

УДК 517.938.5

Г. В. Белозеров

Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов на квадриках в трехмерном евклидовом пространстве

В статье рассматриваются геодезические бильярды на квадриках в \mathbb{R}^3 . Мы рассматриваем движение материальной точки внутри бильярдного стола, т. е. внутри области, лежащей на квадрике, ограниченной конечным числом квадрик, софокусных с данной, и имеющей углы излома на границе равные $\frac{\pi}{2}$. Данная задача оказалась интегрируемой в силу известной теоремы Якоби – Шаля. На множестве бильярдных столов было введено отношение эквивалентности и доказана теорема об их классификации. В статье представлена полная классификация геодезических бильярдов на квадриках в \mathbb{R}^3 с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Ключевые слова: интегрируемая система, геодезический бильярд, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко-Цишанга.

§ 1. Введение

Теории математического бильярда, т. е. задаче о движении материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой с абсолютно упругим отражением на границе, посвящено много работ. В книге В. В. Козлова и Д. В. Трещёва [1], а также в книге С. Л. Табачникова [2] дан обзор современных и классических исследований. Интегрируемость бильярда в области, ограниченной эллипсом, замечена в работе Дж. Д. Биркгофа [3].

Бильярды в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности начали изучаться в работах В. Драговича, М. Раднович [4], [5], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [6], [7], в частности В. В. Ведюшкина классифицировала все локально-плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол а также области, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых сегментов границ. Указанные области не обязательно изометрично вложимы в плоскость. Далее, В. В. Фокичева классифицировала слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях таких бильярдов ([8]), вычислив меченые молекулы Фоменко – Цишанга – инварианты лиувиллевой эквивалентности. В работах [9], [10], [11], [12], [13], [14] заложены основы теории топологических интегрируемых бильярдов.

Данная работа посвящена интегрируемым геодезическим бильярдам на поверхностях положительной и отрицательной гауссовой кривизны, а именно на

невырожденных квадраках E , т.е. на эллипсоиде, однополостном и двуполостном гиперboloидах. Биллиардным столом на такой квадраке E назовем замкнутую область, ограниченную конечным числом квадрак, софокусных с данной, и имеющую углы излома на границе равные $\frac{\pi}{2}$. Возникает динамическая система: материальная точка (шар) движется по биллиардному столу вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. На множестве биллиардных столов (на фиксированной квадраке) введем отношение эквивалентности. Назовем две области эквивалентными в том и только в том случае, когда они получаются друг из друга элементарными преобразованиями. Смотри определение 2.13. Автором получена полная классификация биллиардных столов на квадраках. Оказывается, что на эллипсоиде есть ровно 21 тип неэквивалентных биллиардных столов, на однополостном гиперboloиде – 21, а на двуполостном – 13. Соответствующие таблицы представлены в 3.4, 4.4, 5.4.

Интегрируемость этих биллиардов следует из теоремы Якоби – Шаля (см. теорему 2.4). Далее автор полностью классифицировал все такие геодезические биллиарды с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Как оказалось, на эллипсоиде их ровно 7, на однополостном гиперboloиде тоже 7, а на двуполостном – 6. Соответствующие классифицирующие инварианты Фоменко-Цишанга представлены в таблицах пунктов 3.4, 4.4, 5.4. Далее оказалось, что некоторые геодезические биллиарды на квадраках разного типа лиувиллево эквивалентны. В итоге, на квадраках в \mathbb{R}^3 есть ровно 10 лиувиллево неэквивалентных биллиардов. Смотри таблицу в пункте 2.5.

Для анализа этой задачи полезны эллиптические координаты. Они представлены на рисунке 1с.

Как оказалось, существует частичное соответствие между геодезическими биллиардами на эллипсоиде и плоскими биллиардами внутри эллипса. При этом омбилические точки заменяются фокусами, а сетка эллиптических координат на эллипсоиде — на сетку на плоскости. Для биллиардов на двуполостном гиперboloиде автором доказаны следующие 2 теоремы. Первая утверждает существование взаимно однозначного соответствия между биллиардными столами на двуполостном гиперboloиде и биллиардными столами на плоскости, ограниченными софокусными квадраками. При этом отношение эквивалентности биллиардных столов сохраняется. Вторая теорема утверждает существование взаимно однозначного соответствия между плоскими биллиардными системами (ограниченными софокусными квадраками) и геодезическими биллиардными системами на двуполостном гиперboloиде. Это соответствие сохраняет лиувиллеву эквивалентность. Интересно, что для однополостного гиперboloида даже частичного соответствия нет.

Также оказалось, что все найденные геодезические биллиарды на квадраках лиувиллево эквивалентны некоторым известным интегрируемым системам из физики, механики и геометрии. Таблица эквивалентностей представлена в 2.5.

Автор благодарит академика РАН Фоменко А.Т. за постановку задачи и к.ф.м.м. Ведюшкину В. В. за помощь в исследовании.

§ 2. Постановка задачи

2.1. Семейство софокусных квадратик и его свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Семейством софокусных квадратик в \mathbb{R}^3 назовем поверхность, заданные уравнением:

$$x^2(b - \lambda)(c - \lambda) + y^2(a - \lambda)(c - \lambda) + z^2(a - \lambda)(b - \lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda)$$

где $a > b > c > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ — вещественный параметр. Если квадратика E такова, что параметр λ_E равен a, b или c , то она называется вырожденной. Иначе E невырожденная.

Мы будем рассматривать только невырожденные квадратик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть область $D \subseteq E$ ограничена конечным числом софокусных с E квадратик и имеет углы излома на границе равные $\frac{\pi}{2}$. Тогда, если область \bar{D} компактна, назовем ее бильярдным столом. Обозначим через $A(E)$ множество всех бильярдных столов на квадратике E .

Семейство софокусных квадратик обладает следующим свойством:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Касательные плоскости в точках пересечения двух софокусных квадратик ортогональны.

Доказательство получается прямым вычислением.

Следующий факт хорошо известен:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Для любой точки $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, такой что $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, существуют в точности три софокусные квадратик $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, E_{\lambda_3}$ такие, что $P \in E_{\lambda_i}$, где $i = 1, 2, 3$. При этом одна является эллипсоидом, вторая однополостным гиперboloидом, а третья двуполостным гиперboloидом.

Теперь перейдем от координат (x, y, z) к координатам $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где λ_i — параметры софокусных квадратик, на которых лежит точка $P = (x, y, z)$. Отображение корректно определено в области $\{x \neq 0\} \cap \{y \neq 0\} \cap \{z \neq 0\}$, при этом является биективным в каждом координатном октанте. Легко показать, что тройка $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — регулярная локальная система координат. Она называется эллиптической системой координат.

2.2. Симплектические многообразия. Теорема Лиувилля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пара (M^{2n}, ω) , где M^{2n} — гладкое многообразие, а ω — замкнутая невырожденная 2-форма на нем, называется симплектическим многообразием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $H \in C^\infty(M^{2n})$. Тогда векторное поле $sgrad(H)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$ называется гамильтоновым полем (гамильтоновой системой), а функция H называется гамильтонианом. Скобка Пуассона функций f, g задается формулой $\{f, g\} = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$. Гладкие функции f, g находятся в инволюции (коммутируют), если $\{f, g\} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Гамильтонова система $v = \text{sgrad}(H)$ называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n таких, что:

1. f_1, \dots, f_n — первые интегралы v ,
2. они функционально независимы на M , то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,
3. $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j ,
4. векторные поля $\text{sgrad} f_j$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

ТЕОРЕМА 2.1. (Лиувилль) Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad}H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда

1. T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad}H$ и $\text{sgrad}f_1, \dots, \text{sgrad}f_n$.
2. Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n . Этот тор называется тором Лиувилля.
3. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .
4. В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:
 - s_1, \dots, s_n — координаты на диске D^n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n , $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
 - $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.
 - Переменные действия s_i являются функциями от интегралов f_1, \dots, f_n .
 - В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид $\dot{s}_i = 0, \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), i = 1, 2, \dots, n$. Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Напомним два отношения эквивалентности таких систем ([17] стр. 65 – 66):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Две интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 называются грубо лиувиллево эквивалентными, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4 , обладающих, соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$,

который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему на многообразии M^4 с гладким гамильтонианом H . Пусть f — дополнительный интеграл системы. Пусть $Q^3 = \{x \in M^4 | H(x) = const\}$ — неособая поверхность уровня гамильтониана. Предположим, что многообразие Q^3 компактно. В работе мы будем считать, что система невырождена, т.е. ограничение f на Q_3 является функцией Ботта. Тогда Q_3 фактически представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам. Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на Q^3 . Эта база является одномерным графом W , называемым графом Кронрода-Риба функции $f|_{Q^3}$. Согласно теореме А.Т. Фоменко структура слоения особого слоя, отвечающего вершине графа W , описывается комбинаторным объектом, называемым "атомом". Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко. На каждом ребре графа W можно задать ориентацию, указав направления роста дополнительного интеграла F [17].

ТЕОРЕМА 2.2. (А. Т. Фоменко [16]) Пусть (v, Q) и (v', Q') — две интегрируемые системы и W, W' — отвечающие им грубые молекулы. Тогда системы v и v' грубо лиувиллево эквивалентны (с учетом ориентации) тогда и только тогда, когда молекулы W и W' совпадают.

Пусть e_i — ребро графа W . Разрежем его, т.е. разрежем Q^3 по некоторому тору Лиувилля. Выберем на каждом из получившихся граничных торов допустимые базисы в группе одномерных гомологий. Подробно смотри в [17],[18]. Пусть $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ — матрица склейки этих базисов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Числовой рациональной меткой r_i на ребре e_i молекулы W называется число:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \pmod{1} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0 \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0 \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Числовой целочисленной меткой ε_i на ребре e_i молекулы W называется число :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign}(\beta_i), & \text{если } \beta_i \neq 0 \\ \text{sign}(\alpha_i), & \text{если } \beta_i = 0 \end{cases}$$

Ребро молекулы назовем бесконечным, если метка $r_i = \text{inf}$. Остальные ребра будем называть конечными. Разрежем молекулу по всем конечным ребрам. В результате молекула распадется на некоторое число связанных кусков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Семейей называется кусок молекулы, который не содержит атомов A после разреза молекулы по всем конечным ребрам.

