УДК 154

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ОСОБЫХ СЛОЕВ АТОМОВ БИЛЬЯРДОВ В НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Москвин[1]

Исследованы плоские бильярды в невыпуклых областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Изучена топология седловых атомов таких бильярдов, представлен алгоритм построения двумерных особых слоев.

Ключевые слова: бильярд, интегрируемые системы, инвариант Фоменко, слоение Лиувилля.

The purpose of this study is to research flat billiards in not-convex areas limited by segments of confocal quadrics. Topology of 2-dimmensional layers of Fomenko's atoms is studied and constructing algorithm is presented in the article.

Key words: billiard, integrable systems, Fomenko's invariant, Liouville's foliation.

Бильярдная задача (бильярд) — динамическая система, описывающая движение материальной точки внутри области с естественным абсолютно упругим отражением на границе (угол падения равен углу отражения). В монографии С.Л. Табачникова [1] дан обзор современных исследований бильярдов. Топология совместных поверхностей уровня интегралов описывается с помощью теории А.Т. Фоменко [2], которая в случае полных потоков изложена в книге А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко [2]. В настоящей работе исследуются плоские бильярды, потоки в которых не являются полными вследствие наличия невыпуклых углов на границе области. Как было показано В. Драговичем и М. Раднович [3—7], почти для всех значений интеграла в таких бильярдах совместная поверхность уровня интегралов является сферой с ручками и проколами. В настоящей работе дано описание двумерных комплексов, являющихся прообразами критического значения интеграла $\Lambda = b$. Тем самым описаны особые слои слоения Лиувилля для бильярдов с невыпуклыми углами. Дальнейшее развитие этих результатов представлено в публикациях [8—16].

Определение бильярда с невыпуклыми углами. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение материальной точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $\partial\Omega$. Эту систему назовем бильярдом в области. Траектории, попавшие в прямые углы, мы доопределим, как обычно, по непрерывности (попадая в вершину прямого угла, точка отражается по той же траектории). Легко видеть, что поступить так же с траекториями, попавшими в вершину угла $3\pi/2$, сохраняя при этом непрерывность системы, невозможно. Обозначим вершины тупых углов через x_k. Следовательно, некомпактным фазовым пространством данного бильярда является многообразие

$$M^4 := \{(x, v)|x \in \Omega,\ x \neq x_k\ \forall k,\ v \in T^2_x\mathbb{R},\ |v| > 0/\sim\},$$

где отношение эквивалентности задается так:

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P,\ |v_1| = |v_2|,\ v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь через T_xP обозначена касательная прямая к области Ω в точке x, а через $|v|$ евклидова длина вектора v. Это отношение эквивалентности иногда будем называть бильярдным законом.

Определение 1. Сложностью бильярда назовем число k — число углов излома граничной кривой, равных $\frac{3\pi}{2}$.

Определение 2. Кусочно-гладкое (некомпактное) 3-многообразие $Q^3 = \{x \in M^4 : |v(x)| = \mathrm{const}\}$ назовем изоэнергетической 3-поверхностью данного бильярда.

Определение 3. Назовем естественной проекцией π многообразия Q^3 на бильярдную область Ω гладкое отображение, действующее по правилу $(x, v) \to x$.

[1] *Москвин Виктор Александрович — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: aoshi.k68@gmail.com.*

Moskvin Viktor Aleksandrovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Определение 4. Назовем особыми точками области (бильярда) вершины углов $3\pi/2$, а особыми точками многообразия Q^3 — прообразы при естественной проекции π особых точек области.

Далее под бильярдной областью Ω мы будем понимать односвязную плоскую область, ограниченную дугами софокусных квадрик из семейства

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda),\ \lambda \leqslant a.$$

Здесь $\infty > a > b > 0$ — фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик), λ — параметр семейства (определяющий квадрику семейства). При $\lambda \in (0, a)$, где $\lambda \neq b$, это — эллипсы или гиперболы. При $\lambda = b$ это — объединение вырожденной гиперболы (образованной двумя горизонтальными лучами из фокусов) и вырожденного эллипса (отрезка между фокусами). Вертикальную прямую, соответствующую параметру $\lambda = a$, мы будем называть гиперболой (а не вырожденной гиперболой). В дальнейшем под термином "бильярд Ω" будет пониматься и динамическая система, и область одновременно.

Атомы и элементарные бильярды. Для исследования бильярдов с невыпуклыми углами на границе области следует расширить классическое определение атома, данное А.Т. Фоменко [2], поскольку на совместных поверхностях уровня интеграла могут лежать выколотые точки, а сами совместные поверхности уровня интеграла удобнее рассматривать как двумерные клеточные комплексы.

Определение 5. Трехмерным седловым атомом (3-атомом) назовем трехмерную окрестность M двумерного особого слоя G, задаваемую неравенством $b - \varepsilon \leqslant \Lambda \leqslant b - \varepsilon$ для достаточно малого ε, расслоенную на двумерные поверхности уровня функции Λ и рассматриваемую с точностью до послойной эквивалентности. Здесь M и G являются клеточными комплексами размерности 2 и 3 соответственно.

Определение 6. Рассмотрим компактный плоский односвязный бильярд без особых точек (вершин угла $3\pi/2$), ограниченный дугами софокусных квадрик. Такой бильярд будем называть элементарным бильярдом.

