Классификация особенностей типа седло-фокус

Козлов И.К.* Ошемков А.А.†
ikozlov90@gmail.com a@oshemkov.ru

Аннотация

В работе приводится алгоритм топологической классификации невырожденных особенностей типа седло-фокус интегрируемых гамильтоновых систем с тремя степенями свободы. На основе этого алгоритма получен полный список особенностей типа седло-фокус сложности 1 и 2, т.е. особенностей с 1 или 2 особыми точками ранга 0 на слое.

1 Введение

В этой работе мы исследуем топологическое устройство особенностей интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности особого слоя. Точнее, исследуется классификация невырожденные особенности типа седло-фокус с точностью до лиувиллевой эквивалентности (т.е. с точностью до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля). Приводится алгоритм, который строит полный список особенностей типа седло-фокус данной сложности k (т.е. с k особыми точками ранга 0 на слое). На основе этого алгоритма получен полный список особенностей типа седло-фокус сложности 1 и 2 (см. Теорему 2).

Все необходимые сведения об интегрируемых системах и невырожденных особенностях можно найти в [2] или [3]. Коротко дадим лишь необходимые нам определения.

Интегрируемая гамильтонова системой с n степенями свободы — это $2n$-мерное симплектическое многообразие (M, ω) с заданными на нём n функций $f_1, \dots, f_n$, у которых гамильтоновы векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ полны и попарно коммутируют между собой. Отображение $\mathfrak{F} = (f_1, \dots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ называется **отображением момента** интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, f_1, \dots, f_n)$.

Определение 1. Разложение фазового пространства интегрируемой гамильтоновой системы на связные компоненты $\mathfrak{F}^{-1}(y)$ (т.е. на связные компоненты поверхностей уровня первых интегралов $f_1, \dots, f_n$) называется **слоением Лиувилля**, соответствующим этой системе.

Определение 2. Две интегрируемые системы на U_1 и U_2 называются **топологически эквивалентными** (или лиувиллево эквивалентными), если существует гомеоморфизм $\Psi \colon U_1 \to U_2$, который переводит каждый слой слоения Лиувилля на U_1 в слой слоения Лиувилля на U_2.

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
†МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

В этой работе мы рассматриваем слоения, у которых все особенности невырожденны. Невырожденные особенности являются для интегрируемых систем особенностями общего положения, по сути это многомерный симплектический аналог “морсовских особенностей”. Мы приведём лишь характеристическое свойство невырожденных особенностей, которое можно взять за определение (точное определение см. в [2] или [3]).

Есть три типа невырожденных особенностей, они задаются следующими слоениями Лиувилля:

1. E — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией $p^2 + q^2$ (эллиптический тип);
2. H — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией pq (гиперболический тип);
3. F — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^4, dp \wedge dq)$ коммутирующими функциями $p_1q_1 + p_2q_2, p_1q_2 - q_1p_2$ (тип фокус-фокус).

Теорема 1 (Элиасон; см.[3, 4].). *Слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга r локально послойно симплектоморфно прямому произведению k_e экземпляров слоения E, k_h экземпляров слоения H и k_f экземпляров слоения F, а также тривиального слоения $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$.*

Тройка (k_e, k_h, k_f) называется **типом** невырожденной точки. Легко видеть, что тип точки определён однознано.

Особенностью мы будем называть росток отображения момента на особом слое. Особенность мы будем называть **невырожденной** (эллиптической, гиперболической, фокусной), если все её особые точки невырожденны (и имеют соответственно эллиптический, гиперболический тип или тип фокус-фокус).

Ранг особенности — это минимальный ранг точек на ней. Для рассматриваемых в этой работе особенностей типа почти прямое произведение (см. Определение 3) типы всех её точек минимального ранга совпадают. Этот тип (k_e, k_h, k_f) называется **типом особенности**.

Пусть $V_1, \ldots, V_m$ — слоения без особенности или простейшие особенности: эллиптические, гиперболические или фокусные. Их произведение $V_1 \times \cdots \times V_m$ — это особенность типа прямого произведения.

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — действия группы G на особенностях $V_1, \ldots, V_m$.

Определение 3. Особенность типа **почти прямого произведения** — это фактор прямого произведения $V_1 \times \cdots \times V_m$ по действию

$$\psi(g)(x_1, \ldots, x_m) = (\psi_1(g)(x_1), \ldots, \psi_m(g)(x_m))$$

конечной группы G, которое удовлетворяет следующим условиям.