В каждой семье все ребра можно разделить на три класса: входящие, выходящие и внутренние.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. *Сопоставим каждому из этих ребер e_i целое число Θ_i по следующему правилу:*

$$\Theta_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}, & \text{если } e_i \text{ — выходящее ребро,} \\ \begin{bmatrix} -\delta_i \\ -\beta_i \end{bmatrix}, & \text{если } e_i \text{ — входящее ребро,} \\ \begin{bmatrix} -\gamma_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}, & \text{если } e_i \text{ — внутреннее ребро,} \end{cases}$$

Тогда для каждой семьи определяется целочисленная метка n по следующему правилу:

$$n = \sum \Theta_i$$

где сумма берется по всем ребрам данной семьи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. *Грубая молекула, оснащенная метками r, ε, n , называется меченой молекулой или инвариантом Фоменко-Цишанга.*

ТЕОРЕМА 2.3. (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг [19]) *Две интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 | f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 | f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

2.3. Геодезический бильярд. Гамильтоново сглаживание. Пусть E — невырожденная квадрака из семейства софокусных, а $D \in \mathcal{A}(E)$ — бильярдный стол. Рассмотрим следующую динамическую систему. Материальная точка движется в D вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы области абсолютно упруго. В силу того, что углы излома на границе стола D (если такие есть) равны $\frac{\pi}{2}$, можно доопределить по непрерывности отражение в угловых точках. А именно, при попадании в такой угол материальная точка отразится в противоположном направлении, не теряя скорости. Таким образом, пространство, на котором определен геодезический бильярд — это следующее топологическое многообразие $M^4 = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x E\} / \sim$, где отношение эквивалентности на границе задается так. Если $x_1, x_2 \in \partial D$ и $v_1 \in T_{x_1} E, v_2 \in T_{x_2} E$, то $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $v_1 - v_2 \perp T_{x_1} \partial D$.

Система бильярда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру. Описываемый ниже подход предложен А. Т. Фоменко.

Многообразие M^4 является кусочно-гладким. Оно распадается на гладкие куски, объединение которых обозначим \widetilde{M}^4 . На нем можно ввести симплектическую структуру. Будем предполагать, что гладкие симплектические структуры в соседних гладких областях непрерывно согласованы на границе раздела, то есть их пределы "справа" и "слева" совпадают. Будем говорить, что кусочно-гладкая система на M^4 интегрируема (в кусочно-гладком смысле, но в дальнейшем будем говорить, для краткости, просто об интегрируемости), если существуют непрерывные на M^4 и гладкие на \widetilde{M}^4 функционально независимые функции f и H , которые находятся в инволюции на \widetilde{M}^4 . Вопросы "сглаживания" многообразия M^4 рассматривались Е. А. Кудрявцевой, В. Ф. Лазуткиным ([15]).

Рассмотрим кусочно-гладкое изоэнергетическое многообразие Q^3 и связную компоненту совместного уровня функций f и H . Пусть потоки $sgrad f$ и $sgrad H$ полны. Если удастся показать, что связная компактная компонента совместного уровня функций f и H гомеоморфна либо кусочно-гладкому тору, либо особому слою кусочно-гладкого трехмерного атома (для конечного числа значений f), то будем говорить, что выполнена кусочно-гладкая теорема Лиувилля. В этом случае мы можем построить грубую молекулу W и определить метки. В случае бильярда в компактной области полнота гамильтоновых потоков очевидна. Эта операция называется гамильтоновым сглаживанием. Более подробную информацию можно найти в [15]

Гамильтониан бильярда — это модуль вектора скорости, т.е. $H = |v|$. Дополнительный первый интеграл системы, функционально независимый с гамильтонианом, существует в силу следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 2.4. (Якоби-Шаль) *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n - 2$ конфокальных с ней квадрик, одна и тех же для всех точек данной геодезической.*

Таким образом, параметр λ семейства софокусных квадрик — первый интеграл системы. Обозначим его $\Lambda = \Lambda(x, v)$. Интегралы H, Λ коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона на E .

2.4. Отношение эквивалентности бильярдных столов. Пусть E — невырожденная квадратика из семейства софокусных. Введем на множестве $\mathcal{A}(E)$ отношение эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. *Будем говорить, что $\Omega \sim \Omega'$, где $\Omega, \Omega' \in \mathcal{A}(E)$, если и только если Ω' получается из Ω следующими преобразованиями:*

- *последовательным изменением сегментов границы путем непрерывной деформации в классе софокусных квадрик, так, чтобы значение параметра λ изменяемого сегмента границы не принимало значения b , если E — эллипсоид, значения c , если E — двуполостный гиперboloид, и значений b, c , если E — однополостный гиперboloид;*
- *симметрией относительно координатных плоскостей.*

2.5. Теоремы классификации. Наша задача — классифицировать для произвольной невырожденной квадрики E из семейства софокусных все бильярдные столы $D \in \mathcal{A}(E)$ с точностью до введенной выше эквивалентности. Соответствующую динамическую систему мы называем геодезическим бильярдом. Ее траектории — геодезические. Такие бильярды будем рассматривать на изоэнергетических три-поверхностях, задаваемых условием $H = 1$. Согласно теореме Фоменко-Цишанга интегрируемые системы на Q^3 классифицируются с точностью до лиувиллевой эквивалентности мечеными молекулами. В нашем случае имеется ввиду кусочно-гладкая лиувиллева эквивалентность. Таким образом, геодезические бильярды на Q^3 лиувиллево эквивалентны, если и только если их меченые молекулы совпадают.

Поскольку семейство софокусных квадрик состоит из трех типов поверхностей (отличных от плоскости), нам необходимо классифицировать бильярдные

столы и бильярдные системы для каждого типа. Автором доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.5. (Классификация бильярдных областей на квадриках) Пусть E — квадрика из семейства софокусных, тогда (с точностью до эквивалентности бильярдных столов):

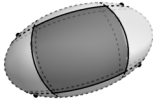
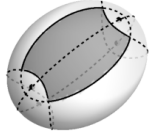
1. Если E — эллипсоид, то на нем существует ровно 21 тип неэквивалентных бильярдных столов (см. таблицу пункта 3.4);
2. Если E — однополостный гиперболоид, то на нем существует ровно 21 тип неэквивалентных бильярдных столов (см. таблицу пункта 4.4);
3. Если E — двуполостный гиперболоид, то на нем существует ровно 13 типов неэквивалентных бильярдных столов (см. таблицу пункта 5.4).

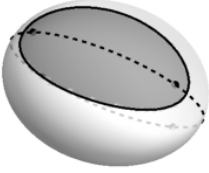
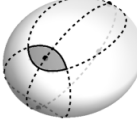
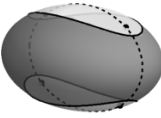
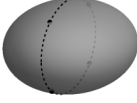
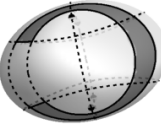
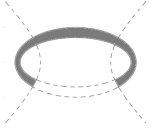
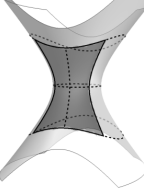
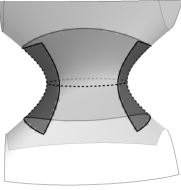
ТЕОРЕМА 2.6. (Классификация геодезических бильярдных) Пусть E — квадрика из семейства софокусных, тогда (с точностью до лиувиллево эквивалентности):

1. Если E — эллипсоид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных бильярдных (см. таблицу пункта 3.4);
2. Если E — однополостный гиперболоид, то на нем существуют ровно 7 неэквивалентных бильярдных (см. таблицу пункта 4.4);
3. Если E — двуполостный гиперболоид, то на нем существуют ровно 6 неэквивалентных бильярдных (см. таблицу пункта 5.4).
4. Оказывается, что некоторые геодезические бильярды, живущие на разных софокусных квадриках, являются лиувиллево эквивалентными. В итоге, на всех софокусных квадриках имеется ровно 10 лиувиллево не эквивалентных геодезических бильярдных (см. теорему 2.7).

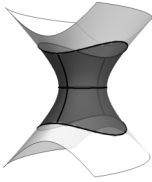
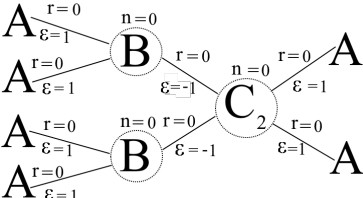
Далее оказывается, что найденные нами интегрируемые геодезические бильярды на квадриках, лиувиллево эквивалентны некоторым другим известным системам из физики, механики и геометрии.

ТЕОРЕМА 2.7. Следующие геодезические бильярды на квадриках эквивалентны интегрируемым системам из физики, механики и геометрии:

Номер	Область	Меченая молекула бильярда	Лиувиллево эквивалентная система
1		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{\gamma=0} A$	Лагранж, Эйлер
2		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{\gamma=0} B \xrightarrow[\varepsilon=1]{\gamma=\infty} A$	Жуковский, Ковалевская - Яхья

3		$\begin{array}{c} A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} \begin{array}{c} n=1 \\ \textcircled{B} \\ n=1 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} A$	<p><i>Клебш, Соколов, Ковалевская - Яхья</i></p>
4		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \begin{array}{c} n=0 \\ \textcircled{A^*} \\ n=0 \end{array} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	<p><i>Горячев - Чаплыгин - Сретенский</i></p>
5		$\begin{array}{c} A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ \textcircled{C} \\ r=0 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} A$	<p><i>Эйлер, Клебш</i></p>
6		$\begin{array}{c} A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} \begin{array}{c} n=2 \\ \textcircled{C_2} \\ n=2 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} A$	<p><i>Эйлер, Клебш, Соколов</i></p>
7		$\begin{array}{c} A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} \begin{array}{c} r=\infty \\ \textcircled{D_3} \\ r=\infty \end{array} \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A$	<p><i>Плоский билли- ард вида:</i></p> 
8		$\begin{array}{c} A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} \begin{array}{c} n=0 \\ \textcircled{B} \\ n=0 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \begin{array}{c} n=0 \\ \textcircled{B} \\ n=0 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} A$	<p><i>биллиард на эллипсоиде в про- странстве Минковско- го</i></p>
9		$\begin{array}{c} A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} \begin{array}{c} n=0 \\ \textcircled{B} \\ n=0 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ \varepsilon=-1 \end{array} \begin{array}{c} n=0 \\ \textcircled{D_3} \\ n=0 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} A$	<p><i>Склейка плоских биллиард- ных столов, имеющих на границе углы равные $\frac{3\pi}{2}$¹</i></p>

¹Данные склейки появляются в работе [20]

10			<p>Склейка плоских бильярд- ных столов, имеющих на границе углы равные $\frac{3\pi}{2}$</p>
----	---	---	--

§ 3. Классификация бильярдных столов и геодезических бильярдов на эллипсоиде

3.1. Классификация бильярдных столов. Рассмотрим эллипсоид E , заданный уравнением $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, где $a > b > c > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть L – гладкая двумерная поверхность, вложенная в \mathbb{R}^3 . Точка $x \in L$ называется *омбилической*, если главные кривизны в ней совпадают.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. На эллипсоиде E существует ровно 4 точки, через которые проходит (помимо E) только одна квадрака из семейства софокусных с E , и она является плоскостью $\{y = 0\}$. При этом данные точки являются омбилическими и только они.