Вышеуказанные бильярды были полностью изучены В.В. Ведюшкиной в работе [17]. Существует ровно 13 неэквивалентных элементарных бильярдов, принадлежащих одной из двух серий. Серии A принадлежит ровно шесть бильярдов, они обозначаются A_f, если они не содержат отрезка фокальной прямой между фокусами, и A'_f в обратном случае. Серии B принадлежит также шесть бильярдов, обозначаемых B_n, B'_n или B''_n, где n указывает на количество связных сегментов фокальной прямой в области, а штрих — на принадлежность сегментов фокальной прямой границе бильярда Ω. Серии C принадлежит единственный плоский бильярд C_2 (в кольце). Также В. В. Ведюшкиной построены инварианты Фоменко—Цишанга для таких бильярдов, приведем только часть ее результата — описание грубых молекул.

Теорема 1 [В.В. Ведюшкина [17]]. *Прообраз $b - \varepsilon \leqslant \Lambda \leqslant b - \varepsilon$ в изоэнергетической поверхности Q^3 элементарного бильярда ω при достаточно малом значении ε гомеоморфен следующим трехмерным многообразиям* (*перечисленные ниже атомы трехмерные*): *атому B для областей A_2, A_0*; *атому A^* для области A_1*; *атому B_n для B_n, B'_{n+1}, где $n > 0$*; *произведению тора на отрезок для областей A'_2, A'_1, A'_0, B_0, B'_1, B''_2.*

Описание двумерных седловых особых слоев однородных невыпуклых бильярдов. Для дальнейшего построения двумерного особого слоя G атома M мы будем выбирать заполнение областей софокусными квадриками семейства. В теории элементарных бильярдов прообразы оснащенных квадрик софокусного семейства суть слои расслоений Зейферта в седловых атомах бильярдов без особых точек. В областях типа A этими слоями являются прообразы оснащенных гипербол, а в областях типа B и C — эллипсов. Теперь дадим определение гиперболических и эллиптических бильярдов.

Определение 7. Рассмотрим плоский бильярд Ω произвольной сложности k. Если бильярд Ω не содержит участка фокальной прямой между фокусами (сегментов вырожденного эллипса), то назовем его однородно-эллиптическим. Если любой связный сегмент фокальной прямой внутри бильярда Ω содержит фокусы либо лежит между фокусами, то назовем его однородно-гиперболическим. В ином случае будем называть его неоднородным.

Основным инструментом исследования топологии комплекса $G = \Lambda^{-1}(b)$ бильярда Ω служит разбиение бильярда Ω на элементарные бильярды, топология особого слоя для которых уже изучена.

Опишем выбор разбиения на однородном бильярде: будем разрезать его по одному типу квадрик (либо по эллипсам, либо по гиперболам), которые проходят через особые точки, а также по фокальной прямой, чтобы рассматривать самые простые элементарные бильярды.

Определение 8. Рассмотрим однородно-гиперболический (эллиптический) бильярд Ω произвольной сложности k. Выберем на нем разбиение $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ не более чем на $4k$ элементарных бильярда Σ_j следующим образом:

1) проведем фокальную прямую;

2) проведем все гиперболы (эллипсы) с параметрами λ_I, на которых лежат особые точки (вершины углов $3\pi/2$).

Назовем такое разбиение однородного бильярда Ω фокальным разбиением $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$, а числом N будем обозначать количество элементов в нем.

Определение 9. Рассмотрим однородно-гиперболический (эллиптический) бильярд Ω с выбранным на нем разбиением $\Omega_1, \ldots, \Omega_{M_1}$. Назовем граничной дугой гиперболы (эллипса) λ_i объединение всех сегментов границ элементарных бильярдов Ω_j, лежащих на гиперболе (эллипсе) с параметром λ_I.

Перед формулировкой следующей теоремы, описывающей построение двумерного особого слоя M трехмерного атома G для однородных бильярдов, приведем определение графа границы $\pi^{-1}(\lambda_i)$ — одномерной клетки двумерного слоя G. Стоит отметить, что набор граничных графов зависит от выбранного на бильярде разбиения.

Определение 10. Рассмотрим плоский однородный односвязный бильярд Ω и его фокальное разбиение $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$. Рассмотрим одну из граничных дуг гипербол λ_i. Назовем графом границы $\pi^{-1}(\lambda_i)$ полный прообраз граничной дуги гиперболы λ_i при естественной проекции π.

Теорема 2. *Пусть Ω — плоский односвязный однородно-гиперболический бильярд произвольной сложности k. Пусть $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ — его фокальное разбиение. Тогда существует алгоритм склеивания двумерного особого слоя G трехмерного атома M из $(2N)$ двумерных цилиндров $S^1 \times I$ и не более чем из $(2N)$ графов гиперболических границ бильярда $\pi^{-1}(\lambda_i)$.*

Доказательство. Приведем алгоритм склеивания двумерного особого слоя G трехмерного атома M не более чем из $(2N)$ графов его гиперболических границ и $(2N)$ двумерных цилиндров $S^1 \times I$, а потом выполним доказательство по аналогичным алгоритму шагам и докажем, что построенный алгоритмически комплекс G' совпадает с особым слоем.

Алгоритм.

