

УДК 517.938.5

## Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем.

В. В. Ведюшкина <sup>1</sup>, В. А. Кибкало <sup>2</sup>

Обсуждается локальный вариант гипотезы А.Т. Фоменко о возможности реализации интегрируемыми бильярдами слоения Лиувилля с произвольным топологическим инвариантом (Фоменко–Цишанга) — графом с числовыми метками. Доказано, что в классе бильярдных книжек алгоритмически реализуется слоение с произвольным значением целочисленной метки, задающей класс Эйлера подмногообразия Зейферта.

*Ключевые слова:* гамильтонова система, интегрируемость, бильярд, слоение Лиувилля, расслоение Зейферта, инвариант Фоменко–Цишанга.

A local case of A. Fomenko conjecture on possibility of realization of a Liouville foliation with arbitrary topological Fomenko–Zieschang invariant (which is a graph with numerical marks) is discussed. In the class of billiard books a foliation with arbitrary value of one integer mark (that corresponds to Euler class of one Seifert submanifold) was realized.

*Key words:* Hamiltonian system, integrability, billiard, Liouville foliation, Seifert fibration, Fomenko–Zieschang invariant.

В работе [1] А.Т. Фоменко выдвинул фундаментальную гипотезу о возможности моделирования (реализации) бильярдами интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Напомним, что инвариантом Фоменко–Цишанга (меченой молекулой, см. [2]) слоения Лиувилля таких систем на инвариантном неособом подмногообразии  $Q^3$  является оснащенный конечный граф. Его вершины соответствуют особым слоям, ребра — семействам регулярных торков Лиувилля. Каждой вершине приписан символ атома, т.е. класса послойной гомеоморфности слоения вблизи особого слоя. Числовые метки возникают из матриц склейки  $C_i$  атомов по граничным торам ( $C_i \in GL(2, \mathbb{Z})$ ,  $\det C_i = -1$ ).

**Гипотеза (раздел С: реализация меченых молекул):** *Широкий класс слоений Лиувилля невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы на трехмерных инвариантных подмногообразиях (задающихся с точностью до ливиллевой эквивалентности инвариантом Фоменко–Цишанга — графом с метками) можно реализовать в классе интегрируемых бильярдов.*

Поскольку вопрос о справедливости гипотезы С в общем случае (любой граф с любыми метками) остается открытым, А.Т. Фоменко поставил вопрос о возможности реализации бильярдом каждого значения метки (на некотором подходящем графе). В настоящей работе покажем, что в классе бильярдных книжек, предложенных В.В. Ведюшкиной в [3], можно реализовать слоение Лиувилля с произвольным значением метки  $n$  на некоторой подходящей семье. Напомним, что семья — это состоящий из седловых атомов подграф с дополнительными свойствами (см. [4]). В частности, его прообраз при отображении момента — многообразие со структурой расслоения Зейферта. Метка  $n$  семьи связана с классом Эйлера соответствующего многообразия Зейферта (см. [4]).

<sup>1</sup>Ведюшкина Виктория Викторовна — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: arinir@yandex.ru.

<sup>2</sup>Кибкало Владислав Александрович — м.н.с., асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Тем самым любое значение метки  $n$  реализуется подходящим бильярдом, т.е. априори не является препятствием к моделированию. Пока неясно, любую ли семью можно в бильярдах оснастить любой  $n$ -меткой.

**2. Бильярды: основные понятия и факты.** Рассмотрим следующее однопараметрическое семейство софокусных квадрик на плоскости  $Oxy$  с полуосями  $0 < b < a$  эллипса с параметром  $\lambda = 0$

$$(a - \lambda)x^2 + (b - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda). \quad (1)$$

При равномерном и прямолинейном движении частицы по плоскости и ее упругом отражении от любой кривой семейства (1) сохраняются (см. [5]) скалярный квадрат вектора скорости (энергия)  $H$  и дополнительный интеграл  $\Lambda$

$$H = v_x^2 + v_y^2, \quad \Lambda = \frac{-(xv_y - yv_x)^2 + v_x^2 b + v_y^2 a}{v_x^2 + v_y^2}.$$

Рассмотрим компакт  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей, состоящей из дуг  $\gamma_i$  кривых семейства (1). Пусть все внутренние углы при вершинах  $\Omega$  (токах пересечения дуг границы) равны  $\pi/2$ . Бильярд на столе  $\Omega$  получается отождествлением в кокасательном расслоении  $T^*\Omega$  пар точка-вектор вида  $(x, v_j)$ :  $x \in \partial\Omega$ ,  $v_1 - v_2 \perp T_x^* \gamma_i \subset T_x^* \Omega$ . Попадание частицы в вершину множества  $\Omega$  меняет ее вектор скорости на противоположный.

