

УДК 517.938.5

В.В. Ведюшкина

Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе.

В статье рассмотрен интегрируемый бильярд на книжке – комплексе, склеенном из нескольких бильярдных листов вдоль общего корешка. Каждый лист – это плоская область, ограниченная дугами софокусных квадриков, бильярд в которой, как известно, интегрируем. Оказалось, что для ряда интересных случаев такого бильярда инварианты Фоменко–Цишанга (меченые молекулы W^*) лиувиллевой эквивалентности описывают нетривиальные торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе – изоморфизмических многообразиях таких бильярдных.

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярд, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга.

§ 1. Введение

Фиксируем на плоскости семейство софокусных квадриков. Рассмотрим (элементарный) бильярд в связном подмножестве плоскости, ограниченном кусочно-гладкими кривыми, составленными из дуг софокусных квадриков (потребуем, чтобы в точках излома углы не превосходили π). Все углы в точках излома кривых в этом случае равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку известно, что софокусные квадрики пересекаются всегда под прямыми углами. Оказывается, что для любой фиксированной траектории-ломаной её звенья лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике (эллипсу или гиперболу), принадлежащей тому же софокусному семейству, что и граница бильярда. Таким образом, помимо длины вектора скорости (который сохраняется при абсолютно упругих отражениях на границе), вдоль траекторий сохраняется параметр софокусной квадрики, то есть система обладает двумя независимыми интегралами (см. подробнее [1] В.В. Козлов, Д.В. Трещёв)

Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности были подробно изучены в работах [2, 3] В. Драгович, М. Раднович и [4, 5] В. Фокичевой.

Естественным обобщением таких бильярдных являются так называемые обобщенные или топологические бильярды – многообразия, полученные склейками элементарных бильярдных вдоль сегментов их границ. Бильярдная частица двигаясь по одной области, при попадании на сегмент склейки продолжает движение после отражения уже по другой области. В случае если сегмент склейки – выпуклый, полная лиувиллева классификация была сделана в работе [6]. Если же сегмент склейки невыпуклый, то на некотором уровне интеграла траекторию, попавшую на сегмент склейки определить нельзя (речь идёт

о траектории, которая попадает на сегмент склейки по касательной). Однако, слоение Лиувилля по-прежнему корректно определено. Примеры таких слоений были опубликованы в работах В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко [7, 8], а полная классификация была сделана автором в работе [9].

Далее автором была предложена конструкция так называемой бильярдной книжки. Рассмотрим комплекс, склеенный из нескольких элементарных бильярдов вдоль общих сегментов границ. При этом существуют границы – сегменты склейки – по которым склеены более чем два бильярда. На каждом сегменте склейки – корешке книжки – укажем некоторую перестановку. При этом потребуем, чтобы если два корешка книжки имели общую точку, то перестановки, указанные на этих корешках, коммутировали между собой. В этом случае на таком комплексе можно определить движение так. Материальная точка при движении по бильярду-листу с номером i , попадая на сегмент границы l этого бильярда переходит на лист с номером $\sigma(i)$, где через σ обозначена перестановка, приписанная сегменту l .

В работе будет рассматриваться частый случай бильярдной книжки, а именно бильярдная книжка, которая склеена из одинаковых или эквивалентных друг другу бильярдов-листов.

Оказывается, что если книжка склеена из элементарных бильярдов, ограниченных фокальной прямой, двумя дугами гипербол, одна из которых выпуклая, и дугой эллипса, то при подходящем выборе перестановок в бильярдной книжке в её изоэнергетическом многообразии можно получить любой атом ([10] В.В.Ведюшкина, И.С.Харчева). Тем самым, доказан важный раздел гипотезы А.Т.Фоменко о реализации бильярдами невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы, см. [11].

Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы. Если торы Лиувилля на всюду плотном множестве являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости), то лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания решений (т.е. интегральных траекторий) на трёхмерных уровнях постоянной энергии. Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. книгу [12] А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко). Вычисление инварианта Фоменко–Цишанга позволило обнаружить лиувиллеву эквивалентность многих интегрируемых случаев динамики твердого тела (на ряде изоэнергетических поверхностей) полученным бильярдам с помощью сравнения меченых молекул (см. работы В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко [13, 7]).

Поэтому особый интерес приобретает вопрос – какие 2-слоения на трехмерных многообразиях реализуются интегрируемыми бильярдами? В настоящей работе рассматриваются два класса таких слоений – на линзовых пространствах и на трехмерном торе. Линзовые пространства – широко известный и важный класс 3-многообразий, возникающий также в теории интегрируемых гамильтоновых систем, см. [12]. Трехмерный тор несет на себе тори-

ческие слоения, являющиеся слоениями Лиувилля интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе. Эти слоения давно известны и изучаются в теории трехмерных многообразий. Напомним, что такие слоения Лиувилля взаимно-однозначно задаются инвариантом Фоменко-Цишанга, являющимся графом с рациональными метками (т.н. мечеными молекулами). В настоящей работе доказано, что слоения Лиувилля на линзовых пространствах и трехмерном торе (отвечающие интегрируемым конечно-листно лиувиллевым римановым метрикам) реализуются подходящими интегрируемыми билиярдами (то есть им лиувиллево эквивалентны).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть B_0 элементарный билиард, имеющий пустое пересечение с фокальной прямой и ограниченный двумя дугами гипербол (выпуклой и невыпуклой) и двумя дугами эллипсов. Рассмотрим \mathbb{B} – билиардную книжку, склеенную из n экземпляров билиардов B_0 , причём на выпуклом гиперболическом корешке книжки задана циклическая перестановка $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$, а на выпуклом эллиптическом корешке – перестановка σ^k . Перестановки, соответствующие невыпуклым дугам билиарда B_0 тождественные. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для данного билиарда, имеет вид $A - A$, где метка $r = \frac{k}{n}$, $\varepsilon = 1$.

В этом случае изоэнергетическая поверхность Q^3 гомеоморфна линзовому пространству $L(n, k)$. Более подробно, см. 4.

Рассмотрим гомеоморфный тору топологический билиард, склеенный из четырех экземпляров билиарда B_0 . Рассмотрим n экземпляров такого топологического билиарда. Зададим на их объединении $T(B_0, n, k)$ билиардное движение следующим образом. На невыпуклых ребрах склейки движение остаётся тем же. А на выпуклых помимо смены листа происходит и смена билиарда. При этом на выпуклом гиперболическом корешке книжки смена происходит с помощью циклической перестановки $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$, а на выпуклом эллиптическом корешке – перестановки σ^k . Изоэнергетическая поверхность такого билиарда будет гомеоморфна трехмерному тору. Полученное слоение нетривиально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для билиардной книжки $T(B_0, n, k)$ имеет вид, представленный на рисунке 1.

Доказательство данного утверждения содержится в 5.

Если в качестве топологического билиарда взять гомеоморфный тору билиард склеенный из большего числа экземпляров B_0 , то выбирая подходящие значения граничных квадрик, в изоэнергетической поверхности можно получить слоение, соответствующее слоению конечнолистно лиувиллевой метрики на двумерном торе [14].

§ 2. Лиувиллева эквивалентность. Инвариант Фоменко-Цишанга.

Напомним ряд классических определений (см. [12, 15, 16, 17]). Рассмотрим симплектическое многообразие (M^4, ω) , где ω – симплектическая форма,

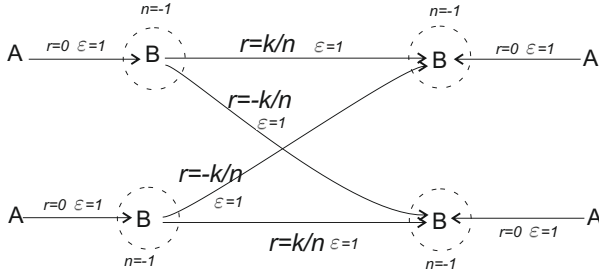


Рис. 1. Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для бильярдной книжки $T(B_0, n, k)$.