Доказательство проводится прямым вычислением.

На рисунке 1а показаны сетка эллиптических координат на эллипсоиде и омбилические точки.

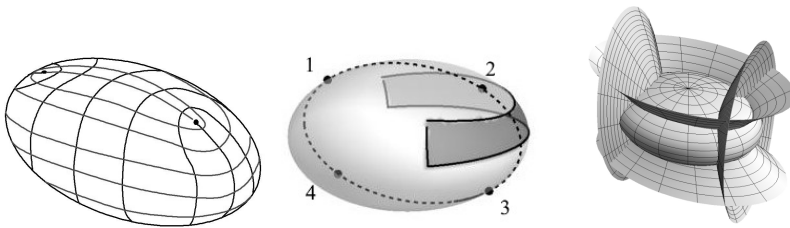


Рис. 1. а) Сетка эллиптических координат на эллипсоиде; б) Нумерация омбилических точек; в) Три софокусные квадраки в \mathbb{R}^3

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. На эллипсоиде E существует в точности 21 тип неэквивалентных бильярдных столов.

Доказательство. Рассмотрим на E эллиптическую систему координат. Заномеруем омбилические точки как показано на рисунке 1б. Разрежем E по плоскости $y = 0$. Получим две половинки эллипсоида, каждая из которых

представляет собой квадрат в декартовой плоскости. При этом вершинам этих квадратов соответствуют омбилические точки, границе — эллипс $\{y = 0\} \cap E$, а координатным линиям сетки декартовых координат — линии эллиптических на эллипсоиде. Обозначим эти квадраты K_1, K_2 .

Замостим декартову плоскость единичными квадратами. Зафиксируем некоторый квадрат K из замощения и положим $K = K_1$. Пронумеруем вершины K как на K_1 . Все квадраты, имеющие с K общую сторону, объявим за K_2 и пронумеруем оставшиеся вершины как на K_2 . Далее поступаем аналогичным образом. Получаем плоскость Π_1 , замощенную квадратами K_1, K_2 в шахматном порядке (см. рис 2а).

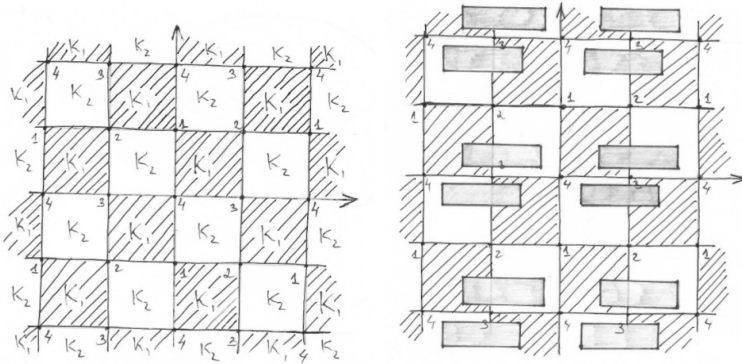


Рис. 2. а) Плоскость замощенная квадратами K_1 и K_2 ; б) Прообраз бильярдного стола на рисунке 1б при отображении f

Рассмотрим полученное отображение $f : \Pi_1 \rightarrow E$. Легко заметить, что прообраз бильярдного стола — это либо вся плоскость, либо счетный набор полос, либо счетный набор прямоугольников. Перенесем отношение эквивалентности бильярдных столов на их прообразы относительно отображения f . Пусть $D_1, D_2 \in \mathcal{A}(E)$, будем говорить, что $f^{-1}(D_1) \sim f^{-1}(D_2) \Leftrightarrow D_1 \sim D_2$, т.е. $f^{-1}(D_1)$ можно получить из $f^{-1}(D_2)$ путем следующих элементарных преобразований:

- Растяжением вверх-вниз, влево-вправо участков границы стола одновременно на всех квадратах K_1 и K_2 . При этом, участки границы при растяжении не должны соприкасаться с границами квадратов K_1 и K_2 и другими участками границы стола;
- Одновременным сдвигом всех квадратов на 1 вправо;
- Одновременной симметрией всех квадратов K_1 и K_2 относительно оси параллельной Ox и проходящей через их центр;
- Одновременной симметрией всех квадратов K_1 и K_2 относительно оси параллельной Oy и проходящей через их центр.

Заметим, что это отношение эквивалентности является более простым, а поэтому перебором всех возможных вариантов получим 21 тип неэквивалентных столов. Все они представлены в таблице пункта 3.4. ■

3.2. Построение грубых молекул.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Биллиарду внутри стола 8-ого типа (см.табл.3.4) соответствует грубая молекула*

$$\frac{A-C-A}{A-C_2-A}$$

Доказательство. Докажем утверждение для бильярдных столов, ограниченных в точности одним двуполостным гиперboloидом. В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

Пусть $\Lambda = c$. Рассмотрим вектора скорости, соответствующие этому уровню интеграла. Получаем две окружности, которые соответствуют движению шара по двум участкам эллипса $\{z = 0\} \cap E$.

Пусть $\Lambda = c + \delta$, где $0 < \delta < b - c$. Снабдим точки стола векторами скорости данного уровня интеграла. Получаем две замкнутые области D_1 и D_2 , внутри которых по четыре вектора, а на границе по два. Считаем, что D_1 — область, где $y > 0$. Рассмотрим точку $P = (0, \sqrt{b}, 0)$. Рассмотрим четыре вектора направлений в этой точке. Спроецируем их на плоскость $y = 0$ и положим: v_1 — вектор спроецировавшийся в первый квадрант плоскости Oxz , v_2 — во второй и т.д. Обозначения в остальных точках области D_1 продолжим по непрерывности из обозначений в точке P . Получаем, что на верхнем и нижнем участке границы склеелись вектора v_1 и v_4 , v_2 и v_3 , а на правом и левом v_1 и v_2 , v_3 и v_4 . Расслоим D_1 на координатные линии сетки эллиптических координат, соответствующие двуполостному гиперboloиду. Слой этого расслоения, проходящий через точку P с приписанными к нему векторами v_1 и v_4 очевидно гомеоморфен окружности. После полного обхода точки P по дуге эллипса $\{y = 0\} \cap E$ вместе с векторами на соответствующем слое расслоения получим тор. Аналогично в области D_2 получаем тор. Заметим, что при $\Lambda \rightarrow c+$ эти торы переходят в окружности на уровне $\Lambda = c$. Таким образом, уровню $\Lambda = c$ соответствуют два атома A , а при $\Lambda \in (c, b)$ бифуркации не происходит. Аналогично легко показать, что на уровне $\Lambda = a$ расположено два атома A , а на уровнях $\Lambda \in (b, a)$ расположено два тора.

Таким образом, при $\Lambda = b$ происходит перестройка двух торов в два. Покажем, что это перестройка соответствует атому C_2 . Снабдим каждую точку стола касательными векторами этого уровня интеграла. В точках, где $\{y = 0\} \cap E$ получаем 2 вектора, а в остальных точках по 4. Введем обозначения в точке P как раньше, а в точке $P' = (0, -\sqrt{b}, 0)$ положим v_1 — вектор равный вектору v_1 в точке P и т.д. Перенесем обозначения векторов в точках стола где $y \geq 0$ по непрерывности из обозначений в точке P , а где $y \leq 0$ — из точки P' . Получаем, что в точках, у которых координата $y = 0$, вектора v_1 и v_4 , v_2 и v_3 склеиваются. Расслоим E на координатные линии сетки эллиптических координат, соответствующие двуполостным гиперboloидам. Рассмотрим точку P вместе с ее слоем этого расслоения. Припишем ко всем точкам этого слоя вектора v_1 и v_4 . Получаем комплекс K_1 . Он является трансверсальным сечением атома C_2 . После полного обхода точки P по дуге эллипса $\{y = 0\} \cap E$ получаем $K_1 \times S^1$. А это — критический слой атома C_2 . Легко заметить, что при $\Lambda \rightarrow b \pm 0$, лиувиллевы торы стремятся к стенкам $K_1 \times S^1$. Таким образом, уровню $\Lambda = b$ соответствует атом C_2 . ■

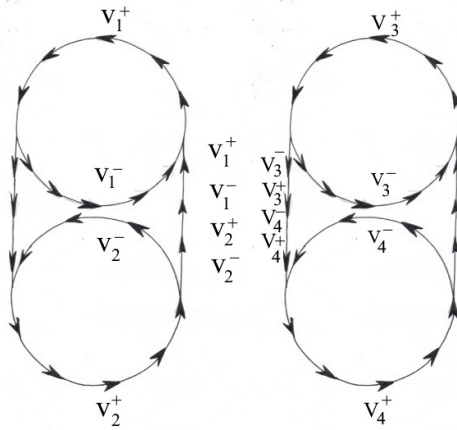


Рис. 3. Склеивка векторов на комплексе K_2

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. *Биллиарду на столе 1-ого типа (см.табл. 3.4) соответствует грубая молекула:*

$$\frac{A}{A} = C_2 - A$$

Доказательство. Как и в предыдущем утверждении легко показать, что на уровнях $\Lambda = c, a$ расположено две критические окружности, а при $\Lambda \in (c, b) \cup (b, a)$ получаем два тора, котрые при $\Lambda \rightarrow c+, a-$ стремятся к критическим окружностям. Значит на уровнях $\Lambda = c, a$ получаем по два атома A .