Элементарная область, ограниченная эллипсом семейства (1), в работах [6, 7] обозначена  $A_2$ . При ее разрезании по одной из дуг гиперболы семейства (1) образуются две элементарные области типа  $A_1$ , а по обеим ее дугам — область типа  $A_0$  и две симметричные области типа  $A_1$ . Области  $A_i$  содержат отрезок фокальной оси и  $i$  фокусов семейства (1).

Конструкция бильярдной книжки, предложенная В.В. Ведюшкиной в [3], есть обобщение бильярда на случай склейки произвольного конечного числа элементарных областей по общим граничным дугам. При этом каждой такой дуге склейки (корешку книжки) сопоставлена перестановка  $\sigma$  на множестве склеенных по ней листов. Она показывает, на какой лист  $\sigma(i)$  перейдет частица с листа  $i$  при ударе об эту кривую. Интегрируемость системы при этом сохраняется.

Отметим, что каждой граничной кривой стола  $\Omega$  можно сопоставить тождественную перестановку, а каждой внутренней кривой  $\gamma$  области  $\Omega'$  — разбиение области  $\Omega$  на две области 1 и 2 с перестановкой (12) на их общей граничной кривой (см. [3]).

Условие коммутирования перестановок на каждой паре кривых, содержащих границу стола или склейку листов-областей, гарантирует корректность указанной конструкции, т.е. непрерывность и однозначность определения бильярдного потока.

Для бильярда  $\Omega$  выберем неособую ( $h \neq 0$ ) изоэнергетическую поверхность  $Q_\Omega^3$ . Особые значения  $\Lambda$  (образы особых слоев в  $Q_\Omega^3$ ) могут быть равны  $0, b, a$  и значению параметра  $\lambda$  для кривой семейства (1), содержащей дугу границы стола  $\Omega$  или дугу склейки листов по их невыпуклым границам.

**2. Реализация бильярдами целочисленных меток  $n$ .** Как показывает анализ многих известных интегрируемых систем физики, механики и геометрии, типичными значениями меток  $n$  являются  $0, 1, 2$  (см. [4]). Ранее системами бильярдов были реализованы только такие значения метки  $n$ , например столами  $A_1, A_2$  и  $(2A_2)_\alpha$  (топологический бильярд, склеенный из двух листов типа  $A_2$ ) в работе [6].

**Теорема 1.** *Для каждого  $k \in \mathbb{Z}$  алгоритмически построен бильярд  $\Omega_k$ , слоение Лиувилля которого на неособой изоэнергетической поверхности содержит некоторую семью с заданной меткой  $n = k$ .*

2.1. *Описание построения столов  $\Omega_k$ .* Возьмем  $n$  экземпляров  $S_1, \dots, S_n$  стола типа  $A_2$ , ограниченного эллипсом  $\lambda = 0$  семейства (1). Разрежем стол  $S_1$  по ветвям гиперболы  $\lambda = \lambda_1$ , стол  $S_n$  (при  $n > 1$ ) по ветвям гиперболы  $\lambda = \lambda_{n-1}$ , а остальные столы  $S_i$  (где  $2 \leq i \leq n-1$ , для  $n > 2$ ) по ветвям двух гипербол  $\lambda = \lambda_{i-1}$  и  $\lambda = \lambda_i$ . Здесь  $b < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < a$ . Обозначения полученных областей приведены в табл. 1. Отметим, что стол  $S_i$  разрезан или на набор листов  $(a_i, x_i, b_i, y_i, c_i)$ , или на набор  $(a_i, b_i, c_i)$ .

Бильярдный стол  $\Omega_k$  построим из описанных выше листов путем их склейки по отрицательным и положительным (т.е. лежащим в полуплоскостях  $x < 0$  и  $x > 0$ ) ветвям граничных гипербол с перестановками  $\sigma_i$  и  $\rho_i$  соответственно. В табл. 2 записаны эти перестановки, а на рис. 1 изображен стол  $\Omega_3$ .