Шаг 1. Рассмотрим граничные дуги $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ бильярда Ω. На каждой дуге λ_i отметим черными точками $b^i_1, \ldots, b^i_{n^b_i}$ все вершины углов $\pi/2$ или $3\pi/2$, а также точки пересечения граничных дуг с фокальной прямой на границе области. Белыми точками $w^i_1, \ldots, w^i_{n^w_i}$ отметим пересечения дуг λ_i с границей бильярда Ω вне вершин углов, а также пересечения граничной дуги λ_i с фокальной прямой внутри бильярда Ω. Обозначим множество черных точек на граничной дуге λ_i через B_i, а белых через W_i. Теперь рассмотрим сегменты граничной дуги λ_i, ограниченные отмеченными точками. Назовем их $\lambda_{i,t}$, введя на каждой дуге λ_i естественную нумерацию сегментов t, здесь $t \in 1, \ldots, n^w_i + n^b_i$. Также аналогично дуге граничной гиперболы рассмотрим фокальную прямую и обозначим через $\lambda_{b,t}$ ее сегменты между отмеченными точками. Дополнительно пометим сегменты граничных дуг $\lambda_{i,t}$ символом "+", если сегмент является частью границы бильярда Ω, и символом "−", если сегмент $\lambda_{i,t}$ является границей между элементарными бильярдами разбиения, но не является сегментом границы объемлющего бильярда Ω.

Шаг 2. Рассмотрим граничную дугу λ_i. На этом шаге построим для нее граф границы $\pi^{-1}(\lambda_i)$. Каждой черной точке из множества B_i соответствует одна вершина графа $b^i_1, \ldots, b^i_{n^b_i}$. Каждой белой точке из множества W_i соответствуют две вершины графа $\pi^{-1}(\lambda_i)$, обозначаемые $w^{i,r}_1, w^{i,l}_1, \ldots, w^{i,r}_{n^w_i}, w^{i,l}_{n^w_i}$ (всего $2n^w_i$ вершин графа). Каждому граничному сегменту $\lambda^+_{i,t}$ будут соответствовать два ребра графа $\lambda^{\uparrow}_{i,t}, \lambda^{\downarrow}_{i,t} \in \pi^{-1}(\lambda_i)$ (векторы в Q^3 будут направлены вверх и вниз), а каждому граничному сегменту $\lambda^-_{i,t}$ — четыре $\lambda^1_{i,t}, \lambda^2_{i,t}, \lambda^3_{i,t}, \lambda^4_{i,t} \in \pi^{-1}(\lambda_i)$. Расставим на ребрах $\lambda^v_{i,t}$ буквы $b^i_1, \ldots, b^i_{n^b_i}, w^{i,r}_{n^b_i+1}, w^{i,l}_{n^b_i+1}, \ldots, w^{i,r}_{n^w_i+n^b_i}, w^{i,l}_{n^w_i+n^b_i}$ по таблицам на рис. 1 для ребер $\lambda^v_{i,t}$, помеченных символом "+", и на рис. 2 — для ребер, помеченных символом "−". Теперь повторим шаг 2 для всех значений $i \in 1, \ldots, n$ и для всех значений $t \in 1, \ldots, n^w_i + n^b_i$.
Шаг 3. Рассмотрим по два двумерных цилиндра $S^1 \times I$ для каждого элемента фокального разбиения Σ_j. Назовем один из них ${\Sigma_j}^L$, а другой — ${\Sigma_j}^R$. Будем помечать граничные окружности каждого цилиндра буквами $\lambda^v_{i,t}$ $(v = 1, 2, 3, 4, \uparrow, \downarrow)$ по следующему правилу.

Рассмотрим элементарный бильярд Σ_j и одну из его дуг граничных гипербол с параметром λ_i. Пусть на этой границе бильярда Σ_j отмечено $(L + L')$ сегментов граничных гипербол $\lambda^{+,-}_{i,1}, \ldots, \lambda^{+,-}_{i,L+L'}$, где на сегменте выставлен либо знак "+" (таких сегментов L), либо знак "−" (таких сегментов L'). Рассмотрим одну из граничных окружностей S^1_R для цилиндра Σ^R_j (аналогично S^1_L для цилиндра Σ^L_j). Разделим окружность S^1_R на $(2L + 2L')$ частей. Выберем точку на окружности S^1_R на границе любых из $(2L + 2L')$ частей. Будем ставить в соответствие частям окружности S^1_R (S^1_L) сегменты $\lambda^{+,-}_{i,t}$. Поставим в соответствие первому $\lambda_{i,1}^{+,-}$ две части окружности — справа и слева от отмеченной на $S_R^1(S_L^1)$ точки. Следующему сегменту $\lambda_{i,t}^{+,-}$ будут соответствовать две части окружности S_R^1 (S_L^1) — опять же справа и слева от точки, и т.д. В результате каждому сегменту граничной гиперболы $\lambda_{i,t}^{+,-}$ поставим в соответствие четыре сегмента граничных окружностей (отрезка) S_R^1 и S_L^1. Соответствующие сегменту $\lambda_{i,t}^{+}$ отрезки помечаются следующим образом: на обоих цилиндрах ставятся одинаковые буквы $\lambda_{i,t}^{\uparrow}, \lambda_{i,t}^{\downarrow}$. Соответствующие сегменту $\lambda_{i,t}^{-}$ отрезки помечаются следующим образом: на S_R^1 ставим $\lambda_{i,t}^1, \lambda_{i,t}^2$, а на S_L^1 ставим $\lambda_{i,t}^3, \lambda_{i,t}^4$. Аналогично поступим со второй гиперболической границей элементарного бильярда Σ_j.

