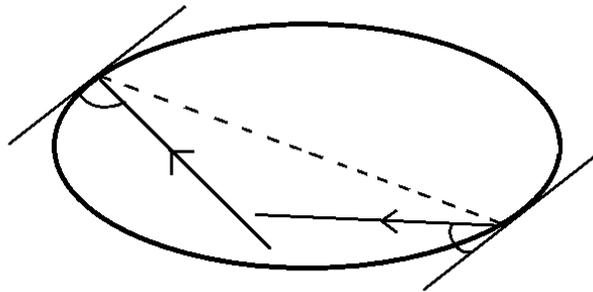


Рис. 1. Звенья траектории бильярда в эллипсе с проскальзыванием на угол π до и после удара о границу.

Диффеоморфизм склейки $\rho : \Gamma^+ \longrightarrow \Gamma^-$ зададим явно на произвольном ненулевом уровне

энергии системы (например, $|v|^2 = 1$). Напомним, что множества Γ^+ и Γ^- состоят из пар точка-вектор, трансверсально входящих в $T^*\text{Int}\tilde{\Omega}$ и выходящих из него соответственно. Ограничение множеств Γ^+ и Γ^- на такой уровень энергии содержится в двумерном торе $\partial\Omega \times S^1$ — граничные точки стола, оснащенные единичными векторами скорости. Угловые переменные на торе φ, ψ имеют следующий смысл. Координата φ — угловая координата точки эллипса на плоскости Oxy в полярной системе координат (отсчитываемая, стандартно, против часовой стрелки от горизонтальной оси Ox). Координата ψ — угловая координата в касательной плоскости, отсчитываемая аналогично от вектора скорости v с координатами $v_x > 0, v_y = 0$.

Лемма 1. Образ точки $(\varphi, \psi) \in \Gamma^+$ при отображении ρ есть точка $(\varphi + \pi, \pi - 2\alpha(\varphi, \psi) + \psi)$, где α есть ориентированный угол (взятый против часовой стрелки) от касательного вектора к эллипсу в точке с угловой координатой φ до вектора скорости с угловой координатой ψ в той же точке.

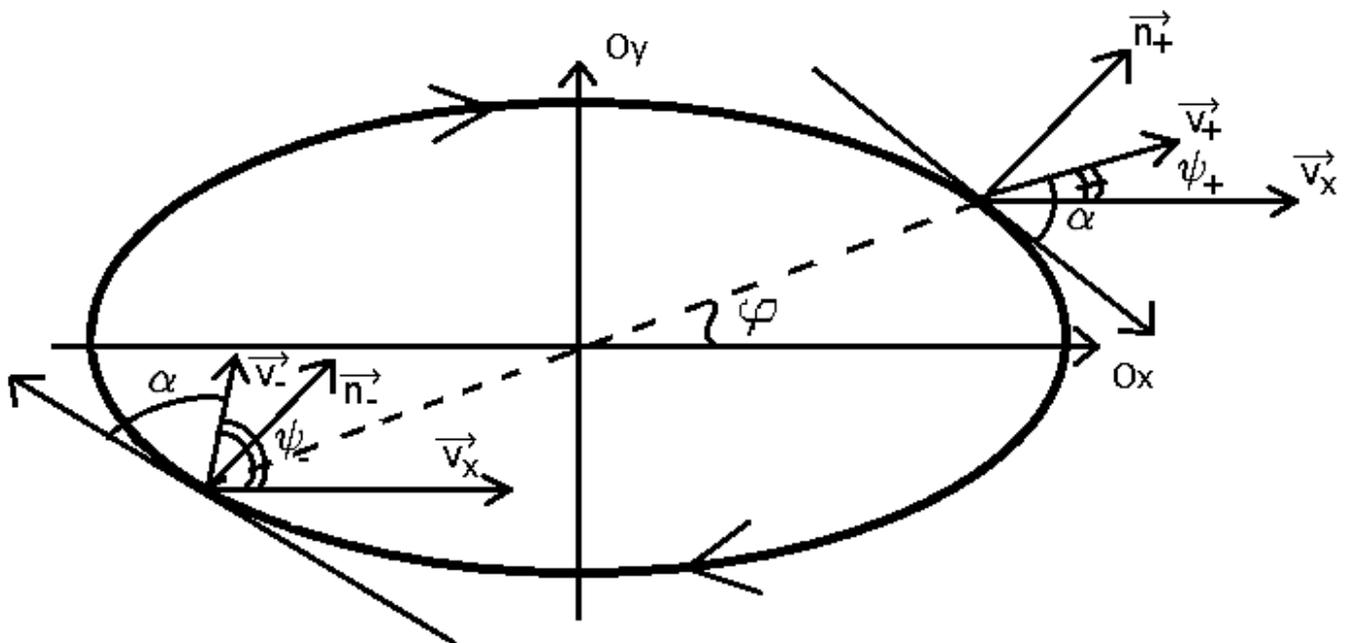


Рис. 2. Два способа определения проскальзывания: соотношение между углами.

