УДК 517.938.5

Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли

В. А. Кибкало [1]

Показано, что слоения Лиувилля семейства неевклидовых аналогов интегрируемой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли имеет как компактные, так и некомпактные слои. Также имеется перестройка их компактного совместного уровня в некомпактный, имеющая некомпактный особый слой. В частности, это верно для $e(2,1)$-аналога системы Ковалевской. В случае ненулевой постоянной площадей доказан критерий наличия некомпактной компоненты поверхности уровня первых интегралов и функций Казимира.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, твердое тело, алгебра Ли, слоение Лиувилля, компактность.

Shown that Liouville foliations of the family on non-Euclidean analogs of Kovalevskaya integrable system on pencil of Lie algebras have both compact and non-comcact fibers. Also a bifurcation of a their compact common level surface into a noncompact one exists and has a noncompact singular fiber. Particularly it is true for the non-Euclidean $e(2,1)$-analog of the Kovalevskaya case of rigid body dynamics. For the case of nonzero area integral we prove an effective criterion of existence of a noncompact component of common level surface of first integrals and Casimir functions.

Key words: Hamiltonian system, integrability, rigid body, Lie algebra, Liouville foliation, compactness.

Обсуждается аналог известной интегрируемой системы Ковалевской и ее обобщения И.В. Комаровым, (см. [1]) на пучок $so(3,1) - e(3) - so(4)$ алгебр Ли с параметром $\varkappa \in \mathbb{R}$. Их скобки Ли-Пуассона на $\mathbb{R}^6(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ имеют вид (ε_{ijk} есть знак перестановки $(ijk) \longrightarrow (123)$)

$$\{\hat{J}_i, \hat{J}_j\} = \varepsilon_{ijk}\hat{J}_k, \qquad \{\hat{J}_i, \hat{x}_j\} = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_k, \qquad \{\hat{x}_i, \hat{x}_j\} = \varepsilon_{ijk}\varkappa\hat{J}_k. \tag{1}$$

Для этих систем были найдены [2-4] бифуркационные диаграммы и перестройки-атомы торов Лиувилля, а в [5-8] вычислены тонкие топологические инварианты Фоменко-Цишанга ([9-10]).

В работе А.В.Борисова и И.С. Мамаева [11] описан аналог задачи Ковалевской (и других случаев интегрируемости: Эйлера, Лагранжа, Горячева–Чаплыгина, Гесса) динамики твердого тела в пространстве постоянной отрицательной кривизны (плоскости Лобачевского). Комплексное преобразование $\hat{J}_j = i \cdot J_j \,/\, k, \hat{x}_j = i \cdot x_j \,/\, k,\ j = 1,2,3$ переводит семейство систем Ковалевской (1) на пучке $so(3,1) - e(3) - so(4)$ в новое. Алгебре Ли $e(3)$ (т.е. случаю $\varkappa = 0$) соответствует алгебра Ли $e(2,1)$. Остальные алгебры Ли заданы структурными константами их скобок Пуассона. Разделение переменных, аналогичное Кеттеру, для новой задачи при $\varkappa = 0$ построено С.В. Соколовым в [12].

Функции Казимира (геометрический интеграл f_1 и интеграл площадей f_2), гамильтониан H и первый интеграл F нового семейства систем Ковалевской в координатах $J_1, \ldots, x_3$ имеют вид

$$f_1 \;=\; x_1^2 + x_2^2 - k^2x_3^2 + \varkappa x_1^2 + \varkappa x_2^2 - \varkappa k^2 x_3^2 \;=\; a,$$

$$f_2 \;=\; x_1J_1 + x_2J_2 - k^2x_3J_3 \;=\; b,$$

[1] *Кибкало Владислав Александрович* — аспирант каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

$$H = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 - 2k^2 J_3^2) - c_1 x_1 \ = \ h,$$

$$F = \frac{1}{4}(J_1^2 - J_2^2 + 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + \frac{1}{4}(2J_1 J_2 + 2c_1 x_2)^2 \ = \ f.$$

Топология фазового пространства, расслоенного на совместные уровни интегралов и поведение траекторий таких систем может быть устроено весьма необычно. Так, для неевклидового случая Эйлера (свободного движения тела по некоторого пространству отрицательной кривизны) свойство траектории быть ограниченной (на 2-торе) или неограниченной определяется знаком $J_1^2 + J_2^2 - 2k^2 J_3 = \langle \vec{J}, \vec{J} \rangle_g$ относительно 2-формы $\operatorname{diag}(1, 1, -k^2)$.

