

УДК 517.938.5

Г. В. Белозеров

## Биллиард с потенциалом Гука, ограниченный трёхосным эллипсоидом

Рассматривается биллиард внутри трёхосного эллипсоида с потенциалом Гука. Такой биллиард являются интегрируемыми, имея три первых интеграла, инволютивных внутри эллипсоида. Найдены области возможного движения, построены бифуркационные диаграммы для случаев  $k > 0$  и  $k < 0$ , т.е. случаев притягивания и отталкивания. Найдены прообразы точек отображения момента, а также определены классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей, соответствующих неособым уровням энергии.

**Ключевые слова:** биллиард, интегрируемый биллиард, интегрируемая система, отображение момента, слоение Лиувилля

### § 1. Введение

Пусть  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  — гладкая замкнутая поверхность. Задача о движении материальной точки внутри этой поверхности с абсолютно упругим отражением от  $M^n$  называется математическим биллиардом. Интегрируемость плоского биллиарда в области, ограниченной эллипсом, отмечена в работе Дж. Д. Биркгофа [1].

Биллиарды внутри плоских областей, ограниченных дугами софокусных квадрик, являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности начали изучаться в работах В. Драговича, М. Раднович [2], [3], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [4], [5]. В. В. Ведюшкина классифицировала все элементарные (плоские) биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, а также области, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых [6] и произвольных [7]-[8] сегментов границ. Была определена эквивалентность биллиардных столов (см. также [9]), и для каждого из них были вычислены инварианты Фоменко (т.е. грубые молекулы) и Фоменко–Цишанга (меченые молекулы).

В работе Якоби [10] было отмечено, что геодезический поток на поверхности  $n$ -мерного эллипсоида является интегрируемой гамильтоновой системой. Также Якоби проинтегрировал более общую задачу, когда на точку действует упругая сила, центр которой совпадает с центром эллипсоида. Устремляя меньшую полуось эллипсоида к нулю, получим интегрируемость биллиарда с гуксовским потенциалом внутри эллипсоида меньшей размерности. Более того, оказывается, что биллиард с таким потенциалом будет интегрируемым для

---

Работа выполнена в МГУ имени М.В. Ломоносова при поддержке гранта РФ № 20-71-00155.

любого выпуклого бильярдного стола, граница которого состоит из конфокальных квадрик.

В работе В. В. Козлова [11] был найден дополнительный первый интеграл бильярда с гуковским потенциалом внутри эллипса. И. Ф. Кобцев в работе [12] изучил топологию слоений Лиувилля (в том числе, на неособых 3-уровнях энергии) для системы бильярда на поверхности трёхосного эллипсоида с потенциалом Гука на различных уровнях энергии с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Также он изучил топологию слоений Лиувилля (в том числе, на неособых 3-уровнях энергии) для системы бильярда внутри эллипса с потенциалом Гука на различных уровнях энергии с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

С. Е. Пустовойтов в работе [13] изучил топологию слоений Лиувилля (в том числе, на неособых 3-уровнях энергии) для системы бильярда с потенциалом Гука в кольце, ограниченном двумя софокусными эллипсами, на разных уровнях энергии.

Данная работа посвящена бильярду с гуковским потенциалом (как притягивающим, так и отталкивающим) внутри трёхосного эллипсоида. Она является непосредственным продолжением работы [14], в которой рассматривается бильярд без потенциала. Настоящая работа состоит из семи параграфов. Второй параграф посвящен постановке задачи, третий — нахождению дополнительных первых интегралов. В четвёртом параграфе, используя разделение переменных, нами был проинтегрирован бильярд в эллипсоиде с потенциалом Гука, а также найдены области возможного движения. В пятом параграфе мы перешли к новым первым интегралам, которые имеют наглядную геометрическую интерпретацию и удобны для построения бифуркационных диаграмм. Шестой параграф посвящен описанию слоения Лиувилля рассматриваемой нами задачи. Также в пятом параграфе приведены бифуркационные диаграммы для случаев  $k > 0$  и  $k < 0$ , т.е. случаев притягивания и отталкивания. Седьмой параграф посвящён описанию топологического типа изоэнергетических поверхностей в нашей задаче для каждого из двух возможных знаков  $k$ .

## § 2. Постановка задачи. Интеграл энергии и его запись в эллиптических координатах

Рассмотрим семейство конфокальных квадрик  $Q_\lambda$ , то есть семейство квадрик вида  $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1$ , где  $a > b > c > 0$  — фиксированные параметры, а  $\lambda$  — изменяемый параметр.

Мы будем рассматривать следующую динамическую систему: материальная точка (шар) единичной массы движется внутри эллипсоида  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$  под действием упругой силы коэффициента  $k$ , отражаясь от  $\mathcal{E}$  абсолютно упруго.

Если мы будем рассматривать задачу без отражения, то одним из первых интегралов будет полная механическая энергия:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Заметим, что при отражении точки от эллипсоида  $\mathcal{E}$ , меняется только направление вектора скорости, а его длина остается неизменной. Следовательно,  $H$  является первым интегралом нашей задачи.

Перепишем  $H$  в эллиптических координатах. Связь эллиптических и декартовых координат выражается следующей системой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a + b + c - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ (b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2 = -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + ab + bc + ca \\ bcx^2 + acy^2 + abz^2 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + abc \end{cases} \quad (2.1)$$

Нетрудными вычислениями можно показать, что эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)}{(b - a)(c - a)} \\ y^2 = \frac{(b - \lambda_1)(b - \lambda_2)(b - \lambda_3)}{(a - b)(c - b)} \\ z^2 = \frac{(c - \lambda_1)(c - \lambda_2)(c - \lambda_3)}{(b - c)(a - c)} \end{cases} \quad (2.2)$$

Из первого уравнения системы 2.1 находим выражение потенциальной энергии. С помощью системы 2.2 вычисляем компоненты метрического тензора в эллиптических координатах, а затем находим выражение кинетической энергии. Получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{8} \left( \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{\Delta_1} \dot{\lambda}_1^2 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\Delta_2} \dot{\lambda}_2^2 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{\Delta_3} \dot{\lambda}_3^2 \right) + \\ + \frac{k}{2}(a + b + c - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)), \end{aligned}$$

где  $\Delta_i = (a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)$ . В обобщенных импульсах эта формула переписывается так:

$$\begin{aligned} H = 2 \left( \frac{\Delta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} p_3^2 \right) + \\ + \frac{k}{2}(a + b + c - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

### § 3. Дополнительные первые интегралы

Сначала найдём дополнительные первые интегралы для случая  $k = 0$  (то есть на шар не действуют никакие силы). Из теоремы Якоби-Шаля следует, что для всякой траектории шара найдётся две конфокальные с эллипсоидом квадрики, которых касаются все прямые этой траектории. Параметры этих квадрик будут первыми интегралами. Найдём соотношение на эти параметры. Рассмотрим точку  $P = (x, y, z)$  и вектор  $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . Пусть прямая проходящая через точку  $P$  в направлении вектора  $v$  касается конфокальной с эллипсоидом

квадрики параметра  $\lambda$ . Тогда дискриминант квадратного относительно  $\tau$  уравнения:

$$\frac{(x + \tau\dot{x})^2}{a - \lambda} + \frac{(y + \tau\dot{y})^2}{b - \lambda} + \frac{(z + \tau\dot{z})^2}{c - \lambda} = 1$$

должен обратиться в ноль. Это эквивалентно тому, что:

$$\lambda^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \lambda((c + b)\dot{x}^2 + (a + c)\dot{y}^2 + (a + b)\dot{z}^2 - K_x^2 - K_y^2 - K_z^2) + (cb\dot{x}^2 + ac\dot{y}^2 + ab\dot{z}^2 - aK_x^2 - bK_y^2 - cK_z^2) = 0$$

где  $K_x, K_y, K_z$  – компоненты вектора кинетического момента.