**Таблица 1: обозначения листов бильярдных столов**

| Область | Тип   | Уровень                    | Граница   | $Oxy$            |
|---------|-------|----------------------------|---|------------------|
| $a_i$   | $A_1$ | $S_i, 1 \leq i \leq n$     | $\lambda_1$ при $i = 1$ ; $\lambda_{i-1}$ при $2 \leq i \leq n$       | $x < 0$          |
| $x_i$   | $A_0$ | $S_i, 2 \leq i \leq n - 1$ | $\lambda_{i-1}$ и $\lambda_i$ при $2 \leq i \leq n - 1$               | $x < 0$          |
| $b_i$   | $A_0$ | $S_i, 1 \leq i \leq n$     | $\lambda_1$ при $i = 1$ ; $\lambda_{i-1}$ при $2 \leq i \leq n$       | $Oy \subset b_i$ |
| $y_i$   | $A_0$ | $S_i, 2 \leq i \leq n - 1$ | $\lambda_{i-1}$ и $\lambda_i$ при $2 \leq i \leq n - 1$               | $x > 0$          |
| $c_i$   | $A_1$ | $S_i, 1 \leq i \leq n$     | $\lambda_1$ : при $i = 1$ ; $\lambda_{i-1}$ : при $2 \leq i \leq n$ . | $x > 0$          |

**Таблица 2: перестановки на корешках склейки столов  $\Omega_k$**

| Гиперболола           | $\rho_i$                       | $\sigma_i$                     |
|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $i = 1$               | $(b_1, c_1, y_2, c_2)$         | $(a_2, x_2, a_1, b_1)$         |
| $2 \leq i \leq n - 1$ | $(b_i, y_i, y_{i+1}, c_{i+1})$ | $(a_{i+1}, x_{i+1}, x_i, b_i)$ |
| $i = n - 1$           | $(b_{n-1}, y_{n-1}, b_n, c_n)$ | $(a_n, b_n, x_{n-1}, b_{n-1})$ |

Рассмотрим столы типа  $\Omega_{k,k-s}$ , получаемые как результат удаления  $s$  пар листов  $a_i, c_i$  из клеточного комплекса  $\Omega_k$ . На дуге склейки, инцидентной удаляемому листу, новая перестановка должна сохранить циклический порядок на множестве остальных листов, инцидентных этой дуге. Например, при  $1 < j < k - 1$  перестановка  $\sigma_j$  превратится в  $(x_{j+1}, x_j, b_j)$ , а при  $j = n - 1$  — в  $(b_k, x_{k-1}, b_{k-1})$ . Удаление обоих листов  $a_1$  и  $a_2$  превратит перестановку  $\sigma_1$  в  $(b_1, b_2)$  при  $k = 2$  или в  $(x_2, b_1)$  при  $k > 2$ . Стол  $\Omega_{k-s}$  остается, как и  $\Omega_k$ , симметричным относительно оси  $Oy$ .

$\varepsilon$

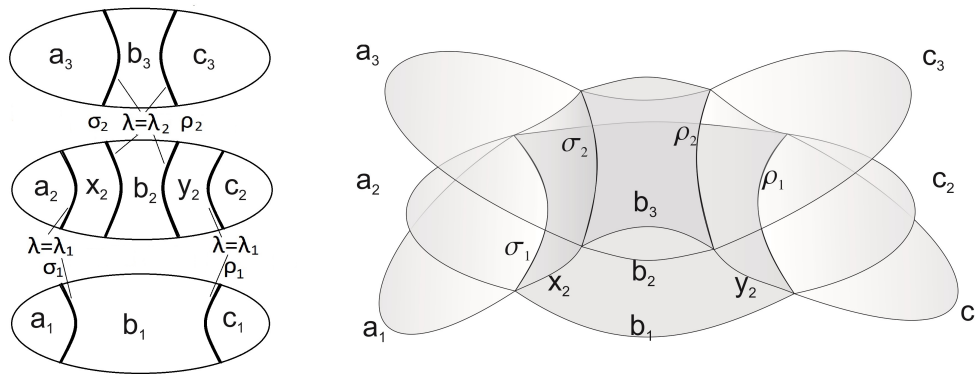


Рис. 1. Склейка стола  $\Omega_k$  при  $k = 3$  из областей  $a_i, b_i, c_i, x_i, y_i$  трех эллипсов по дугам софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$  с перестановками  $\sigma_1, \rho_1$  и  $\sigma_2, \rho_2$  на их левых и правых ветвях

**Теорема 2.** При любых целых  $k, s, 0 \leq s \leq k$ , слоение Лиувилля бильярдных столов  $\Omega_{k,k-s}$  содержит семью с  $2k$  инцидентными ей ребрами молекулы, т.е. с валентностью  $2k$ , и с меткой  $n = k - s$ .

**Теорема 3.** Для бильярда на столе  $\Omega_{k,k-s}$  при  $0 \leq s \leq k$  инвариант Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на произвольной неособой изоэнергетической поверхности имеет вид, показанный на рис. 2.