Если Q сегментов фокальной прямой $\lambda_{b,1}, \dots, \lambda_{b,Q}$ лежит на границе элементарного бильярда Σ_j, не содержащего фокусов, то выберем отрезки $l_R \in \Sigma_j^R$ и $l_L \in \Sigma_j^L$ и разобьем каждый из этих отрезков на Q частей. Будем последовательно рассматривать сегменты $\lambda_{b,i}$ и ставить на сегментах отрезков l_R и l_L буквы $\lambda_{b,i}^{\rightarrow}$ и $\lambda_{b,i}^{\leftarrow}$ по следующему правилу: $\lambda_{b,i}^{\leftarrow}$ на i-м сегменте l_R и $\lambda_{b,i}^{\leftarrow}$ на i-м сегменте l_L.

Шаг 4. Только для бильярдов Ω, содержащих фокусы.

Если бильярд Ω содержит ровно один фокус, лежащий на границе бильярда Ω, то добавим к граничным графам $\pi^{-1}(\lambda_i)$ граф, состоящий из одной вершины и одного ребра, на которое поставим букву $\lambda_{b,0}$. Если бильярд Ω содержит два фокуса, лежащие на границе, то добавим к граничным графам $\pi^{-1}(\lambda_i)$ два графа, содержащие по одной вершине и одному ребру, на которые поставим по букве $\lambda_{b,0}$ и $\lambda_{b,0}'$. Если бильярд Ω содержит ровно один фокус, не лежащий на границе бильярда Ω, добавим к граничным графам $\pi^{-1}(\lambda_i)$ граф, состоящий из одной вершины с двумя смежными ребрами, отметим их буквами $\lambda_{b,0}^{\mathrm{up}}$ и $\lambda_{b,0}^{\mathrm{down}}$. Если бильярд Ω содержит два внутренних фокуса, то добавим два графа на одной вершине с двумя ребрами: $\lambda_{b,0}^{\mathrm{up}}$ и $\lambda_{b,0}^{\mathrm{down}}$, $\lambda_{b,0}'^{\mathrm{up}}$ и $\lambda_{b,0}'^{\mathrm{down}}$.

Если бильярд Ω содержит ровно один фокус, лежащий и на границе бильярда Ω, и на границе элементарного бильярда фокального разбиения Σ_j, то отметим не рассматриваемые ранее граничные окружности S_R^1 и S_L^1 цилиндров Σ_j^R и Σ_j^L буквой $\lambda_{b,0}$. Поступим аналогичным образом, если два фокуса лежат строго на границе бильярда Ω (пометим вторую пару цилиндров буквой $\lambda_{b,0}'$). Пусть теперь бильярд Ω содержит строго внутренний фокус. Рассмотрим два элементарных бильярда разбиения Σ_j и $\Sigma_{j'}$, имеющие общую границу и содержащие фокус на границе. Поставим на не помеченные ранее граничные окружности цилиндров Σ_j^R и $\Sigma_{j'}^R$ букву $\lambda_{b,0}^{\mathrm{up}}$, а на не помеченные ранее граничные окружности цилиндров Σ_j^L и $\Sigma_{j'}^L$ — букву $\lambda_{b,0}^{\mathrm{down}}$. Аналогично поступим (поставив буквы $\lambda_{b,0}'^{\mathrm{down}}$ и $\lambda_{b,0}'^{\mathrm{up}}$), если внутренних фокусов два.

Шаг 5. Выкалываем черные точки графов $\pi^{-1}(\lambda_i)$, соответствующие особым точками бильярда Ω. Склеиваем все цилиндры Σ_j^R и Σ_j^L для всех значений $j \in 1, \dots, N$ и графы гиперболических границ $\pi^{-1}(\lambda_i)$ для всех значений $i = 1, \dots, n$ по всем одинаковым буквам.

Продолжим доказательство теоремы 2. Вновь выберем фокальное разбиение $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ и выполним первый шаг алгоритма, разбив граничные дуги $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ всех гипербол и фокальной прямой на сегменты $\lambda_{i,t}$.

Начнем с заполнения области софокусными гиперболами семейства. Интервал (f_1, f_2) фокальной прямой расположен между фокусами f_1 и f_2. Пусть гипербола, принадлежащая софокусному семейству и проходящая через точку $x_0 \in (f_1, f_2)$, имеет непустое пересечение с бильярдом Ω. Оснастим каждую точку $x_0 \in (f_1, f_2)$ двумя единичными векторами скорости w, направленными горизонтально к правому и левому фокусам. Рассмотрим гиперболу q_λ семейства, проходящую через эту точку. Зафиксируем вектор скорости в точке $x_0 \in (f_1, f_2)$ и оснастим гиперболу сонаправленно этому вектору. А именно если этот вектор был направлен вправо, то оснастим точки гиперболы векторами v_1 и v_2, направленными соответственно к правому фокусу от левого фокуса (такие гиперболы назовем правыми). Если же вектор был направлен влево, то оснастим гиперболу векторами v_3 и v_4, направленными от правого фокуса к левому фокусу соответственно (такие гиперболы назовем левыми). На граничных дугах эллипсов бильярда Ω по закону отражения имеем $(x, v_1) \sim (x, v_2)$ (соответственно $(x, v_3) \sim (x, v_4)$). Если же точка $x_0 \in (f_1, f_2)$ лежит на гиперболическом сегменте границы бильярда Ω, то по закону отражения она может быть оснащена одним вектором скорости (или двумя эквивалентными друг другу векторами). В этом случае векторы, которые направлены вправо и влево и которыми оснащается гипербола q_λ, проходящая через такую точку x_0 (в этом случае гипербола q_λ совпадает с сегментом границы области), склеиваются друг с другом по закону отражения $(x, v_1) \sim (x, v_4)$ и $(x, v_2) \sim (x, v_3)$. Таким образом, правые гиперболы склеиваются с левыми гиперболами на гиперболических границах бильярда Ω.