Заметим, что коэффициент при старшей степени этого уравнения равен  $2H$ , то есть инвариантен. По теореме Якоби-Шаля инвариантны и корни этого уравнения. А значит, инвариантны коэффициент при  $\lambda$  и свободный коэффициент. Таким образом, имеем два первых интеграла:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{c + b}{2}\dot{x}^2 + \frac{a + c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a + b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) \\ I_2 = \frac{cb}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2) \end{cases}$$

Будем искать дополнительные первые интегралы  $F_1, F_2$  нашей задачи в виде:  $F_i = I_i + f_i$ , где функции  $f_i$  зависят только от пространственных переменных. Действительно, если мы найдём такие  $f_i$ , то так как они зависят только от пространственных переменных, а  $I_1, I_2$  – первые интегралы задачи без потенциала, то  $F_1, F_2$  – первые интегралы нашей задачи. Заметим, что вектор кинетического момента в задаче без отражения сохраняется, поэтому:

$$\dot{F}_1 = -k((c + b)x\dot{x} + (a + c)y\dot{y} + (a + b)z\dot{z}) + \partial_x f_1 \dot{x} + \partial_y f_1 \dot{y} + \partial_z f_1 \dot{z} = 0$$

$$\dot{F}_2 = -k(cbx\dot{x} + acy\dot{y} + abz\dot{z}) + \partial_x f_2 \dot{x} + \partial_y f_2 \dot{y} + \partial_z f_2 \dot{z} = 0$$

Отсюда находим, что  $f_1 = \frac{k}{2}((b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2)$ ,  $f_2 = \frac{k}{2}(bcx^2 + acy^2 + abz^2)$ . Таким образом, мы получили два дополнительных первых интеграла нашей задачи:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{c + b}{2}\dot{x}^2 + \frac{a + c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a + b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) + \\ \quad + \frac{k}{2}((b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2) \\ F_2 = \frac{cb}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2) + \frac{k}{2}(bcx^2 + acy^2 + abz^2) \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что  $F_1, F_2, H$  – функционально независимые попарно коммутирующие функции (относительно скобки Пуассона стандартной симплектической структуры на кокасательном расслоении к  $T^*\mathbb{R}^3$ ). Используя формулы замены 2.1 и 2.2, перейдём к эллиптическим координатам и сопряженным им импульсам. Тогда  $F_1$  и  $F_2$  переписуются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 2 \left( \frac{\Delta_1(\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} p_3^2 \right) + \\ \quad + \frac{k}{2} (ab + bc + ca - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3) \\ F_2 = 2 \left( \frac{\Delta_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} p_3^2 \right) + \\ \quad + \frac{k}{2} (abc - \lambda_1\lambda_2\lambda_3) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

#### § 4. Разделение переменных. Исследование областей возможного движения

Сперва докажем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Для всех  $i = 1, 2, 3$  верно следующее соотношение:*

$$F_2 - \lambda_i F_1 + \lambda_i^2 H = 2\Delta_i p_i^2 + \frac{k}{2} \Delta_i \quad (4.1)$$

**Доказательство.** Докажем для  $i = 1$ . В остальных случаях доказательство аналогичное. Рассмотрим сначала разность  $F_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)H$ . Из формул 2.3 и 3.1 получаем:

$$\begin{aligned} F_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)H &= -2 \left( \frac{\Delta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} p_1^2 + \frac{\Delta_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} p_2^2 \right) + \frac{k}{2} (a + b + c - \\ &\quad - (ab + bc + ca)(\lambda_2 + \lambda_1) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2) \end{aligned}$$

Аналогично, из формул 2.3 и 3.1 получаем:

$$\begin{aligned} F_2 - \lambda_1\lambda_2 H &= -2 \left( \frac{\lambda_2\Delta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} p_1^2 + \frac{\lambda_1\Delta_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} p_2^2 \right) + \frac{k}{2} (a + b + c - \\ &\quad - (ab + bc + ca)\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2) \end{aligned}$$

Из этих формул получаем:

$$F_2 - \lambda_1 F_1 + \lambda_1^2 H = (F_2 - \lambda_1\lambda_2 H) - \lambda_1 (F_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)H) = 2\Delta_1 p_1^2 + \frac{k}{2} \Delta_1$$

Что и требовалось.

Распишем часть уравнений Гамильтона:

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 4 \frac{\Delta_i}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} p_i \quad (4.2)$$

Выражая  $p_i$  из формулы 4.1 и подставляя его в 4.2, получаем следующие формулы:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{4}{\sqrt{2}(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{V(\lambda_i)} \quad (4.3)$$

где  $V(z) = (f_2 - zf_1 + z^2h - \frac{k}{2}(a-z)(b-z)(c-z))(a-z)(b-z)(c-z)$ , где  $f_1, f_2, h$  – значения интегралов  $F_1, F_2, H$  соответственно. Следующее утверждение даст нам описание областей возможного движения.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2.** Многочлен  $V(z)$  имеет 6 вещественных корней с учётом кратности.

**Доказательство.** Мы ограничимся случаем  $k > 0$ . Для случая  $k < 0$  доказательство аналогичное. Перепишем  $V(z)$  следующим образом:

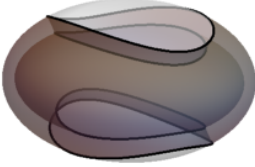
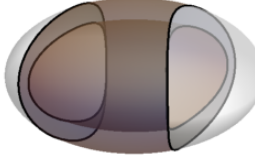
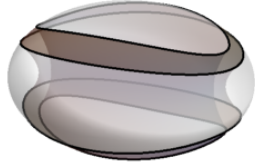
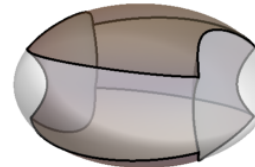
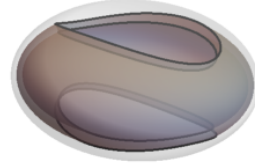
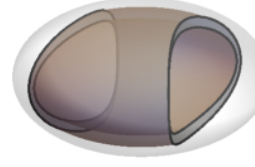
$$V(z) = \left(\frac{k}{2}z^3 - \left(\frac{k}{2}(a+b+c) - h\right)z^2 + \left(\frac{k}{2}(ab+bc+ca) - f_1\right)z - \frac{k}{2}abc + f_2\right)\Delta(z),$$