Интересно проверить, содержат ли системы Ковалевской на новом пучке некомпактные слои и их бифуркации. Системы с такими слоениями активно изучаются, и в работе [13] приведен широкий список таких особенностей, обнаруженных в интегрируемых системах механики и геометрии. В [14] были классифицированы слоения Лиувилля биллиардных систем с неограниченными столами. Их особенности эквивалентны некомпактным боттовским атомам-бифуркациям. В работе [15] предложена классификация некомпактных особенностей в достаточно широкой общности.

Другой класс таких особенностей включает перестройку компактного слоя в некомпактный без падения ранга отображения момента [13]. Нами показано, что некомпактные слои системы Ковалевской возникают похожим образом (Теорема 3). Отметим, что изучать такие особенности вычислительным путем весьма непросто.

В настоящей работе доказана связь некомпактности совместного уровня первых интегралов (слоя или несвязного объединения слоев) с падением степени некоторого полинома с переменными коэффициентами (которые непрерывны ограничены). Каждая точка слоя соответствует корню этого полинома, а неограниченность корня при малом изменении коэффициентов (из теоремы Виета) возможна лишь при обращении в нуль старшего коэффициента многочлена. Вопросы полноты потоков и функциональной независимости первых интегралов мы не рассматриваем.

1. Параметризация совместного уровня $T_{a,b,h,f} = \{y \in \mathbb{R}^6 \,|\, f_1 = a, f_2 = b, H = h, F = f\}$**.** Компактность множества $T_{a,b,h,f}$ равносильна его ограниченности: оно замкнуто как заданное системой полиномиальных уравнений. Из вида H, f_1 функции J_3^2 и x_3^2 выражаются через J_1, J_2, x_1, x_2.

Замена координат $\xi_1 = J_1^2 - J_2^2 + 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2$ и $\xi_2 = 2J_1 J_2 + 2c_1 x_2$ биективна и линейна по переменным x_i, ξ_i. Здесь $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4F := \tilde{f}^2$, т.е. используется специальный вид интеграла F. Теперь перейдем к полярным координатам f, α, r, β с особенностями при $r = 0$ или $\tilde{f} = 0$:

$$\xi_1 = \tilde{f}\cos(\alpha), \qquad \xi_2 = \tilde{f}\sin(\alpha), \qquad J_1 = r\cos(\beta), \qquad J_2 = r\sin(\beta).$$

Рассмотрим $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и множество $V = A(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^+(r)/\sim$ с эквивалентностью

$$(0, \beta, r) \sim (2\pi, \beta, r), \quad (\alpha, 0, r) \sim (\alpha, 2\pi, r), \qquad (\alpha, \beta_1, 0) \sim (\alpha, \beta_2, 0). \qquad \text{для } \forall\, \alpha, \beta, \beta_i \in [0,\, 2\pi].$$

Множество точек $x \in V : r(x) > 0$ есть произведение 2-тора на открытый луч. Примем $f \neq 0$.

Перепишем f_1, f_2, H в новых координатах. Из вида H получаем: $J_1^2 - k^2 J_3^2 = h + (\xi_1 - \varkappa c_1^2)/2$, и подставляем выражение в f_1). Выразим J_3^2 и x_3^2 из H, f_1 соответственно:

$$k^2 J_3^2(\alpha, \beta, r) = -h + (c_1^2 \varkappa)/2 - 1/2\tilde{f}\cos\alpha + r^2(\cos\beta)^2, \qquad (2)$$

$$4c_1^2 k^2 x_3^2(\alpha, \beta, r) = r^4 + 2(\varkappa c_1^2 - \tilde{f}\cos(\alpha - 2\beta))r^2 + (-4ac_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa c_1^2 h - \varkappa^2 c1^4). \qquad (3)$$