Теперь убедимся, что на шаге 2 действительно получаются графы гиперболических границ $\pi^{-1}(\lambda_i)$.

Рассмотрим граничную дугу гиперболы бильярда λ_i и соответствующие ей правые и левые гиперболы q_{λ_i}. Граничная дуга гиперболы λ_i разбита на сегменты $\lambda_{i,t}$. Если сегмент $\lambda_{i,t}$ является частью границы бильярда Ω, то на нем действует бильярдный закон отражения: правые и левые гиперболы q_{λ_i} склеиваются между собой и сегменту $\lambda^+_{i,t}$ соответствуют два отрезка в графе $\pi^-1\lambda_i$. Если сегмент $\lambda_{i,t}$ не принадлежит границе бильярда Ω, то бильярдный закон на этом сегменте не действует и такому сегменту соответствуют четыре отрезка в G (точки вида (x, v_u), где $x \in \lambda_{i,t}$, $u = 1, 2, 3, 4$). В вершинах углов (в точках из B_i) все пары (x, v) склеиваются, а на фокальной прямой и на пересечении граничной дуги λ_i с границей бильярда вне угла склеиваются точки вида (x, v_1) и (x, v_2), (x, v_3) и (x, v_4). Несложно видеть, что шаг 2 описывает то же самое.

Предположим сначала, что в бильярде Ω нет фокусов. Двумерный особой слой каждого элементарного бильярда разбиения — тор $S^1 \times S^1$, причем окружности суть в точности прообразы оснащенных гипербол разбиения q_λ. В этом легко убедиться, так как прообразы пересечений гипербол q_λ с Σ_j всегда будут окружностями в силу склейки на эллиптических сегментах границ и аналогичной склейки на фокальной прямой. Тогда, взяв отдельно прообразы всех правых гипербол q_λ и отдельно левых гипербол q_λ, мы получим два цилиндра ${\Sigma_j}^R$ и ${\Sigma_j}^L$. Если сегмент λ_i, t является частью границы бильярда Ω (был помечен знаком "+"), то на нем правый цилиндр ${\Sigma_j}^R$ и левый цилиндр ${\Sigma_j}^L$ склеиваются. Если сегмент $\lambda_{i,t}$ был помечен знаком "−", то на нем правый цилиндр ${\Sigma_j}^R$ и левый цилиндр ${\Sigma_j}^L$ приклеиваются к соответствующим (правый — к правому, левый — к левому) цилиндрам ${\Sigma'_j}^R$ и ${\Sigma'_j}^L$ элементарного бильярда Σ'_j с общей границей $\lambda_{i,t}$, так как бильярдный закон на таких сегментах не действует. Каждая точка фокальной прямой оснащена только двумя векторами скорости (от правого и от левого фокуса), следовательно, если сегмент $\lambda_{b,t}$ лежит внутри области на границе элементарных бильярдов фокального разбиения Σ_j и $\Sigma_{j'}$, то на нем происходит склейка цилиндров Σ^R_j и $\Sigma^R_{j'}$ и Σ^L_j и $\Sigma^L_{j'}$ по одному из отрезков.

Если среди элементарных бильярдов фокального разбиения $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ есть один бильярд $\Sigma_j = A'_1$, то к итоговому комплексу G' на этом этапе все еще приклеивается один цилиндр, склеенный из двух цилиндров ${\Sigma_j}^R$ и ${\Sigma_j}^L$ по окружности, которая в комплекс G' добавляется на шаге 5 и не соответствует гиперболической границе. Если же есть два бильярда $\Sigma_j = A'_1$ и $\Sigma_{j'} = A'_1$ с непустым пересечением по фокальной прямой (в противном случае это просто дважды приклейка цилиндра), то мы должны приклеить к нашему бильярду двумерный особый слой атома A^* (по теореме 1). Для этого мы рассматриваем склейку цилиндров ${\Sigma_j}^R$ и ${\Sigma_j}^L$, ${\Sigma_{j'}}^R$ и ${\Sigma_{j'}}^L$ по границе, которая не соответствует гиперболе и на которой мы должны склеить ${\Sigma_j}^R$ и ${\Sigma_{j'}}^R$, ${\Sigma_j}^L$ и ${\Sigma_{j'}}^L$, чтобы получить двумерный слой A^*, разрезанный по одной из восьмерок.

Комментарий. Можно заметить, что алгоритм из теоремы 2 описывает склейку двумерного особого слоя G из двумерных особых слоев трехмерных атомов бильярдов разбиения $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$.

Пример 1. Найдем двумерный особый слой атома G трехмерного атома M для бильярда Ω, изображенного на рис. 3. Воспользуемся алгоритмом теоремы 2. Результаты применения всех шагов показаны на рис. 3—5.

Формулировка основной теоремы. Описание двумерных седловых особых слоев неоднородных невыпуклых бильярдов. Сформулируем и докажем основной результат. В отличие от теоремы 2 здесь уже не требуется однородность бильярда Ω, что приводит к более сложному строению двумерного особого слоя G и как следствие к более сложному алгоритму.