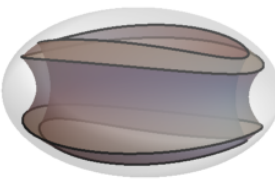
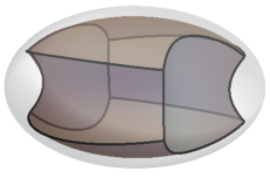
где  $\Delta(z) = (a-z)(b-z)(c-z)$ . Поскольку области изменения параметров  $\lambda_i$  – множества  $c$ , вообще говоря, непустой внутреннейстью, то на промежутках  $(-\infty, c)$ ,  $(c, b)$ ,  $(b, a)$  должны найтись точки, в которых значение функции  $V(z)$  больше либо равно нулю. Заметим, что при  $z \rightarrow -\infty V(z) \rightarrow -\infty$  и  $\Delta(z) \rightarrow +\infty$ . Поэтому найдётся корень  $z_1$  многочлена  $V(z)$  такой, что  $z_1 < c$ . Аналогично заключаем, что на промежутке  $(b, c)$  есть корень  $z_2$ . Таким образом,  $V(z)$  имеет все 6 корней. Утверждение доказано.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, a, b, c$  – корни многочлена  $V(z)$  с учётом кратности. Будем считать, что  $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ . Опишем области возможного движения отдельно для случаев  $k > 0$  и  $k < 0$ . Напомним, что для эллипсоида  $\mathcal{E}$  параметр  $\lambda = 0$ .

*Случай  $k > 0$ .* Заметим, что в этом случае  $\xi_1 \leq c$ , а остальные  $\xi_i > 0$ . Перебрав все возможные варианты, получим следующую таблицу:

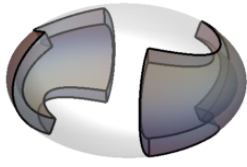

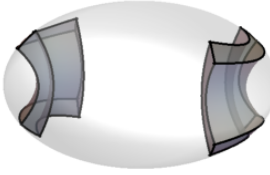
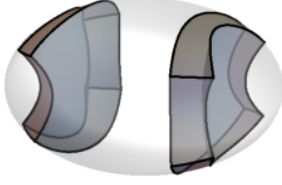
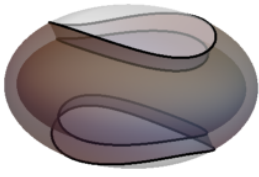
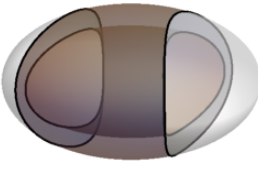
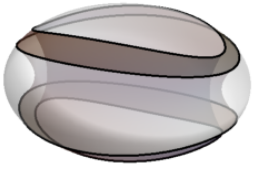
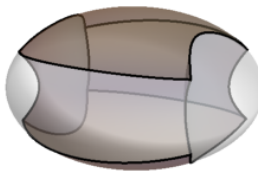
**Таблица 1.** Классификация областей возможного движения при  $k > 0$

<p>1. <math>\xi_1 \leq 0 \leq \xi_2 \leq c \leq \xi_3 \leq b</math></p> 	<p>2. <math>\xi_1 \leq 0 \leq \xi_2 \leq c &lt; b \leq \xi_3 \leq a</math></p> 
<p>3. <math>\xi_1 \leq 0 \leq c \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq b</math></p> 	<p>4. <math>\xi_1 \leq 0 \leq c \leq \xi_2 \leq b \leq \xi_3 \leq a</math></p> 
<p>5. <math>0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq c \leq \xi_3 \leq b</math></p> 	<p>6. <math>0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq c &lt; b \leq \xi_3 \leq a</math></p> 

<p>7. <math>0 \leq \xi_1 \leq c \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq b</math></p> 	<p>8. <math>0 \leq \xi_1 \leq c \leq \xi_2 \leq b \leq \xi_3 \leq a</math></p> 
---	--

Случай  $k < 0$ . Заметим, что в этом случае  $\xi_1 \geq 0$ . Перебрав все возможные варианты, получим следующую таблицу:

**Таблица 2.** Классификация областей возможного движения при  $k < 0$

<p>1. <math>0 \leq \xi_1 \leq c \leq \xi_2 \leq b \leq \xi_3 \leq a</math></p> 	<p>2. <math>0 \leq \xi_1 \leq c &lt; b \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq a</math></p> 
<p>3. <math>c \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq b \leq \xi_3 \leq a</math></p> 	<p>4. <math>c \leq \xi_1 \leq b \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq a</math></p> 
<p>5. <math>0 \leq \xi_1 \leq c \leq \xi_2 \leq b &lt; a \leq \xi_3</math></p> 	<p>6. <math>0 \leq \xi_1 \leq c &lt; b \leq \xi_2 \leq a \leq \xi_3</math></p> 
<p>7. <math>c \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq b &lt; a \leq \xi_3</math></p> 	<p>8. <math>c \leq \xi_1 \leq b \leq \xi_2 \leq a \leq \xi_3</math></p> 

### § 5. Переход к новым первым интегралам

Согласно утверждению 4.2 многочлен  $P(z) = \left(\frac{k}{2}z^3 - \left(\frac{k}{2}(a+b+c) - h\right)z^2 + \left(\frac{k}{2}(ab+bc+ca) - f_1\right)z - \frac{k}{2}abc + f_2\right)$  имеет три вещественных корня  $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ . Поскольку коэффициенты многочлена  $P(z)$  зависят только от значений интегралов  $H, F_1, F_2$ , то  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — первые интегралы рассматриваемой нами задачи. Опишем некоторые свойства этих интегралов.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1.** *Функции  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — функционально независимые попарно коммутирующие первые интегралы.*

**Доказательство.** По теореме Виета для многочлена  $P(z)$  получаем:

$$\begin{cases} (a+b+c) - \frac{2H}{k} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ (ab+bc+ca) - \frac{2F_1}{k} = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 \\ abc - \frac{2F_2}{k} = \xi_1\xi_2\xi_3 \end{cases} \quad (5.1)$$

Рассмотрим функции  $G_1 = (a+b+c) - \frac{2H}{k}$ ,  $G_2 = (ab+bc+ca) - \frac{2F_1}{k}$ ,  $G_3 = abc - \frac{2F_2}{k}$ . Поскольку  $G_1, G_2, G_3$  получены невырожденной линейной заменой из функционально независимых попарно коммутирующих первых интегралов  $H, F_1, F_2$ , то  $G_1, G_2, G_3$  — функционально независимые попарно коммутирующие первые интегралы. Из соотношений 5.1 получаем:

$$\begin{cases} G_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ G_2 = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 \\ G_3 = \xi_1\xi_2\xi_3 \end{cases} \quad (5.2)$$