т.е. невырожденная, замкнутая кососимметрическая форма на касательных векторах к M^4 : $\omega(a, b) := \omega_{ij}a^ib^j$. Если нам дана функция H на данном многообразии, то можно определить векторное поле $sgradH$, ей соответствующее, по следующему правилу $(sgradH)^i = w^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$. Если динамическая система допускает подобное описание, то она называется гамильтоновой, а функция H в этом случае называется гамильтонианом.

Предположим, что на M^4 существует функционально независимая с H функция f такая, что скобка Пуассона $\{f, H\} := \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} = 0$. В этом случае говорят, что функции f и H находятся в инволюции. Легко понять, что функция f также является интегралом системы, а динамическую систему называют интегрируемой по Лиувиллю.

Так как f и H функционально независимы, то за исключением некоторого количества особых значений интеграла f градиенты f и H линейно независимы. Если при этом гамильтоновы потоки являются полными, то к совместной поверхности уровня функций f и H можно применить теорему Лиувилля, согласно которой эта совместная поверхность уровня, в том случае когда она компактна и связна, гомеоморфна тору, вблизи которого можно найти координаты, называемые действие-угол, такие, что в этих координатах гамильтоново векторное поле выпрямляется.

Полученное расслоение Q^3 (а значит и M^4) называется слоением Лиувилля. Почти все торы при этом являются замыканием решений системы. Остальные поверхности уровня функций f и H (то есть те, где $gradf$ и $gradH$ линейно зависимы) называются особыми. Для них также существует эффективный метод описания. Ограничим нашу систему с многообразия M^4 на изоэнергетическую поверхность Q_H^3 . Далее покажем, как можно описать расслоение Q_H^3 на торы и особые слои.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4 , обладающих, соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 . Рассмотрим изоэнерге-

тические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

В силу теоремы Лиувилля многообразие Q^3 представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам. Рассмотрим граф Роба функции $f|_{Q^3}$ (базы возникающего слоения Лиувилля). Структура слоения в малой окрестности особого слоя, отвечающего любой вершине этого графа, описывается согласно теореме А.Т.Фоменко комбинаторным объектом, называемым атомом. Граф W , для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко.

Приведём примеры необходимых нам двумерных атомов (окрестности прообразов критических точек функций Морса). Двумерный атом A гомеоморфен диску – он расслоен на концентрические окружности, стягивающиеся на особый слой – центральную точку. Двумерный атом B представляет собой перестройку одной окружности в две, особым слоем этого атома является “восьмерка”. Двумерный атом C_2 представляет собой перестройку двух окружностей в две.

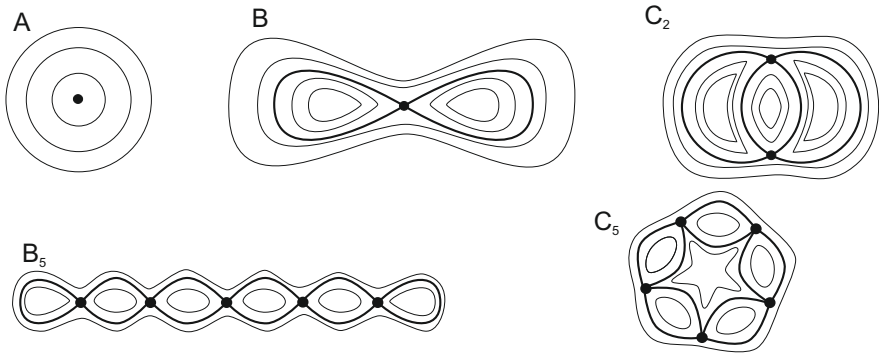


Рис. 2. Двумерные атомы A , B и C_2 , а также примеры двумерных атомов серий B и C , а именно, атомы B_5 и C_5 . Жирным выделен особый слой.