Определение 11. Рассмотрим произвольный плоский бильярд Ω. Будем выбирать на нем разбиение на элементарные бильярды $\Omega_1, \ldots, \Omega_{N'}$ следующим образом:

1) проведем фокальную прямую;

2) проведем все гиперболы и эллипсы с параметрами h_I и e_I, на которых лежат особые точки (вершины углов $3\pi/2$).

Назовем такое разбиение бильярда полным разбиением $\Omega_1, \ldots, \Omega_{N'}$, а числом N' будем обозначать количество элементов в нем. Граничные дуги эллипсов и гипербол λ_i для полного разбиения определим аналогично и будем обозначать дуги эллипсов через e_i (их всего n_e) и дуги гипербол через h_i (их всего n_h).

Далее будем подразумевать под λ_i произвольную граничную дугу бильярда Ω с полным разбиением $\Omega_1, \ldots, \Omega_{N'}$ (эллипс или гиперболу).

Теорема 3. *Пусть Ω — плоский бильярд произвольной сложности k. Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_{N'}$ — его полное разбиение. Тогда существует алгоритм склеивания двумерного особого слоя G трехмерного атома M из $(4N')$ двумерных дисков $I \times I$ и из $n_h + n_e$ графов границ бильярда $\pi^{-1}(\lambda_i)$.*

Доказательство. Проведем алгоритм склеивания двумерного особого слоя G трехмерного атома

M не более чем из $(4N')$ графов его гиперболических границ и $(4N')$ двумерных дисков $I \times I$, а потом выполним доказательство по аналогичным алгоритму шагам и докажем, что построенный алгоритмически комплекс G' совпадает с особым слоем.

Алгоритм.

Шаг 1. Рассмотрим граничные дуги $e_1, \dots, e_{n_e}, h_{n_e+1}, \dots, h_{n_e+n_h}$ бильярда Ω. На каждой дуге h_i или e_i отметим черными точками $b_1^i, \dots, b_{n_i^b}^i$ все вершины углов $\pi/2$ или $3\pi/2$, а также точки пересечения дуг h_i или e_i с фокальной прямой на границе области. Красными точками $r_1^i, \dots, r_{n_i^r}^i$ отметим пересечения эллиптических граничных дуг e_i с гиперболическими границами бильярда Ω вне вершин углов. Белыми точками $w_1^i, \dots, w_{n_i^w}^i$ отметим пересечения граничных гиперболических дуг h_i с эллиптическими границами бильярда Ω вне вершин углов, а также пересечения граничных дуг h_i или e_i с фокальной прямой вне границы бильярда Ω. Желтыми точками $y_1^i, \dots, y_{n_i^y}^i$ отметим все пересечения граничной дуги λ_i (эллиптической или гиперболической) с другими граничными дугами λ_l строго внутри бильярда Ω. Аналогично назовем множества B_i множествами черных точек, R_i — красных, W_i — белых и Y_i — желтых. Теперь рассмотрим сегменты граничных дуг λ_i, ограниченные отмеченными точками любого цвета. Назовем эти сегменты $h_{i,t}$ или $e_{i,t}$, введя на каждой дуге независимую нумерацию сегментов t, где $t \leqslant n_i^r + n_i^b + n_i^w + +n_i^y$ (произвольный сегмент обозначим $\lambda_{i,t}$). Также аналогично дуге граничной гиперболы рассмотрим фокальную прямую и назовем ее сегменты между отмеченными точками (теперь добавим к ним еще фокусы f_1 и f_2, если они лежат в бильярде) символом $\lambda_{b,t}$. Дополнительно пометим сегменты граничных дуг $\lambda_{i,t}$ символом "+", если сегмент является частью границы бильярда Ω, и символом "−", если сегмент $\lambda_{i,t}$ является границей между элементарными бильярдами разбиения, но не является сегментом границы объемлющего бильярда Ω.

Шаг 2. Рассмотрим граничную дугу h_i или e_i. На этом шаге построим для нее граф границы $\pi^{-1}(h_i)$ или $\pi^{-1}(e_i)$. Каждой черной точке $b_l^i \in B_i$ соответствует одна вершина графа b_l^i. Красной точке $r_l^i \in R_i$ соответствуют две вершины графа $\pi^{-1}(\lambda_i)$, обозначаемые $r_l^{i,u}, r_l^{i,d}$ (всего $2n_i^r$ вершин графа для множества R_i). Каждой белой точке $w_l^i \in W_i$ соответствуют две вершины графа $\pi^{-1}(e_i)$, обозначаемые $w_l^{i,r}, w_l^{i,l}$ (всего $2n_i^w$ вершин графа). Каждой желтой $y_1^i \in Y_i$ соответствуют по четыре вершины в графе $\pi^{-1}(\lambda_i)$: $y_l^{i,v}, v = 1, \dots, 4$ (всего $4n_i^y$ вершин для множества Y_i). Каждому сегменту граничной гиперболы $h_{i,t}^+$ будут соответствовать два ребра графа $h_{i,t}^\uparrow, h_{i,t}^\downarrow \in \pi^{-1}(\lambda_i)$, каждому эллиптичному граничному сегменту $e_{i,t}^+$ — ребра $e_{i,t}^\rightarrow, e_{i,t}^\leftarrow$. Граничному сегменту $\lambda_{i,t}^-$ соответствуют четыре ребра $\lambda_{i,t}^v \in \pi^{-1}(\lambda_i)$. Теперь расставим на ребрах $h_{i,t}^v$ $(v = 1, 2, 3, 4, \uparrow, \downarrow)$ и $e_{i,t}^u$ $(u = 1, 2, 3, 4, \leftarrow, \rightarrow)$ графа $\pi^{-1}(\lambda_i)$ буквы по таблицам на рис. 1 для ребер $\lambda_{i,t}^v$, помеченных символом "+", и на рис. 2 — для ребер, помеченных символом "−". Повторим шаг 2 для всех значений $i \in 1, \dots, n_h + n_e$ и для всех значений $t \in 1, \dots, n_i^w + n_i^b + n_i^w + n_i^y$.