**4. Доказательство теорем 1-3.**

4.1. Вычисление грубой молекулы: эллиптические торы. Для бильярда на произвольном столе  $\Omega$  определим для поверхности  $Q_\Omega^3$  подмножества  $Q_{\Omega,b+\varepsilon}$  (где  $0 \leq \Lambda \leq b + \varepsilon$ ) и  $\bar{Q}_{\Omega,b+\varepsilon}$  (где  $a \geq \Lambda > b + \varepsilon$ ) и обозначим естественные проекции так:

$$\pi : Q_h^3 \longrightarrow \Omega, \quad \pi_0 : \Omega \longrightarrow Oxy, \quad \pi' := \pi_0 \circ \pi : Q_h^3 \longrightarrow Oxy.$$

**Утверждение 1.** Подмножество  $Q_{\Omega_k,b+\varepsilon}$  для бильярда на столе  $\Omega_k$  послойно гомеоморфно  $k$  экземплярам подмножества  $Q_{A_2,b+\varepsilon}$  для бильярда на столе типа  $A_2$  (бильярд внутри эллипса).

**Доказательство.** 1. Обозначим через  $\tilde{\alpha}$  лист  $\alpha \in \{a_i, c_i, x_i, b_i, y_i\}$  стола  $\Omega_k$  за вычетом гиперболы границы этого листа. Ограниченная на  $\tilde{\alpha}$  проекция  $\pi_0 : \Omega_k \longrightarrow Oxy$  индуцирует

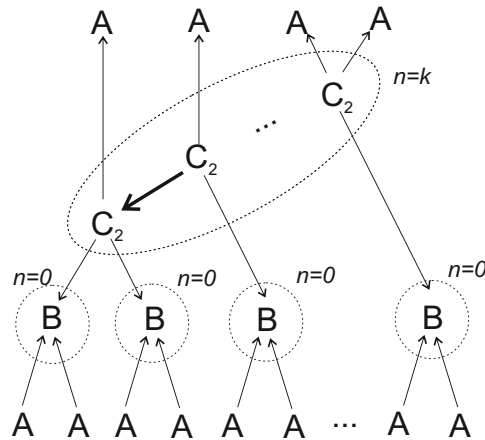


Рис. 2. Инвариант Фоменко–Цишанга бильярда на столе  $\Omega_{k,k-s}$ . Метки  $(r, \varepsilon)$  равны  $(\infty, 1)$  на выделенных ребрах и  $(0, 1)$  на остальных

послойный гомеоморфизм между множествами  $Q_{\tilde{\alpha}, b+\varepsilon}^3 \subset Q_{\Omega_k, b+\varepsilon}^3$  и  $Q_{\tilde{\alpha}, b+\varepsilon}^3 \subset Q_{A_2 \subset Oxy, b+\varepsilon}^3$  в кокасательных пространствах.

Для плоских бильярдов  $\Omega$  в областях типа  $A_0, A_1$  и  $A_2$  рассмотрим любую неособую гиперболу, ветвь которой пересекает внутренность области.  $\pi$ -прообраз этой ветви в слое  $\Lambda = b$  гомеоморфен двум восьмеркам, состоящим из пар точка–вектор. Выбор одной из компонент однозначно задается выбором одной из двух пар точка–вектор, где точка есть пересечение ветви гиперболы и оси  $Ox$ , а вектор параллелен оси  $Ox$  и направлен либо “вправо” (по возрастанию  $x$ ), либо “влево”.

Тем самым, был определен выбор одной из двух компонент связности  $Q_{\tilde{\alpha}, b+\varepsilon}^3$  для листов  $\alpha \in \{x_i, b_i, y_i\}$ . Обозначим символами  $x_i^+, b_i^+, y_i^+$  компоненты с векторами “вправо”, а символами  $x_i^-, b_i^-, y_i^-$  — компоненты с векторами “влево”.

2. Рассмотрим слой  $\Lambda = 0$  слоения Лиувилля бильярда, являющийся минимальной окружностью или несвязным объединением нескольких таких окружностей. Его проекция  $\pi'$  содержится в эллипсе  $\lambda = 0$ . Покажем, что для стола  $\Omega_k$  проекция  $\pi'$  каждой такой окружности является биекцией на эллипс, как и в случае бильярда в  $A_2$ . Тогда отобразим в  $Q_{A_2, b+\varepsilon}^3$  те компоненты связности листов стола  $\Omega$ , по которым пройдет данная траектория. Далее проверим непрерывность в прообразе дуг склейки листов.