1. Действие на каждом сомножителе $\psi_i(g) : V_i \to V_i$ — это симплектоморфизмы, сохраняющие функции, задающие слоение Лиувилля (и соответственно само слоение Лиувилля).
2. Действие ψ группы G на $V_1 \times \cdots \times V_m$ свободно.

Замечание 1. Мы рассматриваем только такие особенности, потому что Н. Т. Зунг в [10] доказал, что любая невырожденная особенность, удовлетворяющая условию нерасщепляемости (т.е. для каждой особой точки минимального ранга локальная бифуркационная диаграмма совпадает с бифуркационной диаграммой всей особенности), лиувиллево эквивалентная особенности типа почти прямого произведения. Большинство особенностей, которые встречаются в интегрируемых системах в механики и физике — нерасщепляемые (см. [3]). Хотя можно построить "искуственные" примеры "расщепимых" особенностей (см. [2]).

Ранее были классифицированы следующие типы невырожденных особенностей:

- Полный список особенностей типа седло-седло (т.е. особенностей типа $(0, 2, 0)$ и ранг 0) был описан и изучен в работах Л. М. Лермана Я. Л. Уманского [7], А.В.Болсинова [1], В.С.Матвеева [8]. Оказывается, что существует 4 и 39 топологически различных особенностей сложности 1 и 2 соответственно.
- Полный ответ в чисто седловом случае, т.е. для особенностей типа $(0, n, 0)$ и ранга 0 был получен А. А. Ошемковым [9]. Например, существует 32 особенности ранга 0 типа $(0, 3, 0)$ сложности 1.
- Классификация особенностей ранга 0 типа $(0, 0, m)$ произвольной сложности (т.е. в чисто фокусном случае) была сделана А. М. Изосимовым [5].

В этой работе мы будем рассматривать особенности типа седло-фокус (т.е. типа $(0, 1, 1)$) ранга 0. Точнее (в соответствии с Замечанием 1) мы будем рассматривать особенности типа почти прямого произведения $V^2_h \times V^4_f/G$, т.е. факторы прямого произведения гиперболической V^2_h и фокусной особенности V^4_f по свободному действию конечной группы G.

Замечание 2. В дальнейшем будем считать, что никакой неединичный элемент G не действует тривиально на V^2_h или V^4_f. В противном случае прямое произведение можно было бы профакторизовать по действию таких элементов.

Благодарности. Авторы благодарны сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ, в особенности академику А. Т. Фоменко, за оказанную поддержку при написании работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01303).

2 Основные результаты

2.1 Ограничения на атомы и группы

Утверждение 1. *Любая невырожденная особенность типа седло-фокус лиувиллево эквивалентна почти прямому произведению вида*

$$(V_m \times F_n)/\mathbb{Z}_k, \tag{1}$$

т.е. мы всегда можем считать, что группа $G = \mathbb{Z}_k$.

Заметим, что

1. Сложность особенности (1) равна md, где $n = kd$.
2. Порождающая $\mathbb{Z}_k$ действует на V_m как элемент $\mathrm{Sym}(V_m)$ порядка k. При этом $|\mathrm{Sym}(V_m)| \le 2m$.

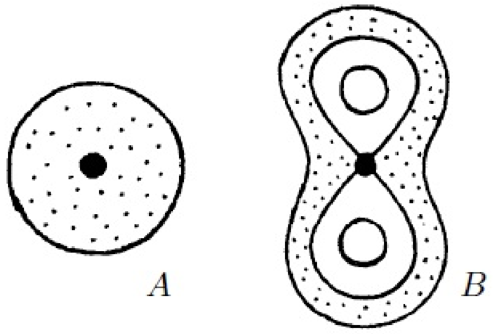

Рис. 1: Атомы A и B

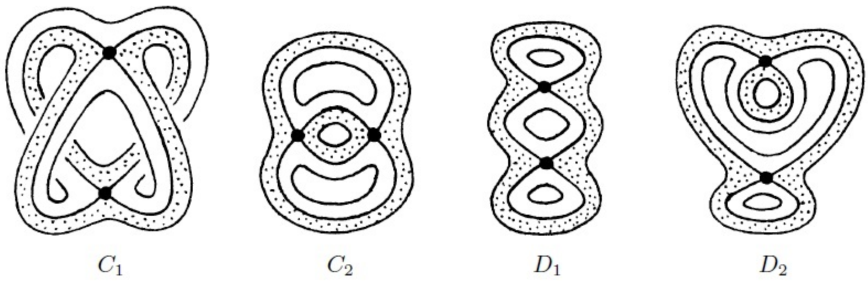

Рис. 2: Седловые атомы сложности 2

Основываясь на этих соображениях, получаем алгоритм получения полного списка особенностей типа седло-фокус сложности p:

1. Перебираем делители m числа p.
2. Для каждого седлового атома V_m сложности m рассматриваем всевозможные k т.,ч. в группе $\mathrm{Sym}\,(V_m)$ содержится подгруппа $\mathbb{Z}_k$.
3. Рассматриваем всевозможные почти прямые произведения вида
$$\left(V_m \times F_{\frac{kp}{m}}\right)/\mathbb{Z}_k,$$
если они существуют.

2.2 Особенности типа седло-фокус сложности 1 и 2

Опишем теперь явно все невырожденные особенности типа седло-фокус (т.е. типа $(0, 1, 1)$) малой сложности.

Теорема 2. *1. Любая особенность типа седло-фокус сложности* 1 *лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих* 2 *почти прямых произведений:*
$$B \times F_1, \quad (B \times F_2)/\mathbb{Z}_2.$$

2. Любая особенность типа седло-фокус сложности 2 *лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих из* 11 *почти прямых произведений:*
$$B \times F_2, \quad (B \times F_4)/\mathbb{Z}_2, \quad D_1 \times F_1, \quad (D_1 \times F_2)/\mathbb{Z}_2, \quad D_2 \times F_1,$$
$$C_1 \times F_1, \quad (C_1 \times F_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (C_1 \times F_4)/\mathbb{Z}_4, \quad C_2 \times F_1,$$
$$\text{\textit{и два варианта}}\ (C_2 \times F_2)/\mathbb{Z}_2.$$

Список литературы

[1] A. V. Bolsinov, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant. Topological classification of integrable systems”, *Advances in Soviet Mathematics*, AMS, Providence, **6** (1991), 147–183.

[2] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Singularities of integrable Hamiltonian systems”, In: Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge Scientific Publ., 2006, 1–67.

[3] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т. 1, 2, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999, 444 с., 447 с.

англ. пер.: A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 с.

[4] L. H. Eliasson, “Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case”, *Comment. Math. Helv.*, **65**:1 (1990), 4–35.

[5] А. М. Изосимов, “Классификация почти торических особенностей лагранжевых слоений”, *Матем. сб.*, **202**:7 (2011), 95–116.

Англ. пер.: A. M. Izosimov, “Classification of almost toric singularities of Lagrangian foliations”, *Sb. Math.*, **202**:7 (2011), 1021–1042.

[6] L. M. Lerman L.M. and Ya. L. Umanskii, “Structure of the Poisson action of $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold. I, II”, *Selecta Math. Sov.*, **6** (1987), 365–396; **7** (1988), 39–48.

[7] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, “Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I, II, III”, *Матем. сб.*, **183**:12 (1992), 141–176; **184**: 4 (1993), 103–138; **186**: 10 (1995), 89–102.

англ. пер.: L. M. Lerman L.M. and Ya. L. Umanskii, “Classification of four-dimensional integrable systems and the Poisson action of $\mathbb{R}^2$ in extended neighborhoods of simple singular points. I, II, III”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 511–542; *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **78**:2 (1994), 479–506; *Sb. Math.*, **186**:10 (1995), 1477–1491.

[8] В. С. Матвеев, “Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло”, *Матем. сб.*, **187**:4 (1996), 29–58.

Англ. пер.: V. S. Matveev, “Integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. The topological structure of saturated neighborhoods of saddle-saddle and focusfocus type points”, *Sb. Math.*, **187**:4 (1996), 495–524.

[9] А. А. Ошемков, “Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 63–102.

Англ. пер.: A. A. Oshemkov, “Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, **201**:8 (2010), 1153–1191.

[10] Nguyen Tien Zung, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities”, *Compositio Math.*, **101** (1996), 179–215.

[11] Nguyen Tien Zung, "A note on focus-focus singularities", *Diff. Geom. and Appl.*, **7** (1997), 123–130.