Доказательство. Обозначим углы и векторы как показано на рис.2. Заметим, что угол между внешней нормалью \vec{n}_+ и горизонтальным вектором скорости \vec{v}_x совпадает с углом между внутренней нормалью \vec{n}_- и \vec{v}_x , так как касательные к центрально симметричным точкам параллельны.

Из условия леммы получаем, что угол от вектора \vec{v}_x до вектора нормали \vec{n}_- равен $(\psi_- + \alpha) - \pi/2$, а угол от \vec{v}_x до вектора нормали \vec{n}_+ равен $\pi/2 - (\alpha - \psi_+)$. Из равенства двух подсчитанных углов имеем, что образ точки $(\varphi, \psi_+) \in \Gamma^+$ имеет координаты $(\varphi + \pi, \pi - 2\alpha(\varphi, \psi_+) + \psi_+)$. Напомним, что первая координата образа определена углом проскальзывания π .

Если в паре точка-вектор (x, v) вектор скорости v параллелен касательной к эллипсу в точке x , то α равен нулю или π , то есть формула остается верной. Для точки с координатами $(\varphi + \pi, \psi_-) \in \Gamma^-$ значение $\alpha(\varphi + \pi, \psi_-) = 2\pi - \alpha(\varphi, \psi_+) = -\alpha(\varphi, \psi_+)$. Тем самым, применение формулы к точке $(\varphi + \pi, \psi_-) \in \Gamma^-$ даст исходную точку $(\varphi, \psi) \in \Gamma^+$. Формула действительно

задает инволюцию, и верна для всех точек тора в прообразе граничного эллипса. Лемма 1 доказана.

Утверждение 1. Каждая траектория бильярда внутри эллипса с проскальзыванием на π имеет одну из квадрик семейства (1) своей каустикой.

Доказательство. Угол, образованный парой прямых, пересекающихся в точке эллипса $\partial\Omega$ и касающихся одной и той же квадрики с параметром λ семейства (1), делится пополам касательной к эллипсу. Аналогичное верно для пары прямых, проходящих через фокусы семейства (1) и пересекающихся в точке граничного эллипса.

Так как эллипс симметричен относительно центра, то касательные прямые к нему в противоположных точках параллельны. Следовательно, звенья траектории до и после удара о границу касаются одной и той же квадрики в случае проскальзывания в эллипсе на угол π .

Проскальзывание переводит звено особой траектории в звено особой траектории. Напомним, что особые траектории бильярда в эллипсе проецируются на граничный эллипс и его большую и малую полуоси. Следовательно проскальзывание на угол π переводит пары точка-вектор, принадлежащие им и проецирующиеся на границу эллипса, друг в друга с сохранением значения λ . Утверждение 1 доказано.

Тем самым мы имеем корректно определенный интегрируемый бильярд с дополнительным интегралом Λ . Напомним, что его значение λ на траектории — параметр её каустики как софокусной квадрики семейства (1). Остается изучить слоение его изоэнергетической поверхности $H = h > 0$ на двумерные и одномерные поверхности уровня бильярдного интеграла Λ . А именно, проверить, что

- каждый регулярный слой является двумерным тором,
- любой другой слой гомеоморфен особому слою некоторого 3-атома,
- инвариантная окрестность особого слоя является 3-атомом.

Затем вычислим инвариант Фоменко-Цишанга такого бильярда. Итоговый основной результат составляет Теорему, доказательство которой разобьем на утверждения 2-5.

Теорема. *Инвариант Фоменко-Цишанга бильярда внутри эллипса с проскальзыванием на угол π изображен на рис. 3 слева. Данная бильярдная система кусочно-гладко ливиллево эквивалентна геодезическому потоку на проективной плоскости, имеющему квадратичный дополнительный интеграл.*

Метрика данного потока имеет вид $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$, где функции f и g — гладкие, неотрицательные, четные, периодические (с периодами $\frac{1}{2}$ и $\frac{L}{2}$, где $L > 0$) функции с некоторыми условиями на разложение вблизи их нулей. Кроме того, они являются функциями Морса без седловых особых точек.

Вопросы интегрируемости геодезических потоков, задаваемых римановыми метриками на двумерных поверхностях (сфере, торе, проективной плоскости, бутылке Клейна), и их топологические инварианты активно изучались в работах В.С. Матвеева, Н.Т. Зунга, Е.Н. Селивановой, Л.С. Поляковой, и подробно изложены в [4]. В частности, там перечислены инварианты Фоменко-Цишанга геодезических потоков на проективной плоскости, имеющих квадратичный дополнительный интеграл (результат В.С. Матвеева).