Уравнение $-b + x_1 J_1 + x_2 J_2 = k^2 x_3 J_3$ интеграла площадей возведем в квадрат, получим полином $P(r) = \sum_{j=0}^{4} g_j(\alpha, \beta) r^j$ степени 4 по r. Его коэффициенты ограничены на A и непрерывно зависят от α, β, значений интегралов a, b, h, f на слое, параметра пучка $\varkappa$ и констант c_1, k:

$$P(r) \ \ : \quad g_4(\alpha, \beta) r^4 + g_3(\alpha, \beta) r^3 + g_2(\alpha, \beta) r^2 + g_1(\alpha, \beta) r + g_0(\alpha, \beta) = 0, \qquad (4)$$

$g_4 = 2h - \varkappa c_1^2 + \tilde{f}\cos(\alpha - 4\beta)$, $\quad g_3 = b\cos(\beta)$ $\quad g_2 = 4ac_1^2 - 4\tilde{f}h\,\cos(\alpha - 2\beta) + 2(2ac_1^2 - \tilde{f}^2 - 2\varkappa c_1^2 h + \varkappa^2 c_1^4)\cos(2\beta)$,

$g_1 = b \cdot 8c_1(-\tilde{f}\cos(\alpha - \beta) + \varkappa c_1^2\cos(\beta))$, $\qquad g_0 = 8b^2 c_1^2 + (2h - \varkappa c_1^2 + \tilde{f}\cos(\alpha))\,(-4ac_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa c_1^2 h - \varkappa^2 c_1^4)$.

Пусть $S \subset V$ есть поверхность корней $P(r)$. При $f \neq 0$ определена проекция $\pi : T_{a,b,h,f} \longrightarrow S$.

Лемма 1. $\pi^{-1}(x) = \oslash$ ровно в тех $x \in S$, в которых $J_3^2(x) < 0$ или $x_3^2(x) < 0$ (формулы (4-5)). Прообраз x состоит из одной точки, если $x_3(x) = J_3(x) = 0$. Прообраз остальных точек состоит из двух точек, причем если $x_3(x) \cdot J_3(x) \neq 0$, то он является одной из следующих пар точек

$$(+\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)}),\ (-\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)}) \quad \text{либо} \quad (-\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)}),\ (+\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)}).$$

Доказательство. Пусть $rf \neq 0$. Тогда точки $\mathbb{R}^6(\vec{x}, \vec{J})$ из прообраза точки $x \in S$ заведомо лежат в множестве $F = f$. Возведение в квадрат уравнения для f_2 добавляет новые решения, для которых знак $x_3 J_3$ и знак правой части отличаются (так, при $x_3 J_3 = 0$ переход равносилен). В равенствах (2), (3) выражаются квадраты $J_3(x), x_3(x)$, т.е. выбор знаков дает ровно 4 варианта при $x_3 J_3 \neq 0$. Переход в f_2 неравносилен, и требуется выбрать одну из пар точек с одинаковым знаком $x_3 \cdot J_3$. □

2. Достаточное условие компактности связного слоя на уровне $T_{a,b,h,f}$

Лемма 2. Какая-либо из шести координат $x_1, \ldots, J_3$ неограничена на поверхности уровня $T_{a,b,h,k}$ первых интегралов тогда и только тогда, когда на ее образе в S неограничена $r^2 = J_1^2 + J_2^2$.

Доказательство. Переменные x_1, x_2 и квадраты x_3^2, J_3^2 выражаются как полиномы от J_1, J_2, от ограниченных по модулю (значением $\tilde{f}$) на 2-слое ξ_1, ξ_2 и от некоторых постоянных системы. □

Аналогично, множество $r = 0$ всегда компактно в $T_{a,b,h,f}$: подставим $J_1 = J_2 = 0$ в f_1, f_2, H, F.