Покажем, что на уровне $\Lambda = b$ происходит бифуркация, соответствующая атому C_2 . Рассмотрим вектора скорости на E , соответствующие этому значению интеграла. В омбилических точках получаем все единичные вектора. В точках, не лежащих в плоскости $y = 0$ имеем 4 вектора скорости, а в оставшихся точках по 2 вектора. Обозначения векторов скорости для точек вне плоскости $\{y = 0\}$ возьмем из предыдущего утверждения. Получаем, что в верхней и нижней частях эллипса $\{y = 0\} \cap E$ склеены вектора v_1 и v_4, v_2 и v_3 , а по бокам $-v_1$ и v_2, v_3 и v_4 . Расслоим E по координатным линиям сетки эллиптических координат, соответствующих двуполостным гиперboloидам. Как и в предыдущем утверждении получаем, что каждый слой расслоения, не содержащий омбилических точек, с приписанными к нему векторами v_1 и v_4 или v_2 и v_3 гомеоморфен комплексу K_1 из предыдущего утверждения. Осталось рассмотреть как склеиваются эти комплексы в слоях, содержащих омбилические точки. Рассмотрим такой слой, расположенный в полупространстве $x \geq 0$. Получаем комплекс K_2 , изображенный на рисунке 3а. Верхняя окружность соответствует векторам из верхней омбилической точки. У точек, лежащих в полупространстве $y > 0$, припишем векторам v_i знак $+$, а у точек, расположенных в полупространстве $y < 0$ знак $-$. Найдем, как склеиваются вектора на комплексе K_2 . Склеивка показана на рисунках 3а,б. Таким образом, происходит перекрутка окрестности критического слоя. А поскольку есть только 2 слоя расслоения, содержащих омбилические точки, то перекрутка происходит дважды, а значит искомый атом $-C_2$.

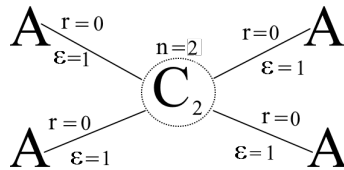
УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Биллиарду внутри стола 2-ого соответствует грубая молекула $A - A$*

Доказательство. Как и в предыдущих утверждениях легко показать, что на уровнях $\Lambda = a, c$ расположена в точности одна критическая окружность, а при $\Lambda \in (c, b) \cup (b, a)$ получаем по одному лиувиллеву тору. При $\Lambda \rightarrow c+, a-$ торы переходят в критические окружности. Покажем, что на уровне $\Lambda = b$ бифуркации не происходит. Покажем сначала, что на этом уровне расположен тор. Рассмотрим вектора скорости, соответствующие этому уровню интеграла и введем обозначения этих векторов как в утверждении 3.2. Расслоим стол на координатные линии сетки эллиптических координат, соответствующие однополостным гиперboloидам. Очевидно, что слой расслоения с приписанными к нему векторами v_1 и v_2 , содержащий точку P , гомеоморфен окружности. Двигая точку P по дуге $E \cap \{x = 0\}$ вместе со слоем расслоения вплоть до слоя содержащего омбилические точки, будем получать окружности. Очевидно, что слой содержащий омбилическую точку гомеоморфен окружности. Оттолкнувшись от границы и совершив полный обход, мы получим тор. При $\Lambda \rightarrow b \pm 0$ лиувиллевы торы стремятся к тору на уровне $\Lambda = b$, а это значит, что на данном уровне бифуркации не происходит. ■

Построение грубых молекул для биллиардов остальных типов проводится аналогично.

3.3. Вычисление инвариантов Фоменко - Цишанга. Для вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга будем пользоваться грубыми молекулами, построенными в предыдущей части. Заметим, что атомы бифуркации (если она происходит) соответствуют уровню $\Lambda = b$. Поэтому, если на уровне $\Lambda = b$ происходит бифуркация, то ребра меченой молекулы, соответствующие $\Lambda \in (c, b)$, будем называть ребрами первого типа, а ребра, соответствующие $\Lambda \in (b, a)$, ребрами второго типа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. *Меченая молекула биллиарда на столе типа 1 (весь эллипсоид) имеет следующий вид:*



Доказательство. Воспользуемся утверждением 3.4. Сначала найдем метки r и ϵ для ребер первого типа. Зафиксируем $\Lambda = d \in (c, b)$. Получили кольцо K . Циклы λ^- и μ^- , соответствующие атому A , выбираются очевидным образом (см. рис. 4а). Ориентируем λ^- по направлению векторов скорости. В качестве λ^+ выберем цикл, который касается верхней граничной кривой сзади и нижней кривой спереди (см. рис. 4б), а в качестве μ^+ выберем λ^- . Ориентируем λ^+ по направлению движения вдоль векторов. Заметим, что λ^+ и

μ^+ выбраны корректно, так как при $\Lambda \rightarrow b - 0$, λ^+ переходит в критическую окружность, а циклы μ^+ в комплекс K_1 из утверждения 3.3. Значит, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, на ребрах первого типа имеем метки $r = 0$ и $\varepsilon = 1$.

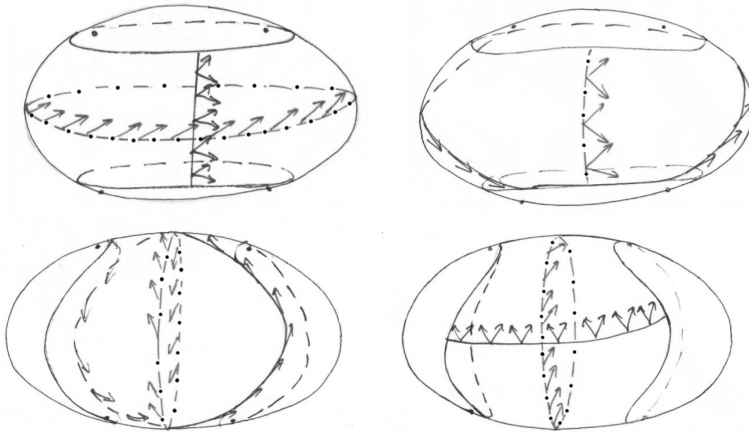


Рис. 4. На рисунках пунктиром обозначены λ -циклы, а сплошной линией μ -циклы

Для ребер второго типа поступаем аналогично. На рисунках 4c,d показан выбор циклов. Имеем матрицу склейки $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, $r = 0$ и $\varepsilon = 1$. (Заметим, что все циклы μ^+ и λ^+ выбраны корректно, т.е. задают положительную ориентацию на границе атома C_2 .)

Заметим, что так как все ребра конечны, то есть ровно одна семья, состоящая из атома C_2 . Считаем все ребра входящими. Вычислим метку n : $n = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. *Биллиардному столу 2-ого типа (половина эллипсоида) соответствует меченая молекула:*

$$A \frac{r=0}{\varepsilon=1} A$$

Доказательство. Выберем циклы на уровне $\Lambda = b$ как показано на рисунке 5a,b. Ориентируем μ^-, λ^-, μ^+ по направлению векторов скорости. Очевидно, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, а $\varepsilon = 1$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.8. *Меченая молекула биллиарда на столе 7-ого типа (верхнее кольцо) имеет следующий вид (см. рис. 6)*

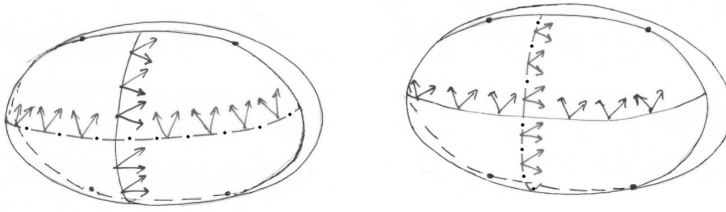


Рис. 5. На рисунках пунктиром обозначены λ - циклы, а сплошной линией μ - циклы

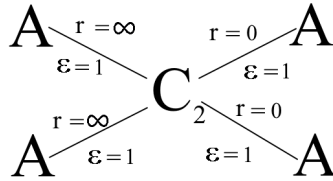


Рис. 6. Меченая молекула на столе седьмого типа

Доказательство. Посчитаем сначала метки для ребер первого типа. Зафиксируем $\Lambda = d_1 \in (c, b)$. Выбор циклов λ^- и μ^- , соответствующих атому A очевиден (см. рис.7а). Ориентируем μ^- и λ^- по направлению движения. Выберем циклы λ^+ и μ^+ , соответствующие атому C_2 как показано на рисунке 7б. Таким образом, матрица склейки имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, $r = 0, \varepsilon = 1$.

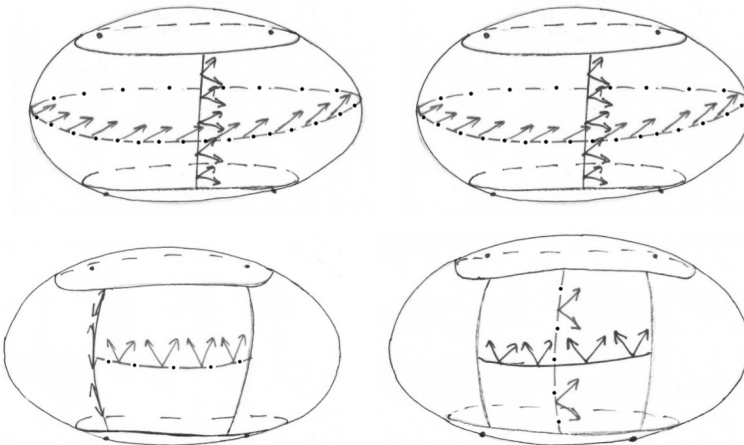


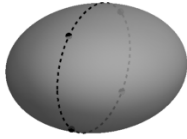
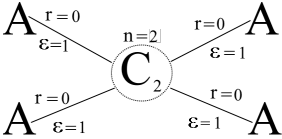
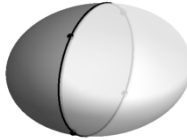
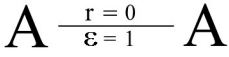
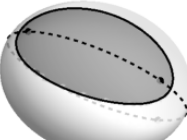
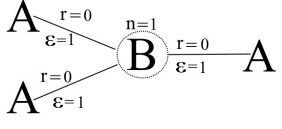
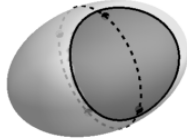
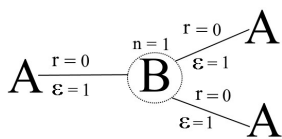
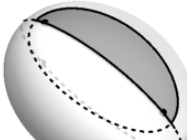
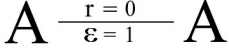
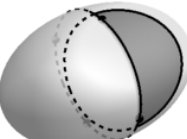
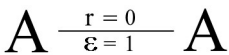
Рис. 7. На рисунках пунктиром обозначены λ - циклы, а сплошной линией μ - циклы

Теперь вычислим метки на ребрах второго типа. Зафиксируем значение интеграла $\Lambda = d_2 \in (b, a)$. Очевидным образом выбираются циклы λ^+ и μ^+ , соответствующие атому C_2 и циклы λ^- и μ^- атома A (см. рис.7 с,d). Ориентируем λ^+ и μ^- по направлению векторов скорости. Поскольку ориентация на μ^+ противоположна ориентации на μ^+ на ребрах второго типа то, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Значит $r = 0, \varepsilon = \infty$.