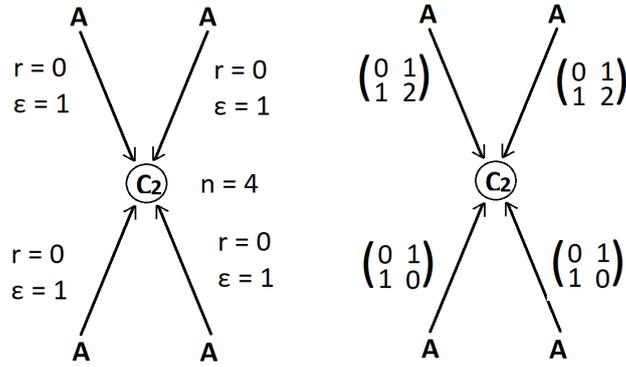


Рис. 3. Топологические инварианты биллиарда в эллипсе с проскальзыванием: инвариант Фоменко-Цишанга (меченая молекула; слева) и молекула с матрицами склейки (справа).

Слоение Лиувилля и его инварианты для биллиарда с проскальзыванием

Напомним, что изучается слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности Q_h^3 , то есть на множестве произвольного выбранного уровня $H = h > 0$. Слои этого слоения — связные компоненты поверхностей уровня биллиардного интеграла Λ .

Утверждение 2. Пусть значение λ интеграла Λ не равно $0, b, a$, то есть или $0 < \lambda < b$, или $b < \lambda < a$. Тогда поверхность уровня гомеоморфна несвязному объединению двух двумерных торов.

Доказательство. 1. Пусть $0 < \lambda < b$, то есть каустикой является эллипс с параметром λ . Тогда проекция поверхности уровня λ есть кольцо между двумя эллипсами семейства (1), имеющими параметры 0 и λ . Точки этого кольца оснащаются векторами скорости: точки эллипса-каустики (с параметром λ) парой касательных векторов (по и против часовой стрелки); внутренние точки кольца четырьмя векторами (лежащими на касательных прямых к каустике, проведенных через эту точку); точки граничного эллипса $\lambda = 0$ оснащаются четырьмя векторами, с последующим отождествлением по закону проскальзывания.

Проскальзывание сохраняет свойство вектора (в паре точка-вектор, принадлежащей уровню с параметром $0 < \lambda < b$) быть направленным по или против часовой стрелки. То есть связанных компонент как минимум две, и достаточно рассмотреть одну из них, соответствующую движению в кольце по часовой стрелке.

Склейка этой связной компоненты из двух колец указана на рис. 4 (по одноименным стрелкам). Там же указано каким вектором скорости оснащается точка в каждом из колец.

Связная компонента является тором: склейка двух колец по стрелкам a_1, a_2, b_1, b_2 получается гомеоморфизмом (заданым красными стрелками) из склейки двух колец по стрелкам a_1, a_2, c_1, c_2 , см. рис. 5. Последняя склейка определяет слой биллиарда без проскальзывания, который является тором. То есть слой уровня $0 < \lambda < b$ биллиарда с проскальзыванием — тоже тор.

2. Пусть $b < \lambda < a$, то есть каустикой является гипербола с параметром λ . Проекцией поверхности уровня является криволинейный четырехугольник, две дуги которого лежат на гиперболе с параметром λ , а две другие — на эллипсе с параметром 0 . Четырехугольник симметричен относительно каждой из координатных осей.

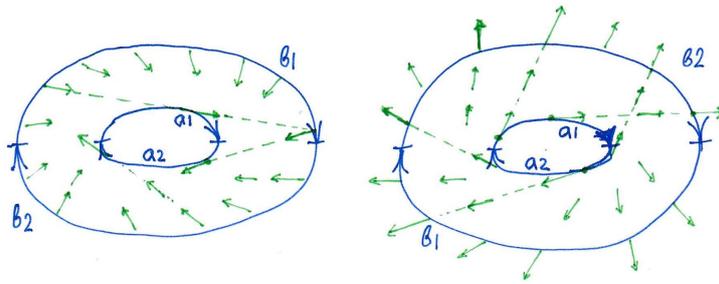


Рис. 4. Правило склейки регулярного слоя с параметром $0 < \lambda < b$ из двух колец по граничным дугам a_1, a_2, b_1, b_2 . Оснащение каждой точки слоя вектором скорости (направленному “по часовой стрелке”).

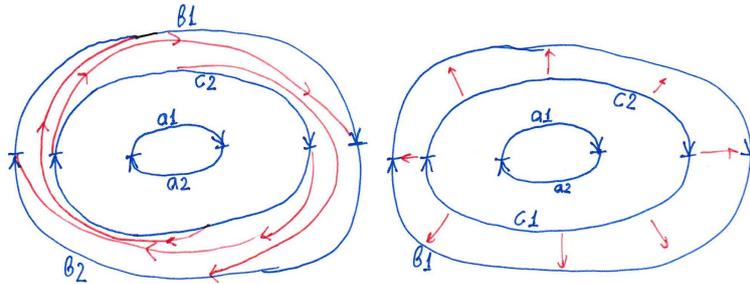


Рис. 5. Гомеоморфизм слоя с параметром $0 < \lambda < b$ для билиардов в эллипсе с проскальзыванием и без него.