Заметим: корни многочлена со старшим коэффициентом 1 непрерывно зависят от его коэффициентов. Если последние непрерывны на компакте, то все корни всех таких полиномов ограничены в совокупности. Т.е. лишь обращение в ноль где-то на A старшего коэффициента $g_4(\alpha, \beta)$ может дать неограниченную поверхность S и, возможно, неограниченный уровень $T_{a,b,h,k}$.

Теорема 1. (достаточное условие компактности связной компоненты уровня интегралов).

Пусть для $H = h, F = f, \varkappa$ выполнено $(2h - \varkappa c_1^2)^2 > 4f$. Тогда для неевкилидовой системы Ковалевской со значением параметра $\varkappa$ пучка скобок Пуассона и любых значений функций Казимира $f_1 = a, f_2 = b$ — совместная поверхность уровня интегралов $T_{a,b,h,f}$ будет компактна.

Доказательство. Старший коэффициент $P(r)$ в (4) равен $g_4(\alpha, \beta) = 2h - \varkappa c_1^2 + \tilde{f}\cos(\alpha - 4\beta)$. В случае $f \neq 0$ он отделен от нуля на торе A в том и только том случае, когда не имеет корней уравнение $\cos(\gamma) = (2h - \varkappa c_1^2)/\tilde{f}$. В случае $f = 0$ коэффициент постоянен на уровне $T_{a,b,h,f}$.

При выполнении условия теоремы поделим P на g_4, получим многочлен с непрерывными коэффициентами, ограниченными по модулю $M > 0$ на всем торе A. Тогда все корни многочленов $P|_{\alpha,\beta}(r)$ (т.е. тройки $(\alpha, \beta, r) \in S$) ограничены по модулю, например, $|r| < 4 \cdot M^4$.

При любом $f \in \mathbb{R}$ из $(2h - \varkappa c_1^2)^2 > 4f$ следует ограниченность конечно-значной функции $r(\alpha, \beta)$ на торе A или $r(\beta)|_{f=0}$ на $S^1(\beta)$, т.е. компактность связных компонент уровня $T_{a,b,h,f}$. □

Заметим, если эта система окажется интегрируема по Лиувиллю, то эти слои будут 2-торами.

3. Критерий некомпактности совместного уровня $T_{a,b,h,f}$ первых интегралов.

Пусть далее $f > 0$, и условие $(2h - \varkappa c_1^2)^2 > 4f = \tilde{f}^2$ не выполнено. Вычислим нули g_4 на торе A:

Лемма 3. В случае $f > 0$ нули старшего коэффициента g_4 многочлена P на торе A лежат на кривой $\alpha = 4\beta$ при $2h - \varkappa c_1^2 = -\tilde{f}$, на кривой $\alpha = 4\beta + \pi$ при $2h - \varkappa c_1^2 = -\tilde{f}$ или на паре кривых $\alpha = 4\beta \pm \phi$ при $2h - \varkappa c_1^2 = -\tilde{f}$, где $\phi = \arccos((2h - \varkappa c_1^2)/\tilde{f})$ и $\phi \in (0, \pi)$.

Примем $b \neq 0$ (случай $b < 0$ аналогичен). Тогда, за исключением конечного числа точек, для всех точек кривой из леммы 6 (назовем такую кривую *кривой нулей*) степень многочлена P равна 3, т.е. нечетна и падает ровно на единицу. Исключенные точки имеют координату $\beta = \pi/2, 3\pi/2$.

Теорема 2. (критерий наличия некомпактной связной компоненты у поверхности уровня).

Пусть $b \neq 0$ и $-\tilde{f} \leqslant \varkappa c_1^2 - 2h \leqslant \tilde{f}$, где $F = f = \tilde{f}^2/4$. Тогда совместная поверхность уровня $T_{a,b,h,f}$ со значениями $(a, b, h, \tilde{f}^2/4)$ содержит как минимум одну неограниченную компоненту.

Доказательство. 1. При малом по модулю g_4 (в сравнении с остальными коэффициентами g_j) многочлен P имеет корень: избавляясь от бесконечно малых (в смысле $r \longrightarrow +\infty$ или $r \longrightarrow +\infty$) имеем $g_4 r - g_3 = 0$, т.е. "большой" один, и его знак определяется знаками g_4 и b. А именно, при $g_4 \cdot g_3 < 0$ знак корня положителен, т.е. ему соответствует точка в S с большим положительным r.