Обозначим дуги эллипса, попадающие в один из листов  $\tilde{a}_i, \tilde{c}_i, \tilde{x}_i, \tilde{b}_i, \tilde{y}_i$  стола  $\Omega_k$ , той же буквой, что и лист. Для листов  $\{x_i, b_i, y_i\}$  добавим знак ординаты  $y$  в качестве индекса. Получим те же обозначения, что и ранее для компонент связности  $Q_{\tilde{\alpha}, b+\varepsilon}^3$ .

В каждую точку дуг  $a_i, x_i^\pm, b_i^\pm, y_i^\pm, c_i$  проецируются две пары точка–вектор из слоя  $\Lambda = 0$  (вектор направлен по часовой стрелке или наоборот). Перестановки  $\sigma_i, \rho_i$  задают биекцию на множестве таких пар для всех областей, инцидентных этому ребру склейки, т.е. корректно определяют продолжение любой из траекторий слоя  $\Lambda = 0$ .

Закодируем эти траектории последовательностью, состоящей из дуг  $a_i, x_i^\pm, b_i^\pm, y_i^\pm, c_i$ , с указанием перестановки при переходе с листа на лист или отражении от границы. В силу конечности комплекса каждая траектория обязана замкнуться. Код  $\mu_j$  окружности, проходящей по дуге  $a_j$ , имеет следующий вид при  $k > 2$  ( $\mu_1$  при  $k = 2$  получим из  $\mu_1$  при  $k > 2$  с учетом  $\rho_1(c_1) = b_2$  и  $\sigma_1(b_2) = a_1$ ):

$$\mu_1 : a_1 \xrightarrow{\sigma_1} b_1^+ \xrightarrow{\rho_1} c_1 \xrightarrow{\rho_1} y_2^- \xrightarrow{\rho_2} \dots \xrightarrow{\rho_{n-2}} y_{n-1}^- \xrightarrow{\rho_{n-1}} b_n^- \xrightarrow{\sigma_{n-1}} x_{n-1}^- \xrightarrow{\sigma_{n-2}} \dots \xrightarrow{\sigma_2} x_2^- \xrightarrow{\sigma_1} a_1;$$

$$\mu_i, 1 < i < k : a_i \xrightarrow{\sigma_{i-1}} x_i^+ \xrightarrow{\sigma_i} b_i^+ \xrightarrow{\rho_i} y_i^+ \xrightarrow{\rho_{i-1}} c_i \xrightarrow{\rho_{i-1}} b_{i-1}^- \xrightarrow{\sigma_{i-1}} a_i;$$

$$\mu_k, k \geq 2 : a_k \xrightarrow{\sigma_{k-1}} b_k^+ \xrightarrow{\rho_{k-1}} c_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} b_{k-1}^- \xrightarrow{\sigma_{k-1}} a_k.$$

Для обеих траекторий, проходящих  $a_i$  в противоположных направлениях, код одинаков: бильярдный стол (комплекс, оснащенный перестановками) обладает симметрией отражения относительно оси  $Ox$ . Следовательно, поднятие такого отражения стола переводит минимальные траектории в минимальные траектории. Других траекторий, кроме  $2k$  таких пар, нет: каждая дуга  $a_i, c_i, x_i^\pm b_i^\pm, y_i^\pm$  встретилась в кодах  $\mu_j$  ровно раз.

**Замечание.** Для стола  $\Omega_k$  все траектории на уровне  $\Lambda = 0$  направлены либо по, либо против часовой стрелки и проходят ровно по одной паре листов  $a_i, c_i$ .

3. Выберем  $i$  и отображим в  $Q_{A_2, b+\varepsilon}^3$  объединение множеств  $Q_{\tilde{a}, b+\varepsilon}^3$  для всех компонент  $\alpha \in \{\tilde{a}_i, \tilde{c}_i, \tilde{x}_i^\pm, \tilde{b}_i^\pm, \tilde{y}_i^\pm\}$ , входящих в код  $\mu_i$ . Это мономорфизм, т.е. остается проверить корректность склейки.

Достаточно проверить, что склейка вдоль частей особых траекторий уровня  $\Lambda = b$ , попадающих на интервал между фокусами, задается тем же кодом, что и склейка вдоль особых минимальных траекторий. Действительно, в одну и ту же связную компоненту  $Q_{\Omega_k, b+\varepsilon}^3$  попадут следующие пары точка-вектор: точка фокального отрезка и вектор “вправо”, точка граничной дуги с координатой  $y > 0$  и вектор “по часовой стрелке”, точка граничной дуги с координатой  $y < 0$  и вектор “против часовой стрелки”.