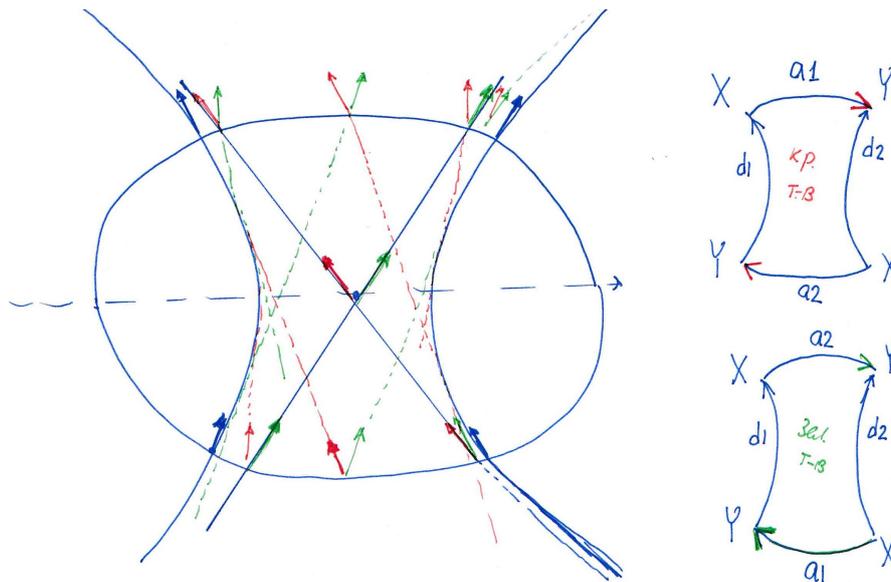


Рис. 6. Регулярный слой с параметром $b < \lambda < a$: оснащение каждой точки проекции слоя векторами скорости (слева) и правило склейки слоя по граничным дугам a_1, a_2, d_1, d_2 (справа).

Каждая внутренняя точка четырехугольника оснащается четырьмя векторами скорости, а каждая точка, лежащая на гиперболической дуге — двумя. Векторы лежат на касательных к гиперболе, проведенных через соответствующую точку. Закон проскальзывания задает отождествление точек верхней дуги, оснащенных векторами скорости, с соответствующими точками нижней дуги, оснащенных векторами скорости. Поскольку множество Γ_+ отображается в множество Γ_- , то знак проекции вектора скорости на вертикальную ось Oy сохранится при отождествлении. Тем самым, поверхность уровня состоит из двух компонент связности,

и достаточно рассмотреть одну из них. Например, содержащую точки обеих эллиптических граничных дуг, оснащенных векторами “вверх”.

На рис. 6 слева изобразим данную компоненту связности в проекции на бильярдный стол. Она состоит из двух четырехугольников, точки которых оснащаются либо красными, либо зелеными векторами скорости (в точках их гиперболических границ эти пары векторов склеиваются и обозначены синим). Из закона проскальзывания следует, что красные вектора на верхней эллиптической дуге склеиваются с зелеными на нижней эллиптической дуге. Склейка поверхности из двух четырехугольников по одноименным стрелкам задана на рис. 6 справа. На рис. 7 показано, что данная склейка задает поверхность, гомеоморфную тору, склееную из цилиндра по окружностям c, \tilde{c} (см. рис. 7).

Тем самым, на каждом уровне интеграла Λ , регулярном для бильярда в эллипсе без проскальзывания, новый бильярд имеет поверхность, гомеоморфную несвязному объединению двух торов. В частности, все уровни λ , кроме $0, b, a$ оказались регулярными. Утверждение 2 доказано.

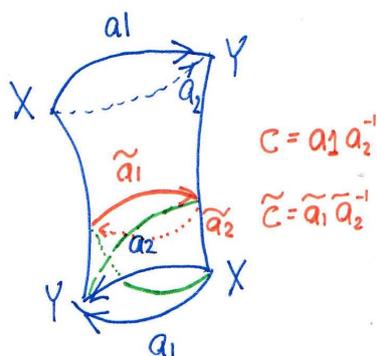


Рис. 7. Гомеоморфизм слоя с параметром $b < \lambda < a$ для бильярдов в эллипсе с проскальзыванием и без него.

Утверждение 3. Слоение Лиувилля в окрестности каждого из уровней $\Lambda = 0, \Lambda = a$ послойно гомеоморфно несвязному объединению двух 3-атомов A (минимальных и максимальных соответственно).