2. Рассмотрим на кривой нулей дýги, на которых $|b \cos\beta| > \delta$ и их ε-широкие трубчатые *проколотые* окрестности L_i (т.е. n дугам соответствует $2n$ односторонних тонких полосок).

Вдоль выбранной кривой нулей знак $\cos\beta$ меняется, а знак g_4 постоянен на каждой полосе, на которую тор разбивается кривыми нулей. Тогда в одной из связных компонент L_i знак корня r всегда положителен, а модуль ограничен снизу возрастающей к бесконечности функцией от ε.

Тем самым, мы построили в некоторой компоненте уровня $T_{a,b,h,f}$ двумерный диск, удаленный от начала координат $\mathbb{R}^6(\vec{J}, \vec{x})$ не менее чем на любое требуемое большое расстояние. $\square$

Следствие 1. Слои пограничного уровня $|2h - \varkappa c_1^2| = \tilde{f}$, которые некомпактны, имеют вблизи себя компактные слои уровней $|2h - \varkappa c_1^2| = (1+\varepsilon)\tilde{f}$. При $\varepsilon \longrightarrow +0$ расстояние от близкой точки слоя до нуля в $\mathbb{R}^6$ растет (аналогично: из уменьшения модуля g_4 и наличия $\cos\beta$ разных знаков).

Теорема 3. При $|2h - \varkappa c_1^2| = \tilde{f}$ и $f > 0$ в $Q_h^3 = \{f_1 = a, f_2 = b, H = h\}$ имеется перестройка компактного уровня в некомпактный уровень, и ее особый слой некомпактен.

Для определения типа гомеоморфности слоя и их количества будет полезно применить подход [3] к нахождению критического множества, и изучить особенности изучаемой системы при $\cos\beta = 0$. В случае $b = 0$ близкую задачу требуется решить для биквадратного уравнения $g_4r^4 + g_2r^2 + g_0$.

Численное построение (Wolfram Mathematica 12) поверхности S над квадратов A и проекции $T_{1,1,h,4}$ на нее для $h = 1.8, 2, 2.5$ и $k = c_1 = 1, \varkappa = 0$ хорошо иллюстрирует доказанные теоремы.

Благодарности. Автор благодарит своего научного руководителя А.Т. Фоменко за внимание к работе. Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”, конкурс “Стипендии Механико-математический факультет” для аспирантов, проект 18-2-6-51-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Комаров И.В.* Базис Ковалевской для атома водорода // ТМФ, 1981.**47**, №1 67–72.
2. *Харламов М.П.* Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и мех., 1983. **47**, №6. 922–930.
3. *Козлов И.К.* Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) // Матем. сб., 2014. **205**, №4. 79–120.
4. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Savushlin A.Yu.* Topological Atlas of the Kowalevski-Sokolov Top // Regular and Chaotic Dynamics, 2016.**21**,№1. 24–65.
5. *Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб., 2000.**191**,№2. 3–42.
6. *Kibkalo V.* Topological Analysis of the Liouville Foliation for the Kovalevskaya Integrable Case on the Lie Algebra so(4) // Lobachevskii J. Math., 2018.**39**,№9. 1396–1399.
7. *Кибкало В.А.* Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) // Матем. сб., 2019.**210**,№5. 3–40.
8. *Kibkalo V.* Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(3, 1) // Topol. and its Appl., 2020. (in press).
9. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. РАН, 1990.**54**,№3. 546–575.
10. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
11. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces // Rus. J. of Math. Phys., 2016.**23**,№4. 431–454.
12. *Соколов С.В.* Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // Труды МАИ, 2018.**100**, 1–13.
13. *Федосеев Д.А., Фоменко А.Т.* Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // Фунд. и прикл. матем., 2016.**21**,№6. 217–243.
14. *Ведюшкина В.В. Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем., (2017) **81**,№4. 20–67.
15. *Николаенко С.С.* Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. Сб., 2020.**211**,№2. 123–150.

Поступила в редакцию
27.02.2020