Тем самым для стола  $\Omega_k$  перестановки  $\sigma_i$  и  $\rho_i$  отождествляют связные компоненты прообраза гиперболических границ областей  $a_i, x_i, b_i, y_i, c_i$ , т.е. код  $\mu_i$  задает послыйный гомеоморфизм с множеством уровня  $Q_{A_2, b+\varepsilon}^3$  для бильярда в эллипсе. Утверждение 1 доказано.

**Следствие 1.** После удаления пары листов  $a_i, c_i$  из  $\Omega_k$  получим на связной компоненте, содержащей  $\mu_i$ , слоение, эквивалентное  $Q_{A_0, b+\varepsilon}$  для бильярда на столе  $A_0$ . Остальные компоненты  $Q_{\Omega, b+\varepsilon}$  не меняются.

4.2 Вычисление грубой молекулы: гиперболические торы. Опишем слоение Лиувилля на множестве  $\bar{Q}_{k, b+\varepsilon}^3$  уровня  $H = 1, b + \varepsilon \leq \Lambda \leq a$  для бильярда на столе  $\Omega_k$ . В случае  $k = 2$  стол склеен из шести листов  $a_i, b_i, c_i$ , где  $i = 1, 2$ , по перестановкам  $\sigma = (a_1, b_1, a_2, b_2), \rho = (b_1, c_1, b_2, c_2)$  на левой и правой дугах гиперболы с параметром  $\lambda_1$ .

**Утверждение 2.** Слоение Лиувилля на множестве уровня  $\bar{Q}_{\Omega_k, k-s, b+\varepsilon}^3, \Lambda > b + \varepsilon$  для столов  $\Omega_{k, k-s}$  при любом  $0 \leq s \leq k$  послыйно гомеоморфно прямому произведению окружности  $S^1$  на  $M^2$  — сферу  $S^2$  с  $k$  дырками, расслоенную на  $k - 1$  2-атом  $C_2$  и  $k$  2-атомов  $A$ . Седловые атомы образуют граф-дерево без разветвлений (см. рис. 2).

**Доказательство:** 1. Наличие у множества  $Q_{\Omega_k, k-s, b+\varepsilon}^3$  структуры прямого произведения окружности  $S^1$  на двумерное расслоенное  $M^2$  следует из односвязности  $\pi'(\bar{Q}_{k, b+\varepsilon}^3) \subset Oxu$  и тождественности всех перестановок на эллиптических дугах множества  $\pi(\bar{Q}_{k, b+\varepsilon}^3) \subset \Omega_k$ .

Образом  $\pi'$ -проекции стола  $\Omega_{k, k-s}$  является плоский стол  $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченный дугами эллипса  $\lambda = 0$  и гиперболы  $\lambda = b + \varepsilon$ . Он расслаивается на дуги эллипсов  $0 < \lambda < b$  и отрезок оси  $Ox$ . Обозначим этот отрезок  $\Omega^1$ , и в качестве  $M^2$  возьмем  $\pi'$ -прообраз  $\Omega^1$  в множестве  $Q_{\Omega_k, k-s, b+\varepsilon}^3$ . Множество  $M^2$  расслоено на одномерные кривые постоянного уровня интеграла  $\Lambda$  и особые точки.

2. Выберем любое  $b + \varepsilon \leq \lambda_0 < \lambda_1$ . Слой уровня  $\Lambda = \lambda_0$  в  $\pi'$ -прообразе дуги опишем кодом, аналогичным коду для слоев на уровне  $\Lambda = 0$ . Вместо  $a_i$  и  $c_i$  будем, как и для областей  $x_i, b_i, y_i$ , писать символ со знаком, определяемым вектором: проекция  $\pi'$  множества  $Q_{\Omega_k, k-s, b+\varepsilon}^3$  на лист  $a_i$  или  $c_i$  тоже имеет тип  $A_0$  (т.е. ограничена двумя гиперболическими дугами). При этом смена направления вектора в коде может происходить не только на дугах  $\sigma_i$  и  $\rho_i$ , но и на границе  $\pi'$ -проекции слоя  $\Lambda = \lambda_0$ , т.е. левой ветви  $\lambda_0^l$  и правой ветви  $\lambda_0^r$  гиперболы с параметром  $\lambda_0$ . В простейшем случае  $k = 2$  на уровне  $b < \lambda_0 < \lambda_1$  имеем коды

$$a_1^r \overset{\sigma}{-} b_1^r \overset{\rho}{-} c_1^r \overset{\lambda_0^r}{-} c_1^l \overset{\rho}{-} b_2^l \overset{\sigma}{-} a_1^l \overset{\lambda_0^l}{-} a_1^r, \quad a_2^r \overset{\sigma}{-} b_2^r \overset{\rho}{-} c_2^r \overset{\lambda_0^r}{-} c_2^l \overset{\rho}{-} b_1^l \overset{\sigma}{-} a_2^l \overset{\lambda_0^l}{-} a_2^r.$$