Доказательство. 1. Напомним, что конфигурационное пространство бильярда в эллипсе с проскальзыванием получается отождествлением противоположных точек граничного эллипса. На особом уровне $\lambda = 0$ точки граничного эллипса оснащаются векторами, касательными к этому эллипсу. Поэтому поверхность уровня одномерна, имеет две компоненты связности, соответствующие векторам по и против часовой стрелке. Обе компоненты связности гомеоморфны окружности и могут быть изображены как половина граничного эллипса, оснащенная касательными векторами соответствующего направления.

Уровень $\lambda = a$ проецируется на малую полуось эллипса, которая является пределом софокусных гипербол с параметром $\lambda = a - \varepsilon$. Точки малой полуоси оснащаются парами векторов, соответствующими движению “вверх” и “вниз” вдоль малой полуоси. Поэтому поверхность уровня состоит из двух компонент связности, гомеоморфных окружности, и могут быть представлены как отрезок, оснащенный векторами выбранного направления, концы которого склеены по закону проскальзывания.

2. Окрестности указанных слоев — действительно 3-атомы A , имеющие вид прямого про-

изведения двумерной базы на слой, гомеоморфный окружности. Напомним, что базой является диск, расслоенный на concentric окружности и особую точку. На рис. 8 зеленым цветом изображен стягиваемый цикл (без указания направления), а красным — слой, гомеоморфный особому слою атома в полнотории. Регулярный слой действительно является произведением данных окружностей. Утверждение 3 доказано.

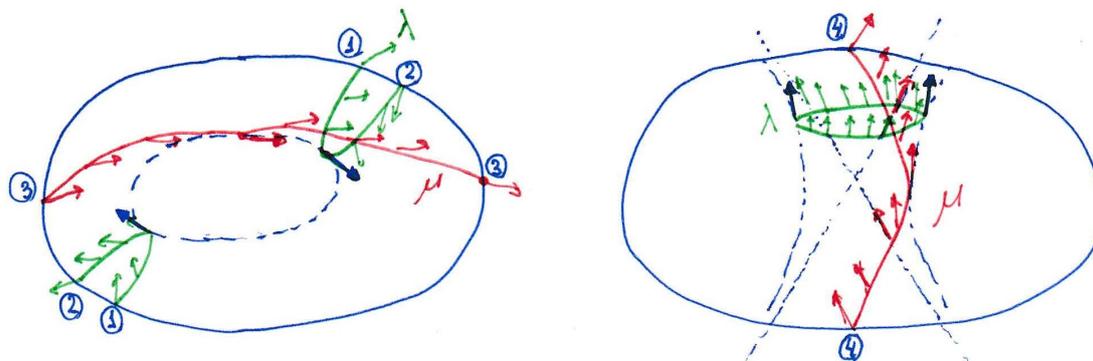


Рис. 8. Циклы λ и μ с точностью до направления минимального (слева) и максимального (справа) 3-атомов A . Зеленая кривая (цикл λ стягиваема внутри полнотория A , красная кривая (цикл μ) гомотопна особому слою 3-атома A .

Утверждение 4. Малая окрестность уровня $\lambda = b$ послойно гомеоморфна 3-атому C_2 .

Доказательство. 1. Особый слой $\lambda = b$ биллиарда внутри эллипса без проскальзывания отличается от того же особого слоя биллиарда с проскальзыванием только тем, как склеиваются между собой точки в прообразе граничного эллипса. Напомним, что седловой атом биллиарда без проскальзывания имеет тип B , то есть особый слой гомеоморфен произведению окружности на “восьмерку” [4].

Вложим атом B в трехмерное пространство, и изобразим его особый слой на рис. 9. Тор уровня $\lambda = b + \varepsilon$ находится “снаружи” изображенного особого слоя, а два тора уровня $\lambda = b - \varepsilon$ — внутри высекаемых полноторий.

Наша задача — изобразить на этом торе точки особого слоя, проецирующиеся на граничный эллипс биллиардного стола. Их множество гомеоморфно особому слою 2-атома C_2 : после отождествления (заданного отражением от границы) все точки эллипса кроме концов большой полуоси имеют 2 прообраза, а концы большой полуоси — по одному. В них происходит склейка. В работе [10] (рис.7) и [11] (рис. 4.2) также изображается перестройка слоения Ливилля биллиарда в эллипсе, происходящая “вблизи” фокуса эллипса.

2. Особая окружность атома B состоит из пар точка-вектор, реализующих движение вправо и влево по большой полуоси эллипса. Отметим на ней шесть точек, соответствующих прохождениям через фокусы эллипса (4 точки: вправо и влево, для каждого из фокусов F_l и F_r) и отражению в концах большой полуоси от границы (две точки: l и r для левого и правого конца соответственно). Скажем, что точка особой окружности имеет тип X , если вектор скорости (в проекции на Oxy) направлен вправо, и тип Y , если влево.