Разрезав молекулу по всем конечным меткам r , получим, что в каждой компоненте связности есть атом A . Таким образом, семей у молекулы нет. ■

Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга для билиардов остальных типов проводится аналогично.

3.4. Классификация геодезических билиардов на эллипсоиде.

Номер	Область	Меченая молекула билиарда	тип Q^3
1			$\mathbb{R}P^3$
2			S^3
3			S^3
4			S^3
5			S^3
6			S^3

7		$ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} & A \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & C & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ A & \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} & A \end{array} $	$S^2 \times S^1$
8		$ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} & A \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & C & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ A & \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} & A \end{array} $	$S^2 \times S^1$
9		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3
10		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3
11		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \overset{n=0}{\textcircled{A}^*} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3
12		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3
13		$ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} & B \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & B & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ A & \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} & A \end{array} $	S^3
14		$ \begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ & B & \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ A & \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} & A \end{array} $	S^3

15		$ \begin{array}{c} A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \quad B \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A \\ \quad \quad \quad \nearrow \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} $	S^3
16		$ \begin{array}{c} \quad \quad \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad \quad B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \quad \quad \quad \searrow \\ A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} \quad \quad \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A \end{array} $	S^3
17		$ \begin{array}{c} A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \quad D_3 \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A \\ \quad \quad \quad \nearrow \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \\ A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} \end{array} $	S^3
18		$ \begin{array}{c} \quad \quad \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad \quad D_3 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \quad \quad \quad \searrow \\ A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} \quad \quad \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad D_3 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A \end{array} $	S^3
19		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3
20		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3
21		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3

§ 4. Классификация бильярдных столов и геодезических бильярдов на однополостном гиперboloиде

4.1. Классификация бильярдных столов. Зафиксируем семейство софокусных квадратик $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1$, где $a > b > c$. Пусть $\lambda \in (c, b)$. Полученная квадратика G — однополостный гиперboloид .
 Доказательство следующих утверждений проводится прямым вычислением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. В каждой точке однополостного гиперboloида G его пересекает (помимо G) в точности две квадрики софокусные с ним.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. На G нет омбилических точек.

На рисунке 8а показана сетка эллиптических координат на однополостном гиперboloиде.

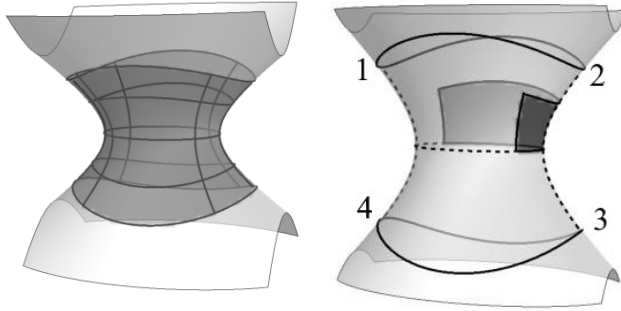


Рис. 8. а) Сетка эллиптических координат на однополостном гиперboloиде; б) Нумерация точек

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. На однополостном гиперboloиде G существует в точности 21 тип неэквивалентных бильярдных столов.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{A}(G)$ содержит только компактные бильярдные столы, то любой стол лежит в некотором эллипсоиде, софокусным с G . Без ограничения общности можем считать, что все бильярдные столы ограничены эллипсоидом E , софокусным с G . Действительно, если это не так, то воспользуемся первым элементарным преобразованием и сдвинем область внутрь E . Обозначим $K = \{x \in G \mid x \text{ лежит в ограниченной компоненте } \mathbb{R}^3/E \text{ или на границе } E_1\}$.

Пронумеруем точки $x \in E \cap G \cap \{y = 0\}$ как показано на рисунке 8б. Разрежем K по плоскости $\{y = 0\}$. Получим две компоненты связности K_1 (соответствует $y \geq 0$), K_2 ($y \leq 0$). Поскольку система эллиптических координат ортогональная, то каждая компонента связности представляет собой единичный квадрат в декартовой плоскости, горизонтальные стороны которого представляют собой границу E , а вертикальные – границу разреза с плоскостью $\{y = 0\}$. При этом вершины квадратов соответствуют пронумерованным точкам, а сетка декартовых координат на плоскости – сетке эллиптических на однополостном гиперboloиде.

Рассмотрим на плоскости решетку, построенную по единичным координатным векторам. Зафиксируем один из получившихся единичных квадратов K и положим $K = K_1$, при этом перенесем нумерацию вершин на K с K_1 . Рассмотрим соседние с K правый и левый квадрат и объявим их как K_2 , при этом перенесем нумерацию вершин и согласуем с уже имеющейся. Продолжаем этот процесс по индукции влево и вправо. Получим полосу квадратов, с чередованием K_1 и K_2 (см. рис. 9а). Обозначим эту полосу Π_1 .

Рассмотрим отображение $F : \Pi_1 \rightarrow K_1$. Пусть $D \in \mathcal{A}(G)$, тогда очевидно, что в полученной полосе он будет либо бесконечной полосой, либо счетным

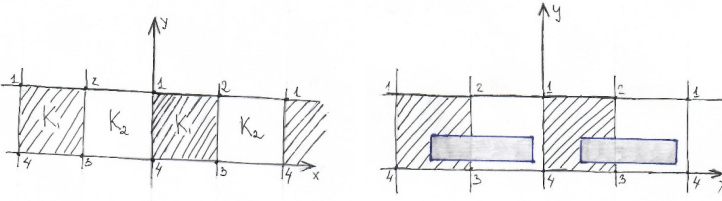


Рис. 9. а) Прообраз отображения фигуры K на полосу Π_1 ; б) Прообраз бильярдного стола на рисунке 8 при этом отображении

набором прямоугольников (см. рис.9б). Перенесем отношение эквивалентности на $\mathcal{A}(G)$ в Π_1 . Будем говорить, что $F^{-1}(D_1) \sim F^{-1}(D_2)$, где $D_1, D_2 \in \mathcal{A}(G) \Leftrightarrow F^{-1}(D_1)$ можно получить из $F^{-1}(D_2)$ путем следующих преобразований:

- Растяжением вверх-вниз, влево-вправо участков границы стола одновременно на всех квадратах K_1 и K_2 . При этом, участки границы при растяжении не должны соприкасаться с границами квадратов K_1 и K_2 и другими участками границы стола;
- Одновременным сдвигом всех квадратов на 1 вправо;
- Одновременной симметрией всех квадратов K_1 и K_2 относительно оси параллельной Ox и проходящей через их центр;
- Одновременной симметрией всех квадратов K_1 и K_2 относительно оси параллельной Oy и проходящей через их центр.

Заметим, что это отношение эквивалентности является более простым, а поэтому перебором всех возможных вариантов получим 21 тип неэквивалентных областей. Все они представлены в первой таблице параграфа 4.4 ■

4.2. Построение грубых молекул. В отличие от эллипсоида бильярд на однополостном гиперboloиде может иметь две бифуркации: на уровнях $\Lambda = b$, $\Lambda = c$. Однако на однополостном гиперboloиде нет омбилических точек, а значит грубые молекулы не содержат атомы со звездочками. В данном разделе будут построены грубые инварианты для двух типов бильярдных столов. Построение грубых молекул для оставшихся типов столов проводится аналогично.

Пусть D – бильярдный стол, тогда параметр Λ изменяется не отрезке $[c - \delta, a]$, где $0 < \delta < +\infty$, при этом $\Lambda = c - \delta$ соответствует наибольшему эллипсоиду, ограничивающему D .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. *Бильярду на столе 1-ого типа соответствует грубая молекула:*

$$\begin{matrix} A- \\ A- \\ A- \\ A- \end{matrix} B-C_2 -A$$

Доказательство. Пусть граница стола D содержится в некотором софокусном эллипсоиде с параметром $\lambda = c - \delta$, где $0 < \delta < +\infty$. Для остальных столов этой серии рассуждения в доказательстве аналогичные. Пусть $\Lambda = c - \delta$. Наблюдим точки D касательными векторами, соответствующими этому параметру. Получим в точности 4 окружности. Они представляют собой движение по граничным замкнутым траекториям.

Пусть $\Lambda \in (c - \delta, c)$. В каждой точке рассмотрим вектора скорости, соответствующие этому уровню интеграла. Получаем два кольца, оснащенных внутри четырьмя, а на границе двумя векторами. Рассмотрим точку $P \in \partial D \cap \{y = 0\} \cap \{z \geq 0\} \cap \{x \geq 0\}$, лежащую внутри одного из колец, и как в утверждении 3.2 введем обозначение векторов в этой точке. Далее по непрерывности вводим обозначения в оставшихся точках. Софокусный с G эллипсоид с параметром Λ обозначим E_Λ . Положим $\gamma = D \cap E_\Lambda$. Расслоим D на координатные траектории сетки эллиптических координат, соответствующие двуполостным гиперболоидам с приписанными к ним векторами v_1, v_4 . Рассмотрим некоторую точку на γ с соответствующим слоем расслоения. Очевидно, что этот слой гомеоморфен окружности. Передвигая точку P вдоль γ , будем получать окружности. Совершив полный оборот, получим тор. Аналогично для нижнего кольца и для векторов v_2, v_3 . Таким образом, на этом уровне получаем 4 тора, которые при $\Lambda \rightarrow c + 0$ переходят в критические окружности, а значит при $\Lambda = c - \delta$ получаем 4 атома A .

Аналогичным образом легко показать, что уровню $\Lambda = a$ соответствуют два атома A , а при $\Lambda \in (b, a)$ бифуркации не происходит.

Пусть теперь $\Lambda \in (c, b)$. Снабдим все точки D касательными направлениями к квадрике E_Λ . Получаем четыре направления внутри D и по два на границе стола. Введем обозначения этих векторов как в первом абзаце и рассмотрим такое же расслоение с приписанными к слоям векторами v_1, v_4 . Рассмотрим $P = (0, \sqrt{b - \lambda}, 0)$ с соответствующим слоем расслоения, он гомеоморфен окружности. И, сделав полный оборот вокруг эллипса $G \cap \{z = 0\}$, получим тор. Аналогично поступим с векторами v_2, v_3 . Таким образом, на этом уровне получим два тора. Значит, на уровне $\Lambda = c$ получаем перестройку четырех торов в два, а на уровне $\Lambda = b$ — двух торов в два.

