БИЛЛИАРДЫ С ПОТЕНЦИАЛОМ МОДЕЛИРУЮТ РЯД ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

В.А. Кибкало
slava.kibkalo@gmail.com

УДК 517.938.5

Будет показано, что комбинация двух обобщений классического интегрируемого биллиарда в эллипсе позволяет локально промоделировать слоение Лиувилля гладких интегрируемых систем в четырехмерной окрестности критических точек ранга 0 типов центр-центр, центр-седло и седло-седло. Для каждой особенности типа центр-седло алгоритмически построена подходящая биллиардная книжка с потенциалом, полулокально моделирующая слоение этой особенности.

Ключевые слова: математика, гамильтоновы системы, особенности, интегрируемые биллиарды, топологическая эквивалентность

Billiad with a potential can model some classes of 4-dimensional singularities of integrable systems

We show that combination of two different generalizations of the classical elliptic billiard system helps to model *locally* Liouville foliations of smooth integrable Hamiltonian systems in a 4-dimensional neighbourhood of a singular point of the center-center, center-saddle or saddle-saddle types. For any singularity of center-saddle type we construct an appropriate billiard system that *semi-locally* models this singularity.

Keywords: mathematics, Hamiltonian systems, singularities, integrable billiards, topological equivalence

1. В изучении топологии, динамики и особенностей интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС) с двумя степенями свободы на гладких многообразиях в последние десятилетия был достигнут значительный прогресс. В работах А.Т. Фоменко и его школы (подробно описанных в [1]) были, в том числе, построены инварианты (молекулы с оснащениями), классифицирующие их слоения на неособых трехмерных изоэнергетических многообразиях с точностью до лиувиллевой (послойной диффеоморфности) и траекторной эквивалентности, классифицированы слоения Лиувилля в окрестности слоя с невырожденными точками падения ранга отображения момента.

В последние годы активно исследовались системы интегрируемых биллиардов, ограниченных дугами софокусными квадриками семейства (1).

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}=1. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Ведущие научные школы" (грант НШ-6399.2018.1 соглашение № 075-02-2018-867).

Кибкало Владислав Александрович, м.н.с., аспирант МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Kibkalo Vladislav (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Фазовые многообразия таких систем и их обобщений (топологических биллиардов [2], биллиардных книжек [3], [4] или биллиарда в эллипсе с упругим потенциалом, описанного в [5]) вообще говоря, кусочно-гладкие.

При этом топологические перестройки слоев и особые периодические траектории биллиарда оказываются "хорошо видны" в проекции на биллиардн стол, т.е. их топология и динамика нагляднее, чем у систем механики.

2. А.Т. Фоменко был поставлен вопрос о моделировании топологии слоения Лиувилля и динамики гладких интегрируемых систем с помощью биллиардов и их обобщений. В докладе обсуждается топологическое моделирование, т.е. построение биллиардов со слоением, послойно гомеоморфным искомому слоению гладкой системы. Роль гамильтонова поля на критическом множестве играет вектор скорости на особом множестве биллиарда.

Особым множеством интегрируемого биллиарда назовем множество *особых точек* — точек фазового пространства, в которых слой (связная компонента совместного уровня энергии и интеграла) не является двумерной поверхностью (т.е. падает его размерность, или нет локальной гомеоморфности диску). *Особым слоем*, назовем слой, содержащий особые точки.

Под *локальным* и *полулокальным* слоением понимаем класс послойно гомеоморфных слоений в окрестности, соответственно, выбранной особой точки или содержащего ее особого слоя (во втором случае она обязана все близкие к нему слои целиком). Отметим, что в обоих случаях значения энергии и интеграла во всех точках моделируемого множества близки, и множество пар значений открыто в $\mathbb{R}^2$.

Для каждой трехмерной невырожденной особенности ранга 1 (боттовского 3-атома гладкой ИГС, [1]), алгоритмически построена [3], [4] *биллиардая книжка* (локально-плоский стол, склеенный из нескольких плоских биллиардов по некоторым общим граничным дугам, на которых стоят перестановки), слоени которой на любом неособом трехмерном уровне энергии имеет один седловой слой и послойно гомеоморфно искомому атому. Т.е. трехмерные слоения ранга 1 полулокально моделируются биллиардами.

Ряд новых результатов и актуальных вопросов об интегрируемых биллиардах кратко описан в недавнем обзоре В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко, посвященном восьмидесятилетию академика В.А. Садовничего. В числе был вопрос о возможности моделировать слоения особенностей ранга 0.

3. В докладе рассмотрим следующий класс *существенно четырехмерных* особенностей $V^4 \subset M^4$: такое множество должно

- являться кусочно-гладким многообразием со слоением Лиувилля,
- являться открытым объединением слоев этого слоения,
- иметь значения первых интегралов, близкие на всех этих слоях,
- состоять из слоев, гомеоморфных или тору T^2, или особому слою 3-атома, или слою с невырожденной особой точкой ранга 0,
- не является произведением 3-атома на интервал.