Прообраз горизонтальной прямой также содержит две окружности, лежащие в прообразе фокусов. Каждая из них пересекает особую окружность в двух точках (на рис. 9 они обозначены F_l и F_r). Разумеется, они не пересекаются с прообразом границы граничного эллипса.

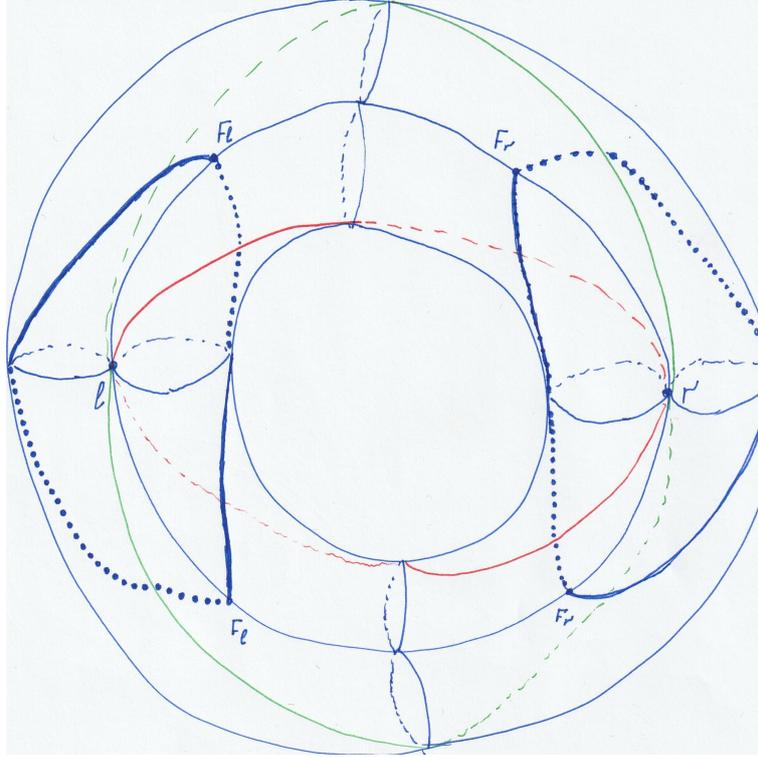


Рис. 9. Особый слой биллиарда без проскальзывания в эллипсе. Прообраз границы эллипса (красные и зеленые кривые) и прообраз фокусов (жирные синие кривые).

На основе результатов В.В. Ведюшкиной имеем следующие соотношения между циклами допустимых базисов атома B и минимального атома A :

$$\lambda_A^- = \mu_B^-, \quad \mu_A^- = \lambda_B^- - 2\mu_B^-.$$

Все эти циклы однозначно отображаются на особый слой атома B как некоторые замкнутые кривые. Из соображений симметрии каждый из циклов μ_A^- (изображенных на рис. 9 зеленой и красной окружностями) сделает по одному обороту (вокруг тора) между двумя своими пересечениями с особой окружностью. Заметим, что их вид, указанный на рис. 9, однозначно определяет, как расположена фокальная окружность на особом слое. Фокальные окружности (прообраз фокусов при проекции) изображены жирной синей кривой (сплошной или пунктирной в зависимости от того, по какой стороне особого слоя 3-атома B они проходят).

3. Теперь изучим, как изменение закона отражения (добавление проскальзывания) изменяет вид 3-атома. На особом слое это означает его разрезание по прообразу граничного эллипса (объединению красной и зеленой окружностей) и последующую склейку берегов разреза по новому закону проскальзывания, то есть с поворотом на π (вокруг центра рис. 9).

Тогда на особом седловом слое биллиард с проскальзыванием имеет две особых окружности, направленных влево и вправо по большой полуоси. 3-атом имеет вид прямого произведения базы на особую окружность (две вышеупомянутых окружности гомологичны). Двумерная база имеет вид, показанный на рис. 10. Видно, что указанный 2-атом имеет тип C_2 : он плоский, и каждая сепаратриса имеет разные начало и конец. Утверждение 4 доказано.

Следствие 1. Все особенности системы биллиардов в эллипсе с проскальзыванием послойно гомеоморфны боттовским особенностям A, C_2 интегрируемых гамильтоновых систем с двумя