Рассмотрим критический слой $\Lambda = c$. Снабдим все точки области касательными направлениями, соответствующими данному параметру. Возьмем расслоение стола и точку P из предыдущего абзаца. Снабдим все дуги расслоения направлениями v_1, v_4 . Получим восьмерку. При этом, совершив полный обход по эллипсу $G \cap \{z = 0\}$, получим прямое произведение восьмерки на окружность. Торы, соответствующие векторам v_1, v_4 на уровнях интеграла $\Lambda \in (c - \delta)$, стремятся к этой критической поверхности при $\delta \rightarrow 0$, огибая ее изнутри. А торы, соответствующие уровню $\Lambda \in (c, b)$ с векторами v_1, v_4 , тоже стремятся к этой поверхности при $\Lambda \rightarrow c$ снаружи. Значит, получили атом B . Для векторов v_2, v_3 тоже получим атом B . Легко показать, что уровню $\Lambda = b$ соответствует атом C_2 . ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. *Бильярду на столе 2-ого типа соответствует грубая молекула:*

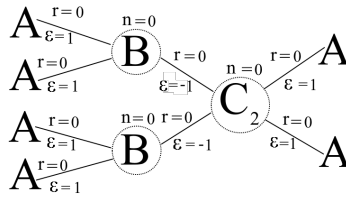
$$\begin{array}{c} A- \\ A- \end{array} B - D_3 \begin{array}{c} -A \\ -A \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим стол D этой серии. Легко показать, что уровню $\Lambda = c - \delta$ соответствует в точности два атома A , а уровню $\Lambda = a$ ровно три атома A . Также аналогично проверяется, что при $\Lambda \in (c - \delta, c) \cup (c, b) \cup (b, a)$ бифуркации не происходит и на уровне $\Lambda \in (c, b)$ лежит в точности один тор. Таким образом, при $\Lambda = c$ два тора перестраиваются в один, а при $\Lambda = b$ один тор перестраивается в три.

Пусть $\Lambda = c$. Расслоим D на координатные линии сетки эллиптических координат, соответствующие двуполостному гиперboloиду, и припишем к каждой точке векторы v_1, v_4 . Рассмотрим точку $P \in \text{Int}(D) \cup \{z = 0\}$ с ее слоем расслоения. Получаем окружность. Двигая точку P по $D \cup \{z = 0\}$ и отталкиваясь два раза, получим прямое произведение восьмерки на окружность. Таким образом, уровню $\Lambda = c$ соответствует атом B . Аналогично доказывается, что на уровне $\Lambda = b$ расположен один атом D_3 . ■

4.3. Вычисление инвариантов Фоменко - Цишанга.. В этой части мы построим инварианты Фоменко-Цишагна для бильярдов на столах типов 1, 2, 3. Меченые молекулы остальных бильярдов строятся аналогично. Построенные инварианты Фоменко-Цишанга расположены в разделе 4.4 в первой таблице. Пусть W — грубая молекула некоторого бильярда. Если ребро этой молекулы соответствует параметру $\Lambda \in [c - \delta, c]$, то назовем его ребром первого типа; если $\Lambda \in [c, b]$, то ребром второго типа; если $\Lambda \in [b, a]$, то ребром третьего типа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. Меченая молекула бильярда на столе первого типа имеет вид:



Доказательство. Выберем из каждого типа ребер по одному и для него вычислим инварианты Фоменко-Цишанга. Для ребер одного типа метки r, ϵ будут совпадать, и в этом нетрудно убедиться. Вычислим метки для ребра первого типа. Выберем циклы λ^-, μ^- , относящиеся к атому A, и циклы λ^+, μ^+ , относящиеся к атому B, как показано на рисунке 10а,b. Ориентацию λ^+, μ^-, μ^+ выберем по направлению векторного поля. Тогда очевидно, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\epsilon = 1, r = 0$.

Построим метки для ребра второго типа. Выберем циклы λ^+, μ^+ , относящиеся к атому C₂, и циклы λ^-, μ^- , относящиеся к атому B, как показано на рисунке 10с,d. Ориентируем λ^+ по направлению векторного поля, а на μ^- выберем ориентацию противоположную направлению векторного поля. Так как определитель матрицы склейки равен -1, то μ^+ ориентируем против направления векторного поля. Значит матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\epsilon = -1, r = 0$.

Строим метки для ребра третьего типа. Рассмотрим одно из ребер. Выберем циклы μ^+, λ^+ , относящиеся к атому C₂, и μ^-, λ^- , относящиеся к атому A,

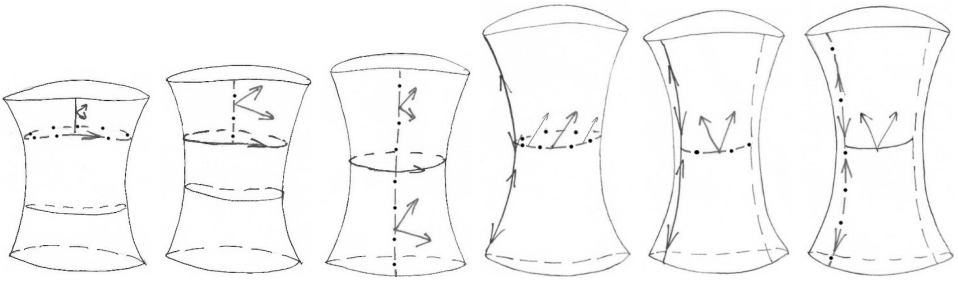
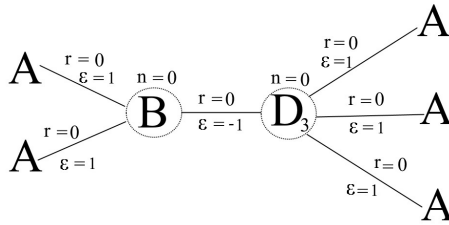


Рис. 10. На рисунках пунктиром обозначены λ -циклы, а сплошной линией μ -циклы

как показано на рисунке 10e,f. Ориентируем μ^+, λ^+, μ^- по направлению векторного поля. Так как определитель матрицы склейки равен -1 , то она имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а значит $\varepsilon = 1, r = 0$.

Считаем метку n для атомов B . Так как два ребра входящих и два исходящих, то $n = 0 + 0 + 0 = 0$. Для атома C_2 метка $n = 0$. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.7. Меченая молекула бильярда на столе второго типа имеет следующий вид (см. рис.??)



Доказательство. Посчитаем метки для ребра первого типа. Выберем циклы λ^-, μ^- , относящиеся к атому A , и циклы λ^+, μ^+ для атома B как показано на рисунке 11a,b. Ориентируем $\lambda^-, \mu^-, \lambda^+$ по направлению векторного поля. Тогда μ^+ направлен вдоль векторного поля и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\varepsilon = 1, r = 0$.

Для ребра второго типа выберем циклы λ^-, μ^- для атома B и циклы λ^+, μ^+ для атома D_3 как показано на рисунке 11c,d. Ориентируем λ^+, λ^- по направлению векторного поля, а цикл μ^- направим против векторного поля. Значит μ^+ направлен против векторного поля и матрица склейки имеет следующий вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\varepsilon = -1, r = 0$.

В случае ребра третьего типа выбираем циклы λ^-, μ^- для атома A и циклы λ^+, μ^+ для атома D_3 как показано на рисунке 11e,f. Ориентируем λ^+, μ^+, μ^- по

направлению векторного поля. Значит λ^+ направлен вдоль векторного поля и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\varepsilon = 1, r = 0$.

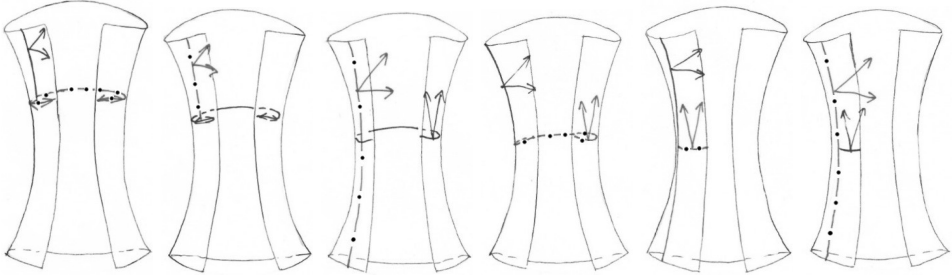
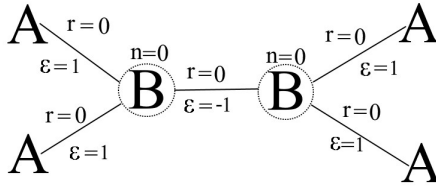


Рис. 11. На рисунках пунктиром обозначены λ - циклы, а сплошной линией μ - циклы

Так как у всех матриц склейки нули по главной диагонали, то $n = 0$ для атомов B, D_3 . ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.8. Меченая молекула бильярда на столе третьего типа имеет следующий вид :



Доказательство. Посчитаем метки на ребрах первого типа. Выберем циклы λ^-, μ^- , относящиеся к атому A , и циклы λ^+, μ^+ для атома B как показано на рисунке 12а,в. Ориентируем $\lambda^-, \mu^-, \lambda^+$ по направлению векторного поля. Тогда μ^+ направлен вдоль векторного поля и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\varepsilon = 1, r = 0$.

В случае ребра второго типа выберем циклы λ^-, μ^- для атома B , соединяющего ребра 1 и 2 типов, и циклы λ^+, μ^+ соединяющего ребра 2 и 3 типов, как показано на рисунке 12с,д. Направим λ^+, λ^- по направлению векторного поля, а μ^- против направления векторного поля. Тогда цикл μ^+ направлен против векторного поля и матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Значит $\varepsilon = -1, r = 0$.