Замечание 1. В такой особенности биллиарда может и не быть слоев, гомеоморфным слоям с точками ранга 0 — все ее слои будут гомеоморфны торам или особым слоям боттовских 3-атомов, см. раздел 4.

Замечание 2. Определение выше допускает не боттовские 3-атомы.

Склеим по границе два элементарных стола — одинаковые области, ограниченные эллипсом ("одна над другой"). На полученном столе $\delta_\alpha(2A_2)$ (см. [2]) введем отталкивающий потенциал. Система будет интегрируема. Кривые бифуркационной диаграммы этой системы имеют точки пересечения (особые пары значений двух интегралов), с теми же круговыми молекулами, как особенности центр-центр, центр-седло, седло-седло гладких систем.

Слой этого биллиарда в прообразе такой точки пересечения гомеоморфен особому слою особенностей центр-центр, центр-седло типа $A \times C_2$ и седло-седло типа $B \times C_2$, т.е. точке, особому графу атома C_2 или его произведению на восьмерку соответственно. "Особые" точки этого слоя соответствуют равновесиям геодезического потока с потенциалом на эллипсоиде.

Теорема 1. Существенно четырехмерные особенности биллиарда с отталкивающим упругим потенциалом $V = -(x^2 + y^2)$ на столе $\delta_\alpha(2A_2)$ *полулокально* топологически моделирует особенности ранга 0 типов центр-центр, центр-седло типа $A \times C_2$ и седло-седло типа $B \times C_2$.

Следствие. Системой биллиарда можно *локально* топологически промоделировать особенности центр-центр, центр-седло и седло-седло, т.е. в окрестности невырожденной точки ранга 0 соответствующего типа.

Для *полулокального* моделирования особенностей типа центр-седло $A \times X$ (см. [1]), седловой атом которой имеет n особых точек, склеим биллиардную книжку из $2n$ экземпляров области A'_0. Границами области являются дуги эллипса, его положительных полуосей эллипса и некоторой гиперболы. Склейки областей выполнены на дугах гиперболы и малой полуоси.

Теорема 2. Биллиард с отталкивающим потенциалом на книжке, построенной для произвольного седлового атома X аналогично алгоритму [4], имеет существенно четырехмерную особенность, *полулокально* топологически моделирующую особенность центр-седло типа $A \times X$ гладкой системы.

4. Заметим, что особая точка бифуркационной диаграммы биллиарда в кольце между двумя эллипсами (изучавшегося С.Е. Пустовойтовым) имеет прообраз, гомеоморфный особому слою 3-атомов P_4 или K_2 (из [1]). Близкий уровень энергии Q^3 имеет слоение с двумя особыми уровнями интеграла: на меньшем реализуется 3-атом C_2, на большем — два 3-атома B. Тем самым, в биллиардах реализуются существенно четырехмерные особенности, все слои которой, тем не менее, гомеоморфны тору T^2, или особому слою некоторых 3-атомов. Отметим, что атомы P_4 и K_2 допускают расщепления: P_4 на C_2 и $2B$, а K_2 — в том числе на C_2 и C_2, или $2B$ и $2B$. Они реализуются в прообразах прямых, лежащих внутри одной из двух пар вертикальных углов, образованных бифуркационными кривыми. Будет интересно изучить свойства таких "расщеплений" 3-атомов, которые могут реализовываться биллиардными книжками.

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: "Удмуртский университет 1999.

2. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// Матем. Сб. , **206**:10 (2015), 127-176.

3. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С.* Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами// Доклады АН, **479**:6 (2018), 607-610.

4. *Ведюшкина В.В., Харчева И.С.* Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. Сб. , **209**:12 (2018), 17-56.

5. *Kozlov V.V.* Some integrable generalizations of the Jacobi problem on geodesics on an ellipsoid // J. Appl. Mech., **59**:1 (1995).

6. *Кобцев И.Ф.* Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., **73**:2 (2018), 64-70.

ГЛАДКАЯ ВЕРСИЯ ПРОБЛЕМЫ ДЖОНСОНА О ДЕРИВАЦИЯХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА ГРУППОВЫХ АЛГЕБР

А.С. Мищенко

asmish-prof@yandex.ru

УДК 517.986.3, 514.169, 512.544.42

Алгебра внешних дериваций групповой алгебры конечно представимой группы дается в терминах одномерных когомологий с компактными носителями комплекса Кэли группоида присоединенного действия исходной группы. Это описание представляет собой гладкую версию проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр. Когомологии Хохшильда как обобщения внешних дериваций тоже описываются в терминах когомологий другого пространства – классифицирующего пространства того же группоида. Приводится также описание когомологий Хохшильда с коэффициентами в бимодуле геометрического типа над групповой алгеброй.

Ключевые слова: математика, групповые алгебры, деривации, когомологии Хохшильда, группоиды

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00398).

Мищенко Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Akeksandr Mishchenko (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)