Если бы  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  были функционально зависимыми, то в таком случае  $G_1, G_2, G_3$  были бы функционально зависимыми (так как  $G_1, G_2, G_3$  зависят от  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ). А поскольку  $G_1, G_2, G_3$  функционально независимы, то и  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  функционально независимы. Теперь воспользуемся попарной коммутативностью  $G_1, G_2, G_3$  и выпишем соотношения на скобки Пуассона функций  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ :

$$\begin{aligned} 0 = \{G_1, G_2\} &= \{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3\} = \\ &= (\xi_1 - \xi_2)\{\xi_1, \xi_2\} + (\xi_2 - \xi_3)\{\xi_2, \xi_3\} + (\xi_3 - \xi_1)\{\xi_3, \xi_1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \{G_1, G_3\} &= \{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3\} = \\ &= \xi_3(\xi_1 - \xi_2)\{\xi_1, \xi_2\} + \xi_1(\xi_2 - \xi_3)\{\xi_2, \xi_3\} + \xi_2(\xi_3 - \xi_1)\{\xi_3, \xi_1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \{G_2, G_3\} &= \{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3\} = \\ &= \xi_3^2(\xi_1 - \xi_2)\{\xi_1, \xi_2\} + \xi_1^2(\xi_2 - \xi_3)\{\xi_2, \xi_3\} + \xi_2^2(\xi_3 - \xi_1)\{\xi_3, \xi_1\} \end{aligned}$$

Перепишем полученные нами формулы в матричном виде:



$$\begin{pmatrix} (\xi_1 - \xi_2) & (\xi_2 - \xi_3) & (\xi_3 - \xi_1) \\ (\xi_1 - \xi_2)\xi_3 & (\xi_2 - \xi_3)\xi_1 & (\xi_3 - \xi_1)\xi_2 \\ (\xi_1 - \xi_2)\xi_3^2 & (\xi_2 - \xi_3)\xi_1^2 & (\xi_3 - \xi_1)\xi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\xi_1, \xi_2\} \\ \{\xi_2, \xi_3\} \\ \{\xi_3, \xi_1\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Осталось заметить, что так как почти всюду  $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ , то определитель матрицы системы 5.3 отличен от нуля. Следовательно, почти всегда матрица системы обратима, то есть  $\{\xi_i, \xi_j\} \equiv 0, \forall i, j$ . Таким образом, утверждение доказано.

### § 6. Описание топологии слоения Лиувилля. Бифуркационные диаграммы

Рассмотрим отображение момента  $\mathcal{F} : M^6 \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . В этом пункте мы опишем топологию соответствующего слоения Лиувилля для случаев  $k > 0$  и  $k < 0$ , а также построим бифуркационные диаграммы.

**6.1. Случай  $k > 0$ .** Согласно классификации областей возможного движения (см. таблицу 1) параметр  $\xi_1$  изменяется на интервале  $(-\infty, c]$ , параметр  $\xi_2$  изменяется на интервале  $[0, b]$ , параметр  $\xi_3$  изменяется на интервале  $[c, a]$ , при этом  $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ . Заметим, что если какой-то из этих параметров перейдет через точки  $a, b$  или  $c$  то вид области возможного движения изменится. Следовательно, в состав бифуркационной диаграммы войдут плоскости  $\xi_1 = \xi_2$ ,  $\xi_2 = \xi_3$ ,  $\xi_1 = c$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_2 = c$ ,  $\xi_2 = c$ ,  $\xi_3 = c$ ,  $\xi_3 = b$ ,  $\xi_3 = a$  с ограничениями на области возможного изменения параметров. Таким образом, бифуркационная диаграмма в этом случае имеет следующий вид:

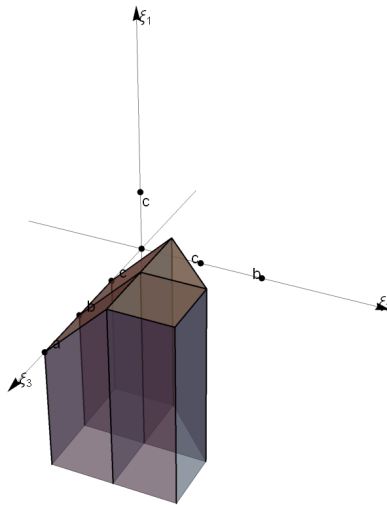


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма отображения момента  $\mathcal{F} : M^6 \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  в случае  $k > 0$

Заметим, что плоскость  $\xi_1 = 0$  не входит в состав бифуркационной диаграммы, поскольку при прохождении через неё изменяется параметр эллипсоида,

ограничивающего область, а топология слоя при этом меняться не будет. Поэтому бифуркационная диаграмма в случае  $k > 0$  состоит из четырёх камер. Камеры, образованные точками с областями возможного движения вида 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 (см. таблицу 1), обозначим через  $I, II, III, IV$  соответственно.

Теперь опишем топологию слоения Лиувилля. Рассмотрим слой Лиувилля точки камеры  $I$ . Оснастим каждую точку области возможного движения соответствующими касательными векторами. В каждой внутренней точке области, не лежащей ни в какой из плоскостей  $Oxy, Oxz, Oyz$ , возникает по 8 векторов направлений (это следует из формулы 4.3). Если внутренняя точка области лежит в плоскости  $Oxy$ , то, используя формулы перехода от эллиптических координат к декартовым 2.2, а также формулы 4.3, можно показать, что в ней также возникает ровно 8 касательных векторов. Аналогичными вычислениями получаем, что каждой внутренней точке области возможного движения соответствует 8 касательных векторов. На граничных поверхностях по закону отражения возникает по 4 касательных вектора, а на граничных кривых — по 2. Расслоим область возможного движения конфокальными двуполостными гиперболоидами. Рассмотрим слой этого расслоения, лежащий в полуплоскости  $Oyz, y > 0$ , и ограничим на него рассматриваемый слой слоения Лиувилля. Это ограничение представляет собой несвязное объединение двух торов  $\mathbb{T}^2$ . Один из них, соответствует векторам, имеющим положительную координату  $x$ , другой — отрицательную. Рассмотрим слой расслоения с векторами, имеющими положительную координату  $x$ . Сделаем полный обход, двигаясь по всем слоям расслоения. После полного обхода все вектора вернуться в исходное положение. При этом во время движения на каждом слое расслоения мы получаем один двумерный тор. Таким образом, прообраз отображения момента точки рассматриваемой камеры бифуркационной диаграммы представляет собой несвязное объединение двух торов  $\mathbb{T}^3$ .

Аналогичными рассуждениями можно показать, что прообраз отображения момента точки камеры  $II$  — два тора  $\mathbb{T}^3$ , прообраз точки камеры  $III$  — два тора  $\mathbb{T}^3$ , а прообраз точки камеры  $IV$  — один тор  $\mathbb{T}^3$ .