Как и в первом абзаце легко показать, что для ребер третьего типа $\varepsilon = 1, r = 0$. Так как у всех матриц склейки нули по главной диагонали, то $n = 0$ для атомов B . ■

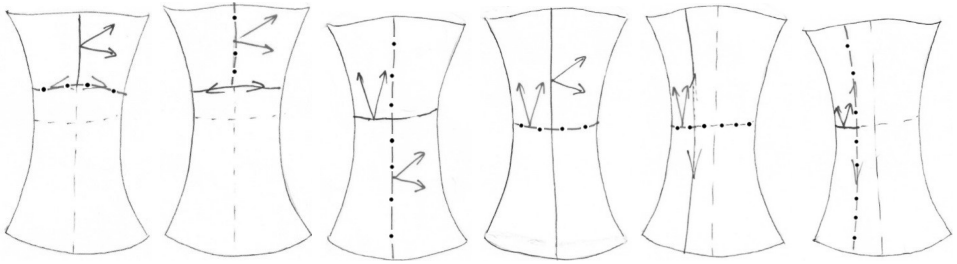
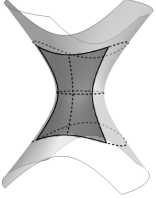
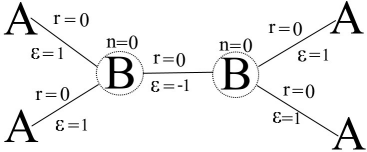
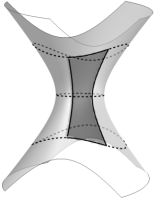
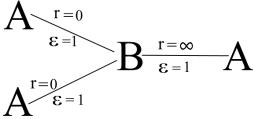
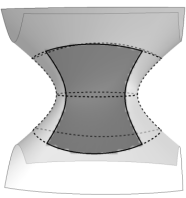
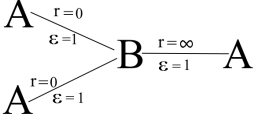
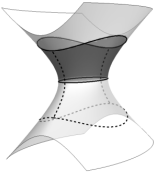
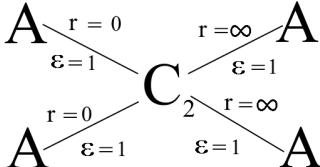
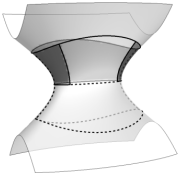
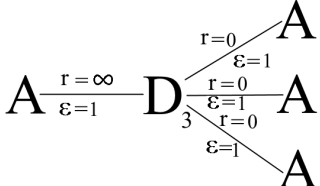
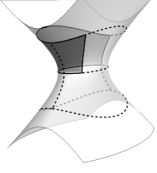
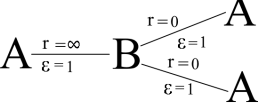
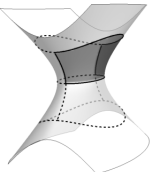
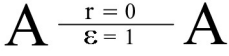
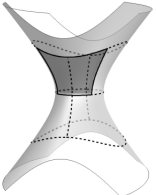
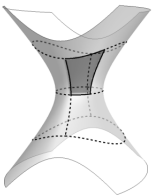
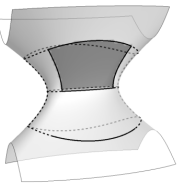
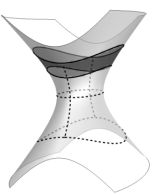
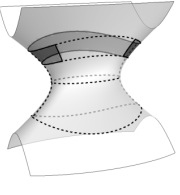
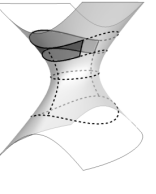


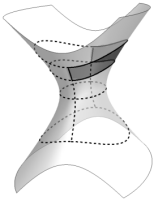
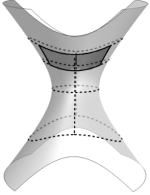
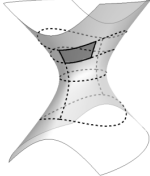
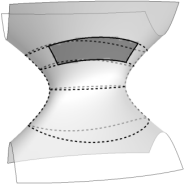
Рис. 12. На рисунках пунктиром обозначены λ -циклы, а сплошной линией μ -циклы

4.4. Классификация геодезических билиардов на однополостном гиперboloиде.

Номер	Область	Меченая молекула билиарда	тип Q^3
1		$ \begin{array}{c} \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} B \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_2 \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} $	$S^1 \times S^2$
2		$ \begin{array}{c} \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} B \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} D_3 \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} $	S^3
3		$ \begin{array}{c} \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} B \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} $	S^3
4		$ \begin{array}{c} \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} B \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=\infty \\ n=0 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \epsilon=1 \end{array} \begin{array}{c} r=0 \\ n=0 \end{array} \end{array} $	S^3

5			S^3
6			S^3
7			S^3
8			$S^1 \times S^2$
9			S^3
10			S^3
11			S^3

12		$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	S^3
13		$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A$	S^3
14		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	S^3
15		$A \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} C \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} C \end{cases} \begin{cases} \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	$S^1 \times S^2$
16		$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} D \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	S^3
17		$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} B \begin{cases} \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \\ \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A \end{cases}$	S^3

18		$A \begin{matrix} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{matrix} A$	S^3
19		$A \begin{matrix} r=\infty \\ \varepsilon=1 \end{matrix} B \begin{matrix} r=0 \\ \varepsilon=1 \\ r=0 \\ \varepsilon=1 \end{matrix} A$	S^3
20		$A \begin{matrix} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{matrix} A$	S^3
21		$A \begin{matrix} r=0 \\ \varepsilon=1 \end{matrix} A$	S^3

§ 5. Классификация билиардных столов и геодезических билиардов на двуполостном гиперboloиде

5.1. Классификация билиардных столов. Рассмотрим семейство софокусных квадрик $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1$, где $a > b > c$. Зафиксируем $\lambda \in (b, a)$. Полученная квадрика — двуполостный гиперboloид S . Следующее утверждение доказывается прямым вычислением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *На двуполостном гиперboloиде S существует в точности четыре точки, через которые проходит (помимо S) в точности одна софокусная с S квадрика, и она является плоскостью $\{z = 0\}$. При этом данные точки являются омбилическими и только они.*

Поскольку все билиардные столы — линейно связанные множества, то будем рассматривать геодезические билиарды на правой полости гиперboloида S . На рисунке 13 представлена сетка эллиптических координат на полости двуполостного гиперboloида.

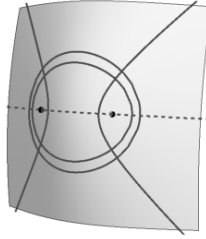


Рис. 13. Сетка эллиптических координат на двуполостном гиперboloиде

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *На двуполостном гиперboloиде существует в точности 13 типов неэквивалентных бильярдных столов.*

Доказательство. Рассмотрим правую полость гиперboloида S . Обозначим ее K . Пусть O_1, O_2 — омбилические точки на K , при этом координата y точки O_1 больше нуля. Разрежем K по двум лучам в плоскости $\{z = 0\}$: $(-\infty, Oy_2]$ и $[Oy_1, +\infty)$. В силу ортогональности эллиптических координат мы получили полосу $\Pi = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ в декартовой плоскости, где вертикальные линии сетки декартовых координат соответствуют координатным линиям сетки эллиптических координат на двуполостном гиперboloиде, высекаемыми однополостными гиперboloидами, а горизонтальные — линиям, высекаемыми эллипсоидами.

Получаем отображение $F : \Pi_1 \rightarrow K$. Легко заметить, что если $D \in \mathcal{A}(S)$, то $F^{-1}(D)$ — объединение не более трех прямоугольников. Перенесем отношение эквивалентности бильярдных столов на Π_1 посредством отображения F . Легко заметить, что симметрия относительно плоскости $\{x = 0\}$ переносит область на другую полость гиперboloида. Таким образом, $F^{-1}(D_1) \sim F^{-1}(D_2)$, где $D_1, D_2 \in \mathcal{A}(G) \Leftrightarrow F^{-1}(D_1)$ можно получить из $F^{-1}(D_2)$ путем следующих элементарных преобразований:

- Растяжением вверх-вниз, влево-вправо участков границы стола. При этом, участки границы при растяжении не должны соприкасаться с границей полосы Π_1 , а так же участки, лежащие на границе полосы Π_1 диаметрально противоположно относительно оси Ox , должны сохранять это свойство при деформации границ;
- Симметрией полосы относительно оси Ox .
- Симметрией полосы относительно оси Oy .

Это отношение эквивалентности является более простым. Перебором всех возможных вариантов получаем, что на двуполостном гиперboloиде ровно 13 типов неэквивалентных бильярдных столов. ■

5.2. Построение грубых молекул. Поскольку все столы из $\mathcal{A}(E)$ являются компактными множествами, то без ограничения общности можно считать, что все они лежат внутри некоторого эллипсоида E , софокусного с S , с параметром $c - \delta$. Обозначим $K' = K/Out(E)$. Рассмотрим аффинные отображения $L_1 : [c - \delta, c] \rightarrow [c, b]$ и $L_2 : [c, b] \rightarrow [b, a]$ такие, что $L_1(c - \delta) = c, L_1(c) = b, L_2(c) = b, L_2(b) = a$. Сопоставим каждой точке P на K' точку $\mathcal{F}(P)$ на эллипсоиде E_1 по следующему правилу: если точка $P \in K'$ имеет эллиптические координаты

λ, μ , при этом декартовы координаты точки P таковы, что $y_P > 0, z_P > 0$, то $\mathcal{F}(P)$ – точка на верхнем полуэллипсоиде с эллиптическими координатами $L_1(\lambda), L_2(\mu)$ и декартовыми $x > 0, y > 0$. На остальные точки K' распространим определение с сохранением знаков в квадрантах. При таком отображении омбилические точки перейдут в омбиличексие. Очевидно, что это отображение является гомеоморфизмом K' и верхней половины эллипсоида.

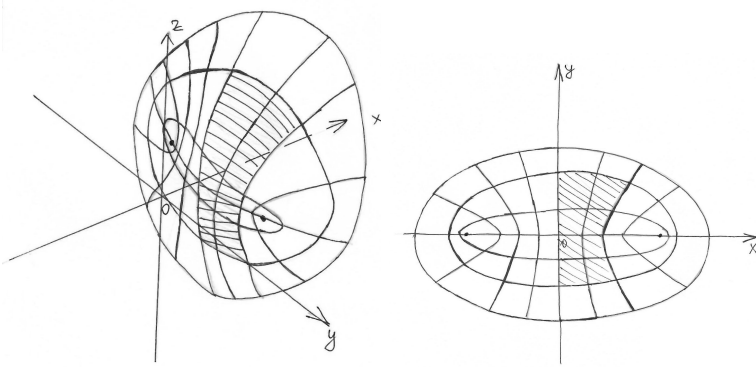


Рис. 14. Иллюстрация действия отображения \mathcal{F}

Легко заметить, что бильярдные столы на двуполостном гиперboloиде перейдут в бильярдные столы на эллипсоиде. На рисунке 14 показано действие отображения \mathcal{F} . При построении грубых молекул можно заметить, что грубые молекулы бильярдов внутри $\mathcal{F}(D)$ и D совпадают. Этот факт проверяется непосредственным построением. Рассуждения в построении грубых инвариантов совпадают с рассуждениями в доказательствах утверждений из пункта 3.2. Таблица, в которой посчитаны грубые инварианты для каждого типа областей, находится в пункте 5.4.