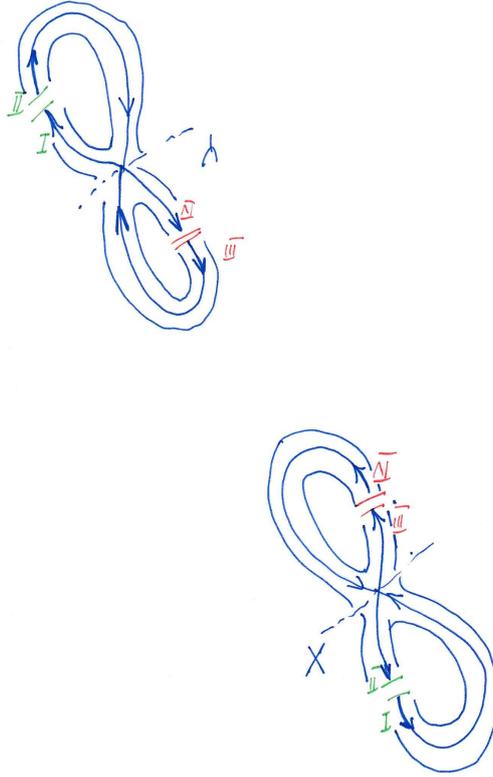


Рис. 10. База седлового 3-атома бильярда с проскальзыванием гомеоморфно 2-атому C_2 .

степенями свободы. Грубая молекула (инвариант Фоменко) имеет вид

$$2A > C_2 < 2A.$$

Утверждение 5. Матрицы склейки на ребрах молекулы для бильярда в эллипсе с проскальзыванием указаны на рис. 3, как и метки инварианта Фоменко-Цишанга.

Доказательство. Цикл допустимого базиса в проекции на плоскость однозначно задается выбором направления кривой (проекции цикла) и ее оснащением векторами скорости частицы. Говорят о согласованной и несогласованной ориентации цикла, если в проекции на касательную к кривой (в произвольной ее точке) совпадают или различаются направления этой кривой и вектора скорости частицы (в прообразе этой точки). При этом из свойств допустимых базисов 3-атомов слоения Лиувилля (подробнее о них см. главу 4 в [4]) следует необходимость выполнения следующих условий на направления циклов (на граничных торах 3-атомов бильярдов) при их изображении на плоскости:

- если цикл — слой расслоения Зейферта данного атома, то его ориентация согласована,
- ориентация циклов μ седлового атома (образующих его единое сечение) согласована на торах уровня $\lambda = b - \varepsilon$ и несогласована на торах уровня $\lambda = b + \varepsilon$ (либо наоборот: согласована для $b + \varepsilon$ и несогласована для $b - \varepsilon$),
- согласованность ориентации цикла λ атома A совпадает с согласованностью соответствующего цикла μ инцидентного седлового атома.

Выбранные на рис. 11 оснащения гарантируют, что μ -циклы атома C_2 действительно образуют единое сечение. Здесь A_+ — максимальный атом A , а A_- — минимальный, то есть

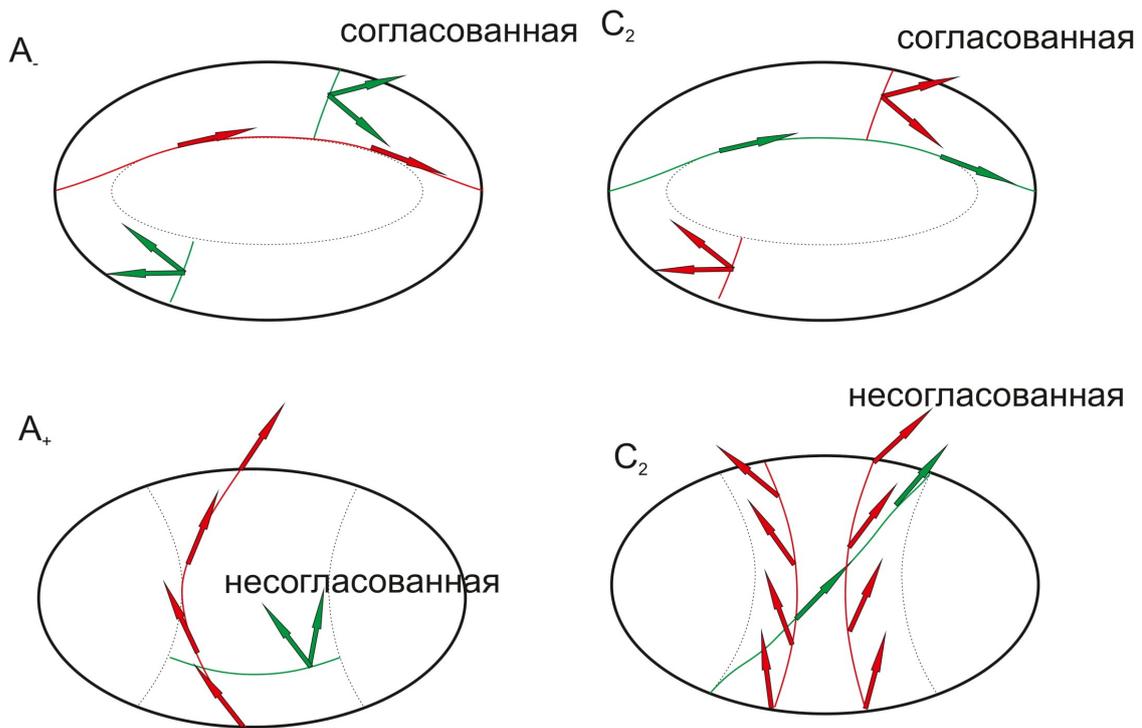


Рис. 11. Изображение допустимых базисов (до выбора согласованности) на атомах A (слева) и седловом атоме (справа). В верхнем ряду — базисы на уровнях $0 < \lambda < b$, в нижнем ряду — на уровнях $b < \lambda < a$. Циклы λ и μ изображены зеленым и красным цветами соответственно.