3. Для всех бильярдов вида  $\Omega_{2, 2-i}$  при  $i = 0, 1, 2$  множества  $\bar{Q}_{\Omega_{2, 2-i}, \lambda_1}^3$  послыйно гомеоморфны в результате отождествления пар  $(x_i, v)$  точка-вектор при проекции  $\pi$ .

При каждом  $i = 0, 1, 2$  множества  $Q_{\Omega_{2, 2-i}, [b+\varepsilon, \lambda_1]}^3 = \{H = h, b + \varepsilon \leq \Lambda \leq \lambda_1\}$  реализуют гомотопию с параметром  $\lambda$  между слоями бильярда на столе  $\Omega_{2, 2-i}$ , лежащими на уровнях  $\Lambda = b + \varepsilon$  и  $\Lambda = \lambda_1$ . При этом слои уровня  $\Lambda = \lambda_1$  всех трех бильярдов  $\Omega_{2, 2}, \Omega_{2, 1}, \Omega_{2, 0}$  гомеоморфны друг

другу и особому слою 3-атома  $C_2$ .

Гомотопией является стягивание связных компонент прообраза листа  $a_i$  в особое множество уровня  $\lambda_1$ . В прообразе отрезка  $\Omega^1 \subset Ox$  это есть стягивание интервалов  $a_i$  или  $c_i$  граничной окружности седлового 2-атома в его особую точку, а в прообразе всего стола — это стягивание колец регулярного граничного тора седлового 3-атома на гомологичную им особую окружность этого 3-атома.

Тем самым  $\pi$ -прообраз листа  $a_i \in \Omega_{2,2-i}$  в  $Q_{b+\varepsilon, \lambda_1}^3$  имеет вид прямого произведения окружности на треугольник. Особая точка 2-атома является вершиной треугольника, а две другие его вершины лежат на слое  $\lambda = b + \varepsilon$ . При этом гомотопия треугольника на отрезок указанного вида не меняет структуру слоения, т.е. является послойным гомеоморфизмом. Если же лист  $a_i$  не входит в комплекс  $\Omega_{2,2-i}$ , то прообраз является произведением окружности на отрезок и проецируется на дугу склейки с параметром  $\lambda_1$ .

4. Перестройка вблизи уровня  $\lambda = \lambda_1$  является атомом  $C_2$  как перестройка двух торов в два тора через две критические окружности, имеющая необходимые симметрии. Проекция  $\pi(\bar{Q}_{\lambda_1+\varepsilon}^3)$  на стол  $\Omega_{k,k-s}$  несвязна, и одна ее компонента состоит из части листа  $b_1$ , т.е. атом  $C_2$  инцидентен максимальному атому  $A$  (двум атомам  $A$ , если обе компоненты состоят из частей области  $b_i$ ). Это также следует из результата, полученного в [8] для слоения Лиувилля топологического бильярда, склеенного из двух областей  $A_0$  по обеим гиперболическим границам.

5. Заметим, что проекция  $\pi(\bar{Q}_{\Omega_{k-1,k-s-1}, b+\varepsilon}^3)$  на стол  $\Omega_{k-1,k-s-1}$  и проекция  $\pi(\bar{Q}_{\Omega_{k,k-s}, \lambda_1+\varepsilon}^3)$  на стол  $\Omega_{k,k-s}$  (где пара листов  $a_i, c_i$ , удаленных из стола  $\Omega_{k-1,k-s-1}$ , соответствует пара листов  $a_{i+1}, c_{i+1}$ , удаленных из стола  $\Omega_{k,k-s}$ ) устроены одинаково с точностью до непрерывного изменения набора чисел  $\lambda_i$  (остающихся при этом попарно различными). Получили вид грубой молекулы путем индукционного перехода. В частности, грубая молекула слоения на множестве  $\Lambda > b + \varepsilon$  для стола  $\Omega_{k,k-s}$  не зависит от  $s$ . Утверждение 2 доказано.