5.3. Вычисление инвариантов Фоменко - Цишанга.. Как и в предыдущем пункте, для любого бильярдного стола $D \in \mathcal{A}(E)$ $\mathcal{F}(D)$ и D имеют равные инварианты Фоменко-Цишанга. Доказательство этого факта производится непосредственным вычислением. Таблица, в которой вычислены все меченые молекулы, расположена в пункте 5.4.

Однако можно построить гомеоморфизм $\mathcal{G} : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, который будет переводить бильярдные столы на полости K двуполостного гиперboloида E в плоские бильярдные столы, ограниченные конечным числом софокусных квадрик и имеющие углы на границе излома равные $\frac{\pi}{2}$, и при этом бильярды на этих столах будут лиувиллево эквивалентны. Рассмотрим в \mathbb{R}^2 семейство софокусных квадрик вида:

$$\frac{x^2}{a' - \lambda} + \frac{y^2}{b' - \lambda} = 1$$

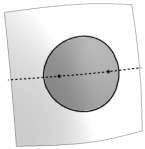
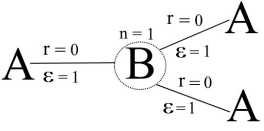
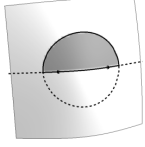
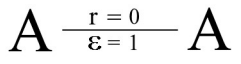
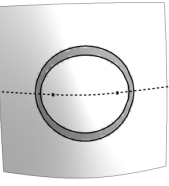
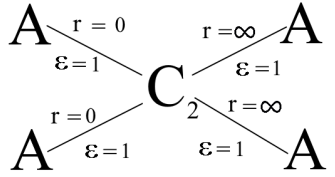
Рассмотрим аффинные отображения $L_1 : (-\infty, c] \rightarrow (-\infty, b']$ и $L_2 : [c, b] \rightarrow [b', a']$ такие, что $L_1(c) = b', L_2(c) = b', L_2(b) = a'$. Пусть $P \in K$ и P и x_P, y_P, z_P

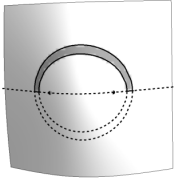
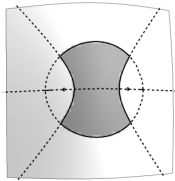
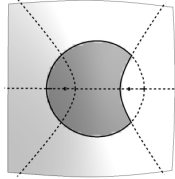
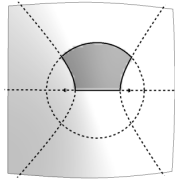
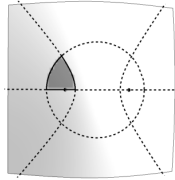
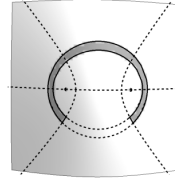
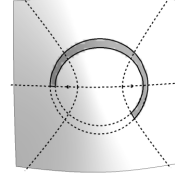
– ее декартовы координаты в \mathbb{R}^3 . Пусть P имеет эллиптические координаты λ, μ , тогда положим $\mathcal{G}(P) \in \mathbb{R}^2$ – точка такая, что $L_1(\mu), L_2(\lambda)$ – ее эллиптические координаты на плоскости относительно заданного семейства и $sign(x_{\mathcal{G}}(P)) = sign(y_P), sign(y_{\mathcal{G}}(P)) = sign(z_P)$. Заметим, что омбилические точки по непрерывности перейдут в фокусы. Очевидно также, что при таком отображении бильярдные столы переходят в бильярдные столы. Тот факт, что отношение эквивалентности бильярдных столов и лиувиллева эквивалентность самих бильярдов при этом отображении сохраняется, следует из определения отображения \mathcal{G} и непосредственных вычислений инвариантов Фоменко-Цишанга. Таким образом, нами доказаны следующие теоремы:

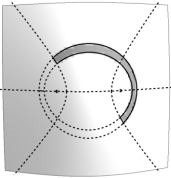
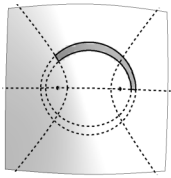
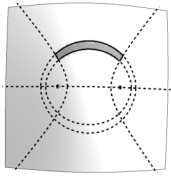
ТЕОРЕМА 5.1. Пусть на плоскости задано семейство софокусных квадрик. Тогда существует гомеоморфизм полости двуполостного гиперboloида и этой плоскости, при котором бильярдные столы переходят в бильярдные столы и сохраняется отношение эквивалентности бильярдных столов.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть на плоскости задано семейство софокусных квадрик. Тогда существует гомеоморфизм полости двуполостного гиперboloида и этой плоскости, при котором бильярд внутри любого стола на двуполостном гиперboloиде лиувиллево эквивалентен бильярду внутри образа этого стола.

5.4. Классификация геодезических бильярдov на двуполостном гиперboloиде.

Номер	Область	Меченая молекула бильярда	тип Q^3
1			S^3
2			S^3
3			$S^2 \times S^1$

4		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$	S^3
5		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=\infty} B \begin{matrix} \nearrow_{r=0} A \\ \searrow_{\varepsilon=1} A \\ \nearrow_{r=0} A \\ \searrow_{\varepsilon=1} A \end{matrix}$	S^3
6		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} \overset{n=0}{A^*} \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$	S^3
7		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$	S^3
8		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$	S^3
9		$A \begin{matrix} \nearrow_{\varepsilon=1}^{r=0} \\ \nearrow_{\varepsilon=1}^{r=0} \\ \nearrow_{\varepsilon=1}^{r=0} \end{matrix} D_3 \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=\infty} A$	S^3
10		$A \begin{matrix} \nearrow_{\varepsilon=1}^{r=0} \\ \nearrow_{\varepsilon=1}^{r=0} \end{matrix} B \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=\infty} A$	S^3

11		$ \begin{array}{c} A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} B \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=\infty} A \\ A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} B \end{array} $	S^3
12		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$	S^3
13		$A \xrightarrow[\varepsilon=1]{r=0} A$	S^3

Список литературы

- [1] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, Генетическое введение в динамику систем с ударами, М.: Изд-во МГУ, 1991
- [2] С. Табачников, Геометрия и бильярды, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Ин-т компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011, 180 с.; пер. с англ.: S. Tabachnikov, Geometry and billiards, Stud. Math. Libr., 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005, xii+176 pp.
- [3] Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, Изд. дом "Удмуртский университет Ижевск, 1999, 408 с.; пер. с англ.: G. D. Birkhoff, Dynamical systems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 9, Amer. Math. Soc., New York, 1927, viii+295 pp.
- [4] V. Dragovich, M. Radnovich, "Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards Regul. Chaotic Dyn.", 14:4-5 (2009), 479-494.
- [5] В. Драгович, М. Раднович, Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика М. - Ижевск, 2010, 338 с.
- [6] В. В. Фокичева, "Описание особенностей системы "бильярд в эллипсе, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2012, No 5, 31 - 34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for system "billiard in an ellipse, Moscow Univ. Math. Bull., 67:5-6 (2012), 217-220.
- [7] В. В. Фокичева, "Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, No 4, 18-27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas Moscow Univ. Math. Bull., 69:4 (2014), 148-158.

- [8] *В. В. Фокичева* Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Математический сборник. – 2015. – Т. 206, № 10. – С. 127-176.
- [9] *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* "Интегрируемые геодезические потоки ориентированных двумерных поверхностей лиувиллево эквивалентны топологическим бильярдам". - Известия РАН, 2019, 83:6, с.3-43,
- [10] *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* "Понижение степени интегралов гамильтоновых систем с помощью бильярдов". ? Доклады Академии наук, 2019, 486(2), с.151-155
- [11] *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.*"Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности". - Вестник Моск. Универ., 2019, №3, с.15 - 25. Английский перевод: А.Т.Fomenko, V.V.Vedyushkina. "Billiards and Integrability in Geometry and Physics. New Scope and New Potential". - Moscow University Mathematics Bulletin, May 2019, Volume 74, Issue 3, pp. 98-107.
- [12] *В.В. Ведюшкина(Фокичева) ,А.Т. Фоменко* "Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы". ? Известия РАН, серия Математика, 81:4, 2017, с.20 - 67. Английский перевод: V.V.Vedyushkina (Fokicheva) and A.T.Fomenko. "Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems". Izvestiya: Mathematics 81:4, 2017, pp.688-733. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM8602>.
- [13] *В.В.Ведюшкина ,А.Т. Фоменко* "Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела". - Доклады РАН, серия: математика. 2015, том 465:2, с.150-153. Английский перевод: V.V.Fokicheva and Academician A.T.Fomenko. Integrable Billiards Model Important Integrable Cases of Rigid Body Dynamics. ISSN 1064-5624, Doklady Mathematics, 2015, Vol.92, No.3, pp. 1-3. Pleiades Publishing, Ltd., 2015.
- [14] *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С.*"Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами"// Доклады Академии наук. -2018. - Т.479, № 6. - С. 607 - 610. Английский перевод: V.V.Vedyushkina, A.T.Fomenko, I.S.Kharcheva. - "Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards Dokl. Math., 97:2, 2018, 174 - 176.
- [15] *V. Lazutkin* KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions, Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [16] *А.Т.Фоменко.* "The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems". - Russian Math. Surveys. 1989. v.44, No.1, pp.181-219. (РИНЦ-7)
- [17] *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко,* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, Т.1,2, Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999
- [18] *A.V.Bolsinov and A.T.Fomenko.* "Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification". - CHAPMAN and HALL/CRC. A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. USA, 2004. Объем - 744 стр.
- [19] *Фоменко А. Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Известия АН СССР, 1990, т. 54, No3, с. 546-575.
- [20] *Ведюшкина В. В.* Инварианты Фоменко – Цишанга невыпуклых топологических бильярдов. // Математический сборник. – 2019. – Т. 210, № 3. – С. 17 – 74.

Г. В. Белозеров (G. V. Belozеров)

МГУ им. М.В.Ломоносова

E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

Поступила в редакцию

10.11.2019