Пусть точка  $P$  с координатами  $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$  лежит внутри некоторой камеры бифуркационной диаграммы. В таком случае найдётся  $\varepsilon > 0$  такое, что  $U_\varepsilon(P) = [\xi_1^0 - \varepsilon, \xi_1^0 + \varepsilon] \times [\xi_2^0 - \varepsilon, \xi_2^0 + \varepsilon] \times [\xi_3^0 - \varepsilon, \xi_3^0 + \varepsilon]$  будет целиком лежать внутри камеры бифуркационной диаграммы. Нетрудно показать, что прообраз отображения момента этой окрестности гомеоморфен  $U(P) \times \mathbb{T}^3$ . Таким образом, для рассматриваемой задачи выполнена теорема Лиувилля.

Теперь опишем топологию слоёв Лиувилля, соответствующих стенкам бифуркационной диаграммы. Рассмотрим точку стенки между камерами  $I$  и  $III$ , то есть точку с координатами  $(\xi_1, c, \xi_3)$  такую, что  $\xi_1 < c < \xi_3 < b$ . Покажем, что прообраз отображения момента этой точки представляет собой несвязное объединение двух произведений критического слоя 3-атома  $A^*$  и окружности. Оснастим область возможного движения соответствующими касательными векторами. Каждой внутренней точке, не лежащей в плоскости  $Oxy$ , соответствует ровно 8 касательных векторов (это можно получить из формул 2.2 и 4.3). Также нетрудно показать, что во внутренних точках области возможного движения, лежащих в плоскости  $Oxy$  и не лежащих на эллипсе

$F_1 = \{(x, y, 0) \mid \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1\}$ , возникают по 4 вектора направлений, которые параллельны плоскости  $Oxy$ . С точками на эллипсе  $F_1$  всё обстоит гораздо труднее. Первая и вторая эллиптические координаты этих точек равны между собой. Поэтому, чтобы получить множество допустимых векторов в точке, мы должны воспользоваться формулами 2.2 и 4.3 и осуществить предельный переход при  $\lambda_1 \rightarrow c - 0$  и  $\lambda_2 \rightarrow c + 0$ . Но предел берётся по двум параметрам, поэтому он зависит от отношения скоростей, с которыми параметры  $\lambda_{1,2}$  будут стремиться к  $c$ . Введём дополнительный параметр  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$  и рассмотрим предел касательных векторов при  $\lambda_1 = c - t \sin \varphi$ ,  $\lambda_2 = c + t \cos \varphi$ ,  $t \rightarrow 0$ . Получаем касательные вектора со следующими декартовыми координатами:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{1}{2(c - \lambda_3)} \sqrt{\frac{(a - \lambda_3)P(c)}{(a - b)(a - c)}} \left( \pm \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} \right) \mp \frac{1}{2(\lambda_3 - c)} \sqrt{\frac{(a - c)P(\lambda_3)}{(a - b)(a - \lambda_3)}} \\
 \dot{y} &= \frac{1}{2(c - \lambda_3)} \sqrt{\frac{(\lambda_3 - b)P(c)}{(a - b)(b - c)}} \left( \pm \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} \right) \pm \frac{1}{2(\lambda_3 - c)} \sqrt{\frac{(b - c)P(\lambda_3)}{(a - b)(\lambda_3 - b)}} \\
 \dot{z} &= \sqrt{\frac{P(c)}{(a - b)(b - c)(\lambda_3 - c)}} \left( \pm \frac{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}{\sin \varphi + \cos \varphi} \right), P(\lambda) = \frac{k}{2} \Delta(\lambda)(\lambda - \xi_3)
 \end{aligned}$$

То есть  $\dot{x} = \pm A_1(\lambda_3)f(\sin \varphi, \cos \varphi) \pm B_1(\lambda_3)$ ,  $\dot{y} = \pm A_2(\lambda_3)f(\sin \varphi, \cos \varphi) \pm B_2(\lambda_3)$ ,  $\dot{z} = \pm A_3(\lambda_3)g(\sin \varphi, \cos \varphi)$ , где знаки перед всеми  $A_i$  и знаки перед всеми  $B_i$  одинаковы.

Нетрудно видеть, что в каждой точке эллипса  $F_1$  эти векторы заполняют две непересекающиеся окружности. На граничных поверхностях области за исключением плоскости  $Oxy$  имеем по 4 вектора направлений. А на пересечении граничной поверхности с плоскостью  $Oxy$  получаем 2 вектора направлений. На граничных кривых (опять за исключением плоскости  $Oxy$ ) — по 2 вектора скорости, а в оставшихся точках по одному. Расслоим область возможного движения на конфокальные двуполостные гиперboloиды. Как и раньше, рассмотрим слой лежащий в полуплоскости  $Oyz$ ,  $y > 0$  и соответствующие векторы слоя Лиувилля с положительной координатой  $x$ . Полученный комплекс гомеоморфен критическому слою 3-атома  $A^*$  (доказательство этого факта проводится также как для плоского бильярда, см.[6]). Совершив полный оборот по всем слоям расслоения области возможного движения, касательные векторы вернутся на свои места. Таким образом, прообраз отображения момента точки стенки бифуркационной диаграммы между камерами  $I$  и  $III$  гомеоморфен двум прямым произведениям критического слоя 3-атома  $A^*$  на окружность.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что прообраз точки стенки бифуркационной диаграммы между камерами  $I$  и  $II$  гомеоморфен прямому произведению критического слоя 3-атома  $C_2$  и окружности, а прообразы точек стенок между камерами  $II$  и  $IV$ ,  $III$  и  $IV$  гомеоморфны прямому произведению критического слоя 3-атома и окружности.

Теперь опишем прообраз малой окрестности точки стенки бифуркационной диаграммы. Пусть точка  $P$  имеет координаты  $(\xi_1^0, c, \xi_3^0)$ , где  $\xi_1 < c < \xi_3 < b$ , то есть она лежит на стенке бифуркационной диаграммы между камерами  $I$  и  $III$ . В таком случае найдётся  $\varepsilon > 0$ , что окрестность  $U_\varepsilon(P) = [\xi_1^0 - \varepsilon, \xi_1^0 + \varepsilon] \times [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \times [\xi_3^0 - \varepsilon, \xi_3^0 + \varepsilon]$  не содержит других стенок диаграммы. Заметим что для любой точки  $P' \in U_\varepsilon(P)$  с координатами  $(\xi_1^1, c, \xi_3^1)$ , прообраз отрезка  $(\xi_1^1, c + t, \xi_3^1), t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  гомеоморфен двум прямым произведениям 3-атома  $A^*$  и окружности. Действительно, это следует из того, что мы можем расщлить область возможного движения на конфокальные двуполостные гиперболоиды, и на каждом таком слое будет расположено в точности по два 3-атома  $A^*$ . Поскольку при непрерывном изменении  $\xi_1^1$  и  $\xi_3^1$  мы получаем по два 3-атома  $A^*$ , которые изменяются непрерывно, то прообраз окрестности  $U_\varepsilon(P)$  гомеоморфен двум прямым произведениям  $A^* \times S^1 \times D^2$ , где  $D^2$  — замкнутый двумерный диск. Аналогичные рассуждения справедливы и для других внутренних стенок бифуркационной диаграммы.