изображенные циклы лежат на уровнях $\lambda = a - \varepsilon$, $\lambda = \varepsilon$ соответственно. Пунктиром указана каустика траекторий, лежащих на соответствующем слое.

Выберем направления циклов μ на седловом атоме C_2 согласованным для уровня $\lambda = b - \varepsilon$ и несогласованным для уровня $\lambda = b + \varepsilon$. Матрица склейки — матрица перехода от допустимого базиса атома A (изображены в левом столбце рис. 11) к допустимому базису атома C_2 (изображены в правом столбце рис. 11). Тем самым каждой строке рис. 11 соответствует своя матрица склейки.

С точностью до знаков матрица склейки для верхней строки будет равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а для нижней равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Поскольку определитель матрицы склейки равен -1 , то знаки элементов матрицы на побочной диагонали одинаковы. Согласованность каждого из циклов λ на атомах A указана на рис. 11 (и совпадает с согласованностью соответствующего цикла μ седлового атома C_2 , которая также указана на рис. 11). Следовательно, все элементы на побочных диагоналях положительны. Знак оставшегося ненулевого элемента следует из вида проекций циклов на плоскость и выбранного знака элементов побочной диагонали.

Числовые метки r, ε, n вычисляются по элементам c_{ij} матриц склейки C на ребрах молекулы по формулам из [4]. Поскольку $c_{11} = 0$, то на каждом ребре метка $r = c_{11}/c_{12} \bmod 1 = 0$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} c_{12} = 1$. Молекула имеет единственную семью (прообраз седлового 3-атома). Вклад

каждого внешнего ребра, направленного к семье (т.н. входящие ребра) равен $\left[\begin{array}{c} -c_{22} \\ c_{12} \end{array} \right]$. Тем самым вклад ребер $0 < \lambda < b$ нулевой, а каждого из ребер $b < \lambda < a$ равен двум, то есть метка $n = 4$. Утверждение 5 доказано.

Список литературы

1. *А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина*, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 3, 15–25
A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, “Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential”, Moscow University Mathematics Bulletin, 74:3 (2019), 98–107
2. *В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева*, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56
V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, “Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems”, Sb. Math., 209:12 (2018), 1690–1727
3. *А. Т. Фоменко*, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, УМН, 44:1(265) (1989), 145–173
Fomenko, A.T.: The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems, Russian Math. Surveys. V. 44:1 (265). P. 181-219 (1989)
4. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.*, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация, т. 1, 2, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999,
Bolsinov A.V., Fomenko A.T., Integrable Hamiltonian systems, Geometry, topology, classification, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004 , xvi+730 pp.
5. *В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко*, “Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела”, Доклады Академии наук, 465:2 (2015), 1–4
A. T. Fomenko, V. V. Fokicheva, “Integrable billiards model important integrable cases of rigid body dynamics”, Doklady Mathematics, 92:3 (2015), 682–684
6. *В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко*, “Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы”, Изв. РАН. Сер. матем., 81:4 (2017), 20–67
V. V. Vedyushkina (Fokicheva), A. T. Fomenko, “Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems”, Izv. Math., 81:4 (2017), 688–733
7. *В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко*, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды”, Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 63–103
V. V. Vedyushkina (Fokicheva), A. T. Fomenko, “Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards”, Izv. Math., 83:6 (2019), 1137–1173
8. *Lazutkin V.*, КАМ Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions, Springer, Berlin, 1993
9. *Е. А. Кудрявцева*, “Интегрируемые по Лиувиллю обобщенные бильярдные потоки и теоремы типа Понселе”, Фундам. Прикл. Матем., 20:3 (2015), 113–152
E. A. Kudryavtseva, “Liouville integrable generalized billiard flows and Poncelet type theorems”, Journal of Mathematical Sciences, 225:4 (2017), 611–638
10. *В. В. Фокичева*, “Топологическая классификация бильярдных областей в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., 206:10 (2015), 127–176;
V. V. Fokicheva, “A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics”, Sb. Math., 206:10 (2015), 1463–1507
11. *В.В. Фокичева (Ведюшкина)*, “Топологическая классификация интегрируемых бильярдных дисс. канд. фи-мат наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2016
V. V. Fokicheva (Vedyushkina) “Topological classification of integrable billiards PhD Thesis, Lomonosov MSU, 2016 (in Russian)