Шаг 3. Рассмотрим четыре двумерных диска $I \times I$ для каждого элемента полного разбиения Ω_j. Назовем их ${\Omega_j}^1, \dots, {\Omega_j}^4$. Будем помечать их границы буквами $h_{i,t}^v$ $(v = 1, 2, 3, 4, \uparrow, \downarrow)$ и $e_{i,t}^u$ $(u = 1, 2, 3, 4, \leftarrow, \rightarrow)$ по следующему правилу. Пусть элементарный бильярд Ω_j представляет собой четырехугольник из сегментов эллипсов и гипербол и ограничен сегментами граничных квадрик $h_{i_1,t_1}^{+,-}$, $h_{i_2,t_2}^{+,-}$, $e_{i_3,t_3}^{+,-}$, $e_{i_4,t_4}^{+,-}$ (где некоторые помечены символом "−", а некоторые — символом "+"). Последовательно рассмотрим все границы бильярда Ω_j. Если сегмент границы h_{i_1,t_1}^+ (помеченный знаком "+") гиперболический, то поставим на одной из границ диска Ω_j^1 и диска Ω_j^4 букву $h_{i,t}^\uparrow$, а на одной из границ дисков Ω_j^2 и Ω_j^3 — букву $h_{i,t}^\downarrow$. Если сегмент границы h_{i_1,t_1}^+ (помеченный знаком "+") эллиптический, то поставим на одной из границ диска Ω_j^1 и диска Ω_j^2 букву $e_{i,t}^\rightarrow$, а на одной из границ дисков Ω_j^3 и Ω_j^4 — букву $e_{i,t}^\leftarrow$. Если гиперболический или эллиптический сегмент границы $\lambda_{i,t}^-$ помечен символом "−", то поставим на соответствующих границах цилиндров Ω_j^v буквы $\lambda_{i,t}^v$, где $v = 1, 2, 3, 4$. Если элементарный бильярд Ω_j ограничен не содержащим фокусов сегментом фокальной прямой $\lambda_{b,t}^{+,-}$, то пометим соответствующую ему границу аналогично случаю эллиптического сегмента. После предыдущего шага непомеченными могли остаться только диски, соответствующие элементарным бильярдам Ω_j, эквивалентным либо A_2' (половине эллипса, разрезанного вдоль фокальной прямой), либо A_1' (четверти эллипса с фокусом). В таких элементарных бильярдах Ω_j участкам фокальной прямой левее левого фокуса $\lambda_{b,t_1}^{+,-}$ и правее правого $\lambda_{b,t_2}^{+,-}$ будут соответствовать свои стороны дисков Ω_j^v. Стороны, соответствующие настоящим эллиптическим границам $e_{i,t}^{+,-}$, гиперболическим $h_{i,t}^{+,-}$ и участкам фокальной прямой между фокусами

$\lambda_{b,t}^{+,-}$, пометим аналогично случаю четырехугольника. Теперь рассмотрим участок вырожденной гиперболы $\lambda_{b,t_1}^{+,-}$. Если он помечен символом "+", то пометим соответствующие ему стороны Ω_j^v аналогично случаю безфокусного сегмента фокальной прямой. Если сегмент λ_{b,t_1}^{-} помечен символом "−" и разделяет элементарные бильярды Ω_j и $\Omega_{j'}$, то поставим на свободной стороне дисков Ω_j^v и $\Omega_{j'}^v$ буквы λ_{b,t_1}^u ($u = 1,2,3,4$): λ_{b,t_1}^1 на $\Omega_{j'}^1$ и Ω_j^3; λ_{b,t_1}^2 на Ω_j^2 и $\Omega_{j'}^4$; λ_{b,t_1}^3 на $\Omega_{j'}^1$ и Ω_j^4; λ_{b,t_1}^4 на $\Omega_{j'}^2$ и Ω_j^3.

Шаг 4. Выкалываем черные точки графов $\pi^{-1}(\lambda_i)$, соответствующие особым точкам а Ω. Приклеиваем диски Ω_j^v для всех значений $j \in 1,\ldots,N'$ к графам гиперболических границ $\pi^{-1}(\lambda_i)$ по всем одинаковым буквам.

Продолжим доказательство теоремы 3. Выберем полное разбиение $\Omega_1,\ldots,\Omega_{N'}$ и выполним первый шаг алгоритма, разбив граничные дуги всех гипербол, эллипсов и фокальной прямой на сегменты $\lambda_{i,t}$. Теперь выберем заполнение области софокусными квадриками семейства следующим образом: заполним софокусными эллипсами однородно-эллиптические элементарные бильярды Ω_j и гиперболами — однородно-гиперболические. Оснастим их векторами скорости аналогично теореме 2 и обозначим через E_λ^u (где $u = 1,2,3,4$) оснащенные векторами эллипсы, а через H_λ^v (где $v = 1,2,3,4$) — оснащенные гиперболы.