4.3. *Допустимые базисы и матрицы склейки, вычисление меток.* На минимальном и фокальном уровнях выберем допустимые базисы так же, как для бильярда в эллипсе (см. рис. 3). Матрица склейки на эллиптических ребрах имеет вид  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Отметим, что здесь мы фиксируем ориентацию изоэнергетической поверхности так, чтобы в цикл  $\lambda_B$  цикл  $\lambda_A$  входил с противоположной ориентацией. Это означает, что так как циклы  $\mu_A$  и  $\lambda_B$  по определению системы сонаправлены (отвечают траекториям, закручивающимся в одну сторону), то цикл  $\mu_B = \lambda_A$  (т.е. имеет ту же ориентацию, не согласованную с ориентацией  $\lambda_B$ ).

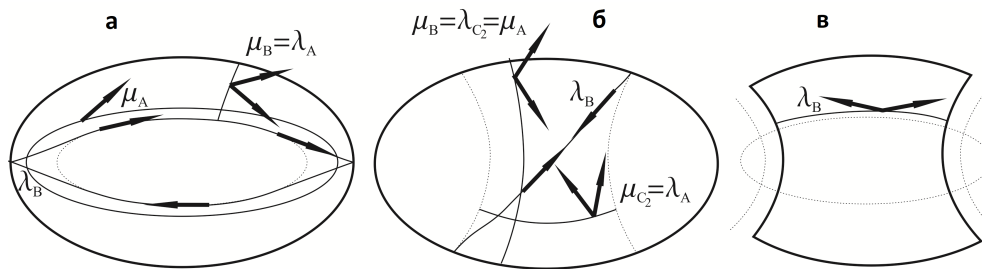


Рис. 1: Проекции на столы  $A_2$  (а, б) и  $A_0$  (в, б) циклов на эллиптических и гиперболических граничных торах 3-атомов соответственно

Запишем матрицу склейки между фокальными атомами  $B$  и атомами  $C_2$ , отвечающими невыпуклым склейкам. Допустимые базисы показаны на рис. 3. Циклы  $\lambda_{C_2}$  гомологичны циклам, проекции которых лежат на дуге интегральной гиперболы, оснащенной касательными векторами скорости. Очевидно, что циклы  $\mu_{C_2}$ , изображенные на рисунке, дополняют данные циклы  $\lambda$  до базиса на торах и при этом образуют 2-атом  $C_2$ , т.е. они связаны условием существования глобального сечения (см. [4]). Поэтому на ребрах между атомами  $B$  и  $C_2$  матрицы склейки имеют вид

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Подчеркнем, что так как на торах, соответствующих  $\lambda < b$ , ориентация циклов  $\mu_B$  была противоположна ориентации циклов  $\lambda_B$  то для торов при  $\lambda > b$  эти циклы уже сонаправлены. Это объясняет выбор знаков в соотношении  $\mu_B = \lambda_{C_2}$ .

Осталось отметить, что все  $\lambda$ -циклы седловых атомов, соответствующих невыпуклым склейкам  $\lambda_i$ , гомологичны и ориентированы одинаково по отношению друг к другу и к особому слою любого максимального атома  $A$ . Вместе с тем, они не гомологичны  $\lambda$ -циклу любого из атомов  $B$ , лежащих на уровне  $\lambda = b$ . Тем самым указанные атомы  $C_2$  образуют семью, а матрицы склейки между этими атомами имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . При этом очевидно, что циклы  $\mu_{C_2}$  стягиваются в точку внутри полноторий  $A$ , т.е. они гомологичны циклам  $\lambda_A$ . В результате, на верхних торах матрицы склейки имеют вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Числовые метки легко вычисляются по найденным матрицам склейки согласно формулам из [4].

В случае удаления пары областей  $A_1$  движение внутри эллипса  $A_2$  переходит в движение по бильярду  $A_0$ . Это сохранит полулокальный класс бифуркации (атом  $B$ ) на фокальном уровне, но циклы для атома  $\lambda_B$  изменятся (см. рис. 3в, 3б вместо рис 3а, 3б). Матрицы склейки на всех ребрах, исходящих из этого атома, примут вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Это повлечет за собой уменьшение метки  $n = k$  в семье, состоящей из атомов  $C_2$ .

Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-6399.2018.1, соглашение 075-02-2018-867) в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. №3. 15–25.
2. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1990. **54**, №3. 546–575.
3. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, №12. 17–56.
4. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2. Ижевск: НИЦ “РХД”, 1999.
5. Козлов В.В., Трещев В.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
6. Фокичева В.В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**, №10. 127–176.
7. Фокичева В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Докл. РАН., 2015. **465**, №2. 150–153.
8. Ведюшкина В.В. Инварианты Фоменко-Цишанга невыпуклых топологических бильярдов // Матем. сб. 2019. **210**, №3. 17–74.

Поступила в редакцию  
26.09.2019