Пусть теперь точка  $P$  находится на пересечении двух внутренних стенок бифуркационной диаграммы, то есть её координаты равны  $(\xi_1, c, b)$ . В таком случае область возможного движения шара — эллипсоид. Во внутренних точках эллипсоида, не лежащих в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$ , возникает по 8 векторов направлений. Во внутренних точках эллипсоида, лежащих в плоскостях  $Oxy$  или  $Oxz$ , но не лежащих на эллипсе  $F_1$ , гиперболы  $F_2 = \{(x, 0, z) \mid \frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1\}$  и на оси  $Ox$ , возникает 4 вектора направлений. На эллипсе  $F_1$  в каждой точке имеем по 2 окружности направлений, которые склеиваются в одну в точках на оси  $Ox$ . На гиперболы  $F_2$  в каждой точке также имеем по 2 окружности направлений, которые склеиваются в одну в точках, лежащих на оси  $Ox$ . На оси  $Ox$  во внутренних точках области за исключением точек кривых  $F_1$  и  $F_2$  имеем по 2 вектора направлений. На границе получаем схожую картину. Необходимо отметить, что такое же расположение векторов по области возможного движения мы получаем в бильярде без потенциала внутри эллипсоида. Поэтому применяя рассуждение той задачи, получим, что прообраз точки  $P$  гомеоморфен прямому произведению  $S^1 \times K^2$ , где  $K^2$  — произведение восьмёрки на критический слой 2-атома  $C_2$ , факторизованное по действию группы  $\mathbb{Z}_2$ .

Прообразы внешних стенок бифуркационной диаграммы описываются легче и представляют собой одномерные и двумерные комплексы.

**6.2. Случай  $k < 0$ .** В случае отталкивающего потенциала возникает большее число камер бифуркационной диаграммы. Согласно классификации областей возможного движения (см. таблицу 2) в состав бифуркационной диаграммы войдут плоскости  $\xi_1 = \xi_2, \xi_2 = \xi_3, \xi_1 = 0, \xi_1 = c, \xi_1 = b, \xi_2 = b, \xi_2 = c, \xi_2 = a, \xi_3 = b, \xi_2 = a$ . Таким образом, с учётом ограничений на изменение параметров получаем бифуркационную диаграмму, изображённую на рисунке 2.

Число камер бифуркационной диаграммы равно числу возможных областей движения из таблицы 2, поэтому камеры будем нумеровать их типом области возможного движения. Опишем прообразы точек отображения момента. Используя рассуждения для случая  $k > 0$ , нетрудно показать, что прообраз

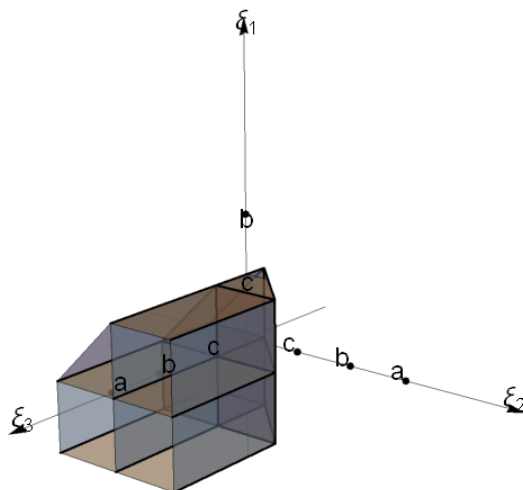


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма отображения момента  $\mathcal{F} : M^6 \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  в случае  $k < 0$

точки 1-ой, 3-ей, 4-ой, 5-ой, 6-ой, 7-ой камер гомеоморфен несвязному объединению двух торов  $\mathbb{T}^3$ , прообраз точки 2-ой камеры диаграммы гомеоморфен несвязному объединению четырёх торов  $\mathbb{T}^3$ , прообраз точки 1-ой камеры гомеоморфен тору  $\mathbb{T}^3$ . При этом, прообраз малой шаровой окрестности точки любой камеры гомеоморфен прямому произведению этой окрестности на прообраз этой точки. Таким образом, для случая  $k < 0$  так же верна теорема Лиувилля.

Теперь опишем прообразы малых окрестностей точек внутренних стенок бифуркационной диаграммы. Применяя рассуждения случая  $k > 0$ , получаем, что прообраз малой кубической окрестности точки внутренней стенки диаграммы между:

- 1-ой и 5-ой камерой гомеоморфен прямому произведению 3-атома  $C_2$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть  $C_2 \times D^2 \times S^1$ .
- 2-ой и 6-ой камерой гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений 3-атома  $B$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть два  $B \times D^2 \times S^1$ .
- 3-ей и 7-ой камерой гомеоморфен прямому произведению 3-атома  $C_2$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть  $C_2 \times D^2 \times S^1$ .
- 4-ой и 8-ой камерой гомеоморфен прямому произведению 3-атома  $B$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть  $B \times D^2 \times S^1$ .
- 1-ой и 2-ой камерой гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений 3-атома  $B$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть два  $B \times D^2 \times S^1$ .
- 1-ой и 3-ей камерой гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений 3-атома  $A^*$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть два  $A^* \times D^2 \times S^1$ .

- 2-ой и 4-ой камерой гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений 3-атома  $B$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть два  $B \times D^2 \times S^1$ .
- 3-ей и 4-ой камерой гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений 3-атома  $A^*$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть два  $A^* \times D^2 \times S^1$ .
- 5-ой и 6-ой камерой гомеоморфен прямому произведению 3-атома  $C_2$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть  $C_2 \times D^2 \times S^1$ .
- 5-ой и 7-ой камерой гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений 3-атома  $A^*$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть два  $A^* \times D^2 \times S^1$ .
- 6-ой и 8-ой камерой гомеоморфен прямому произведению 3-атома  $B$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть  $B \times D^2 \times S^1$ .
- 7-ой и 8-ой камерой гомеоморфен прямому произведению 3-атома  $B$ , двумерного диска  $D^2$  и окружности, то есть  $B \times D^2 \times S^1$ .

Теперь опишем слои Лиувилля, соответствующие пересечению двух стенок бифуркационной диаграммы. Для точек  $(c, b, \xi_1)$ , где  $\xi_1 > a$  мы получаем, как и в случае  $k > 0$ , прямое произведение  $S^1 \times K^2$ , где  $K^2$  — прямое произведение восьмёрки на критический слой 2-атома  $C_2$ , факторизованное по действию группы  $\mathbb{Z}_2$ .