Доказательство того, что на шаге 2 строятся графы границ $\pi^{-1}(\lambda_i)$, проводится аналогично теореме 1 с уточнением, что теперь склейка происходит на всех сегментах границ Ω и $\Omega_1,\ldots,\Omega_{N'}$. Также в силу способа выбора полного разбиения $\Omega_1,\ldots,\Omega_{N'}$ существуют точки пересечения граничных дуг квадрик внутри бильярда Ω. Такие точки в алгоритме называются белыми, и в них не происходит склейки по бильярдному закону.

Теперь перейдем к шагу 3. Рассмотрим элементарный бильярд Ω_j, представляющий собой четырехугольник из сегментов эллипсов и гипербол и ограниченный сегментами граничных квадрик $h_{i_1,t_1}^{+,-}$, $h_{i_2,t_2}^{+,-}$, $e_{i_3,t_3}^{+,-}$, $e_{i_4,t_4}^{+,-}$ (где некоторые помечены символом "−", а некоторые — символом "+"). Тогда если бильярд Ω_j однородно-гиперболический, то для любого v семейству оснащенных гипербол $H_{\Omega_j}^v = \{H_\lambda^v | \lambda \in (i_1,i_2)\}$ соответствует (прообраз при естественной проекции) квадрат $I \times I$ в многообразии Q^3. Аналогично для семейств оснащенных эллипсов $E_{\Omega_j}^u = \{E_\lambda^u | \lambda \in (i_3,i_4)\}$. На помеченных "+" границах бильярда Ω_j происходит склейка по бильярдному закону отражения, а на границах, помеченных символом "−", склейки не происходит. Для элементарных бильярдов полного разбиения Ω_j, содержащих фокусы, доказательство полностью аналогично соответствующему случаю в теореме 1.

Автор приносит благодарность А.Т. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, В.В. Ведюшкиной — за многочисленные ценные обсуждения.

Исследование выполнено в рамках Программы Президента РФ "Ведущие научные школы РФ" (грант НШ-6399.2018.1, соглашение №075-02-2018-867).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Табачников С. Л.* Геометрия и бильярды. М.; Ижевск: НИЦ "РХД", 2011.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. Ижевск: НИЦ "РХД", 1999.

3. *Dragovic V., Radnovic M.* Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regullar Chaotic Dyn. РАН. 2009. **14**. 479—494.

4. *Драгович В., Раднович М.* Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.; Ижевск: НИЦ "РХД", 2010.

5. *Dragovic V., Radnovic M.* Pseudo-integrable billiards and arithmetic dynamics // Modern Dynamics. 2014. **8**, N1, 109—132.

6. *Dragovic V., Radnovic M.* Pseudo-integrable billiards and double-reflection nets // Russ. Math. Surveys. 2015. **70**, N1, 1—31.

7. *Dragovic V., Radnovic M.* Periods of pseudo-integrable billiards // Arnold Math. 2015. **1**, N1. 69—73.

8. *Bolsinov A.V., Fomenko A.T., Oshemkov A.A.* Topological Methods in the Theory of Integrable Hamiltonian. Cam-

bridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006.

9. *Кудрявцева Е.А., Никонов И.М., Фоменко А.Т.* Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия //Матем. сб. 2008. **199**, №9. 3—96.

10. *Кудрявцева Е.А., Никонов И.М., Фоменко А.Т.* Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники // Современные проблемы математики и механики. Т. 3. Математика. Вып. 2. Геометрия и топология // Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2009. 58—97.

11. *Кудрявцева Е.А., Фоменко А.Т.* Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. РАН. Сер. матем. 2012. **446**, №6. 615—617.

12. *Кудрявцева Е.А., Фоменко А.Т.* Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты ("атома"-бифуркации) // Вестн. Моск.ун-та. Матем. Механ. 2013. №3. 21—29.

13. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Докл. РАН. Сер. матем. 2015. **465**, №2. 150—153. (Integrable Billiards Model Important Integrable Cases of Rigid Body Dynamics // Doklady Mathematics. 2015. **92**, N 3. 1—3. Pleiades Publishing, Ltd., 2015).

14. *Fokicheva V., Fomenko T.* Billiard Systems as the Models for the Rigid Body Dynamics // Studies in Systems, Decision and Control. Advances in Dynamical Systems and Control. Vol.69. Ed. by V. Sadovnichiy, M. Zgurovsky. Springer; International Publishing Switzerland, 2016. 13—32.

15. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы //Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, №4. 20—67.

16. *Кудрявцева Е.А.* Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками// Докл. РАН. 2012. **445**, №4. 383—385.

17. *Фокичева В. В.* Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// Матем. сб. 2015. **206**, №10. 127–176.

Поступила в редакцию
19.06.2019

1. Таблицы графов границ для сегментов $\lambda_{i,t}$, помеченных знаком "+": таблица *а* соответствует эллиптическим сегментам границ, *б* — гиперболическим

2. Таблица графов границ для сегментов $\lambda_{i,t}$, помеченных знаком "$-$"

3. Пример к шагу 1

4. Пример к шагам 2 *а* и 3 *б*

5. Пример к шагу 5. Двумерный особый слой G трехмерного атома M бильярда, изображенного на рис. 3