Рассмотрим теперь точку  $P$  с координатами  $(c, b, \xi_3^0)$ , где  $\xi_3^0 < a$ . Область возможного движения — две чашечки внутри эллипсоида, отсекаемые конфокальным двуполостным гиперboloидом. При этом соответствующие вектора направлений будут расположены так же, как в бильярде без потенциала в такой чашечке в критическом случае. Используя рассуждения для бильярда без потенциала, получаем, что прообраз точки  $P$  — несвязное объединение двух прямых произведений восьмёрки, критического слоя 2-атома  $C_2$  и окружности, факторизованное по действию группы  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Прообраз точки с координатами  $(c, \xi_2, a)$  при  $\xi_2 < b$  гомеоморфен прямому произведению критического слоя 3-атома  $A^*$  и восьмёрки. Прообраз точки с координатами  $(c, \xi_2, a)$  при  $\xi_2 > b$  гомеоморфен прямому произведению критического слоя 3-атома  $B$  и восьмёрки. Прообраз точки с координатами  $(\xi_1, b, a)$  при  $\xi_1 < c$  гомеоморфен прямому произведению окружности на критический слой 2-атома  $C_2$ , склеенный по двум трансверсальным сечениям противоположным образом (то есть прямое произведение  $S^1 \times K^2$ , где  $K^2$  — прямое произведение критических слоев двух атомов  $C_2$ , факторизованное по действию группы  $\mathbb{Z}_2$ ). Прообраз точки с координатами  $(\xi_1, b, a)$  при  $\xi_1 > c$  гомеоморфен прямому произведению окружности на два критических слоя 3-атома  $A^*$ , склеенных по трансверсальному сечению (то есть прямое произведение  $S^1 \times K^2$ , где  $K^2$  — прямое произведение критического слоя 2-атома  $C_2$  и восьмёрки, факторизованное по действию группы  $\mathbb{Z}_2$ ).

Теперь опишем прообраз точки с координатами  $(c, b, a)$ . Прообраз этой точки отличается от прообраза точки  $(c, b, \xi_3)$ , при  $\xi_3 > a$ , тем, что в плоскости  $Oyz$  происходит склейка векторов (вектор склеивается со своим отражением относительно плоскости  $Oyz$ ). Это всё равно, что в задаче без потенциала в

критической точке (аналог точки коранга 2) происходит аналогичная склейка. Однако такая склейка порождает на  $S^1 \times K^2$  склейку двух комплексов  $K^2$ , где  $K^2$  — прямое произведение восьмёрки и критического слоя 2-атома  $C_2$ , факторизованное по действию группы  $\mathbb{Z}_2$ . Причём такая склейка происходит противоположным образом. Таким образом, прообраз точки с координатами  $(c, b, a)$  гомеоморфен прямому произведению  $K^2$  и критического слоя 2-атома  $C_2$ , факторизованному по действию группы  $\mathbb{Z}_2$ , то есть прямому произведению восьмёрки и двух критических слоёв 2-атома  $C_2$ , факторизованному по действию группы  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Прообразы внешних стенок бифуркационной диаграммы, как и в случае  $k > 0$ , являются одномерными и двумерными комплексами.

### § 7. Топология изоэнергетического многообразия

Полная механическая энергия рассматриваемой нами задачи зависит только от длины вектора координат и длины вектора скорости. Поэтому в каждой точке области возможного движения при фиксированном уровне энергии возникает либо сфера направлений, либо точка.

Пусть зафиксирован уровень энергии  $h$ . В таком случае на фазовом многообразии возникает множество, задаваемое соотношением  $\|v\|^2 + \frac{k}{2}\|r\|^2 = h$ , где  $r = (x, y, z)$ , а  $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . Из него получаем следующие ограничения на область возможного движения:

- Если  $k > 0$ , то  $\|r\|^2 \leq \frac{2}{k}h$ , при этом  $h \geq 0$ ;
- Если  $k < 0$ , то  $a \geq \|r\|^2 \geq \max\{0, \frac{2h}{k}\}$ . В частности  $h \geq \frac{ka}{2}$ .

Таким образом, в случае  $k > 0$  область возможного движения — часть некоторого шара с центром в нуле, ограниченная эллипсоидом. При  $k < 0$  область возможного движения — это либо вся внутренность эллипсоида, либо внутренность эллипсоида без некоторого шара с центром в нуле.

Теперь посмотрим взаимное расположение эллипсоида  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$  и сферы  $\|r\| = R$ . Мы не будем рассматривать случаи касания эллипсоида и сферы. В таком случае возможны следующие 4 варианта расположения, показанные на рисунке 3.

Теперь отдельно рассмотрим случаи  $k > 0$  и  $k < 0$  и найдём класс гомеоморфности изоэнергетических поверхностей.

*Случай  $k > 0$ .* В этом случае область возможного движения, как уже было сказано, лежит внутри некоторого шара с центром в нуле. Этот шар расположен как на рисунке 3а, если  $0 < h < \frac{kc}{2}$ . При этом изоэнергетическое многообразие, очевидно, гомеоморфно сфере  $S^5$ , поскольку оно задаётся уравнением  $\|v\|^2 + \frac{k}{2}\|r\|^2 = h$ , а соответствующий шар лежит внутри эллипсоида (то есть склеек не происходит).

Если же  $\frac{kc}{2} < h < \frac{kb}{2}$ , то шар расположен как на рисунке 3б. В этом случае можно немного модифицировать доказательство утверждения о том, что

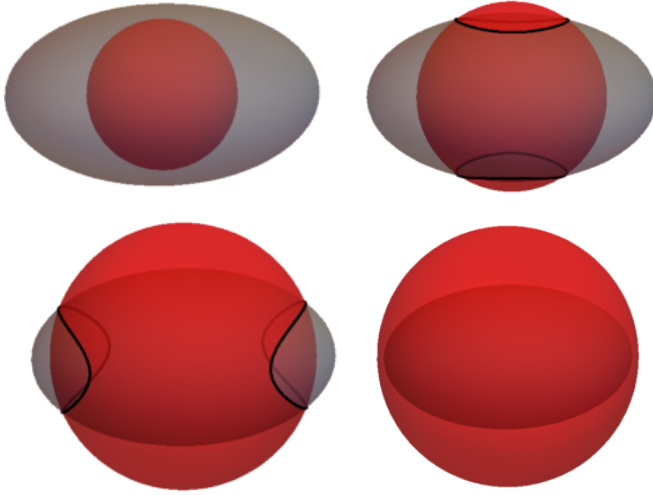


Рис. 3. Варианты возможного расположения эллипсоида  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$  и сферы  $\|r\| = R$ . а)  $R < c$ ; б)  $c < R < b$ ; в)  $b < R < a$ ; д)  $R > a$

изоэнергетическая поверхность билиарда внутри гладкой поверхности, диффеоморфной сфере  $S^2$ , гомеоморфна сфере  $S^5$ . Действительно, рассмотрим сферу меньшего радиуса. Она разобьёт область возможного движения на две компоненты, одна из которых гомеоморфна шару, другая — полноторию. Ограничение изоэнергетической поверхности на часть области, гомеоморфной шару, очевидно, гомеоморфно  $S^2 \times D^3$ , где  $D^3$  — замкнутый трёхмерный диск. Ограничение изоэнергетической поверхности на другую часть области также гомеоморфно  $S^2 \times D^3$ . Действительно, рассмотрим луч, исходящий из центра сферы в направлении единичного вектора  $e$ . Рассмотрим часть этого луча, попавшую в рассматриваемую часть области возможного движения. Она представляет собой отрезок, один конец которого лежит на границе области возможного движения, а другой — на сфере разреза. В каждой точке этого отрезка, за исключением конца, лежащего на границе области возможного движения, возникает сфера направлений. На границе области возможного движения возникает либо точка, либо двумерный диск. Таким образом, векторы на этом отрезке представляют собой сферы  $S^2$ , стягивающиеся либо в точку, либо в диск  $D^2$ , то есть векторы на этом отрезке образуют замкнутый диск  $D^3$ . Поскольку единичные векторы заполняют сферу  $S^2$ , то ограничение изоэнергетической поверхности на рассматриваемую часть области возможного представляет собой  $S^2 \times D^3$ . Далее можно показать, что эти куски изоэнергетической поверхности склеиваются в сферу  $S^5$ . Для этого можно построить гомеоморфизм между  $Q^5$  и  $S^5$  по аналогии с билиардом без потенциала (см. [14]).

При  $\frac{kb}{2} < h < \frac{ka}{2}$  соответствующий шар расположен как на рисунке 3с. В этом случае можно так же модифицировать доказательство утверждения об



изоэнергетической поверхности бильярда внутри гладкой поверхности, диффеоморфной сфере, и получить, что данная изоэнергетическая поверхность гомеоморфна сфере  $S^5$ .

Если  $h > \frac{ka}{2}$ , то соответствующий шар расположен как на рисунке 3d. В этом случае изоэнергетическая поверхность гомеоморфна сфере  $S^5$ . Доказательство этого факта такое же как и в случае бильярда в эллипсоиде без потенциала.

Таким образом, при  $k > 0$  получаем следующие изоэнергетические поверхности:

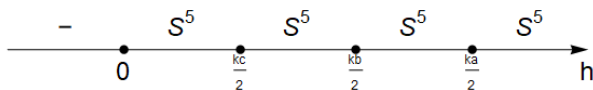


Рис. 4. Топологический тип изоэнергетической поверхности при  $k > 0$

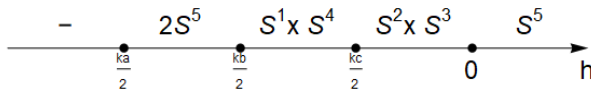
*Случай  $k < 0$ .* Область возможного движения шара — либо вся внутренность эллипсоида, либо внутренность эллипсоида без некоторого шара с центром в нуле. Если  $\frac{ka}{2} < h < \frac{kb}{2}$ , то соответствующий шар расположен так же как на рисунке 3с. Изоэнергетическое многообразие в этом случае гомеоморфно несвязному объединению двух сфер  $S^5$ . Это опять таки можно получить, модифицируя утверждение об изоэнергетической поверхности бильярда внутри эллипсоида.

Если же  $\frac{kb}{2} < h < \frac{kc}{2}$ , то соответствующий шар расположен как на рисунке 3b. В этом случае можно немного модифицировать доказательство утверждения об изоэнергетической поверхности бильярда внутри кольца гомеоморфного полноторию. Это делается по аналогии с утверждением об изоэнергетической поверхности бильярда внутри стола, гомеоморфного шару. Мы получим, что изоэнергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению сфер  $S^1 \times S^4$ .

При  $\frac{kc}{2} < h < 0$  шар расположен как на рисунке 3b. В этом случае рассмотрим гомотопию  $\varphi(t, x)$  такую, что  $\varphi(0, x)$  — точки на границе этого шара, а  $\varphi(1, x)$  — точки на эллипсоиде. Причём при фиксированных  $x$  кривые гомотопии не пересекаются. Зафиксируем  $x$  и рассмотрим кривую  $\gamma(t) = \varphi(t, x)$ . Очевидно, что при  $t \in (0, 1)$  единичные векторы из  $Q^5$  в точке  $\gamma(t)$  заполняют сферу  $S^2$ , при  $t = 1$  — диск  $D^2$ , а при  $t = 0$  — ровно одну точку. Значит сферы  $S^2$  стягиваются при  $t = 1$  в диск  $D^2$ , а при  $t = 0$  в точку. Таким образом, ограничение  $Q^5$  на кривую  $\gamma(t)$  есть сфера  $S^3$ . А поскольку  $x$  пробегает сферу  $S^2$ , то  $Q^5$  гомеоморфна  $S^2 \times S^3$ .

Если  $h > 0$ , то соответствующий шар имеет мнимый радиус, а область возможного движения — весь эллипсоид. В этом случае изоэнергетическая поверхность бильярда гомеоморфна сфере  $S^5$ . Доказательство этого факта такое же как и в случае бильярда в эллипсоиде без потенциала.

Следовательно, при  $k > 0$  получаем следующие изоэнергетические поверхности:

Рис. 5. Топологический тип изоэнергетической поверхности при  $k < 0$ 

### Список литературы

- [1] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет» Ижевск, 1999.
- [2] V. Dragovich, M. Radnovich, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4-5 (2009), 479 – 494.
- [3] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Москва – Ижевск, 2010.
- [4] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы «бильярд в эллипсе»”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, **5** (2012), 31 – 34.
- [5] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами”, *Вестник Московского университета. Сер. 1 Матем. Мех.*, **4** (2014), 18 – 27.
- [6] В. В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, *Математический сборник*, **206**:10 (2015), 127 – 176.
- [7] В. В. Ведюшкина, “Слоение Лиувилля невыпуклых топологических бильярдов”, *Докл. РАН*, **478**:1 (2018), 7 – 11.
- [8] В. В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Пишанга невыпуклых топологических бильярдов”, *Математический сборник*, **210**:3 (2019), 17 – 74.
- [9] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы”, *Известия РАН. Серия математическая*, **81**:4 (2017), 20 – 67.
- [10] Якоби К., *Лекции по динамике*, М.: Гостехиздат, 1936.
- [11] В. В. Козлов, “Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде”, *Прикладная математика и механика*, **59**:1 (1995).
- [12] И. Ф. Кобцев, “Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2018 2, 27–33.
- [13] С. Е. Пустовойтов, “Топологический анализ бильярда в эллиптическом кольце в потенциальном поле”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **22**:6 (2019), 201–225.
- [14] Г. В. Белозеров, “Топологическая классификация бильярдов в трёхмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадраками”, *Матем. сб., принята к печати*.
- [15] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I*, Ижевск: РХД, 1999.

Г. В. Белозеров (G. V. Belozerov)  
 МГУ имени М. В. Ломоносова  
 E-mail: [gleb0511beloz@yandex.ru](mailto:gleb0511beloz@yandex.ru)

Поступила в редакцию  
 .....