Для описания топологии систем в настоящей работе нам потребуются две бесконечных серии атомов. Так как в различных источниках их обозначения разнятся, то примем за атомы серий B_n и C_n атомы, изображённые на рисунке 2.

Поясним, что в наших обозначениях атом B является частным случаем серии B_n (при $n = 1$), а атом C_2 частным случаем серии максимально симметричных атомов C_n (при $n = 2$). Число n в атомах серий B_n и C_n это число вершин графов, соответствующих особому слою. Примем обозначение, при котором B_0 и C_0 гомеоморфны прямому произведению окружности на отрезок (пустой граф), а C_1 гомеоморфен атому B .

Согласно теореме А.Т.Фоменко [12] любой трехмерный атом является либо прямым произведением некоторого двумерного атома на окружность (такие атомы называются атомами без звездочек) либо является расслоением Зейферта, особый слой которого имеет тип $(2, 1)$. Примеры атомов см. на рис. 3.

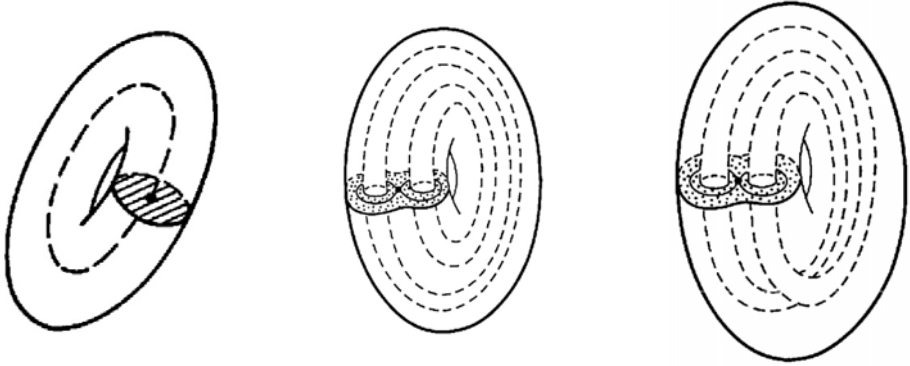


Рис. 3. Трехмерные атомы A , B , A^*

Построенная молекула Фоменко – граф W – не описывает полностью топологию слоения Лиувилля, так как она не содержит всей информации о склейках регулярных окрестностей особых слоев. Для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Структура атома-бифуркации задаёт правило выбора допустимого базиса. Более подробное изложение приведено в работах [12, 15, 17], здесь ограничимся явным указанием построения.

Случай атома A .

В этом случае бифуркация представляет собой полноторие. В качестве первого базисного цикла λ необходимо выбрать меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся внутри полнотория в точку. В качестве второго базисного цикла μ можно взять произвольный цикл, дополняющий λ до базиса. В этом случае цикл μ можно считать слоем расслоения Зейферта. Слои расслоения Зейферта имеют естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым векторным полем. Говоря точнее, только один из этих слоев является траекторией рассматриваемого векторного поля, а именно – критическая окружность дополнительного интеграла f , ось полнотория. Ориентация этого слоя позволяет однозначно определить ориентацию на цикле μ . Кроме того, мы имеем ориентацию на всём 3-атоме, а, следовательно, и на его граничном торе. Поэтому мы можем однозначно определить ориентацию и первого базисного цикла λ , потребовав, чтобы пара (λ, μ) была положительно ориентирована.

Случай седлового атома без звездочек. В этом случае 3-атом U имеет структуру тривиального S^1 -расслоением над двумерным атомом P . Тогда в качестве первого базисного цикла λ_i на каждом из граничных торов T_i мы возьмём слой этого расслоения. Дополнительные циклы μ_i выбираются следующим образом. Рассмотрим произвольное сечение $P \subset U$. Оно высекает на каждом граничном торе T_i некоторый цикл μ_i , который мы и возьмём в

качестве второго базисного цикла на T_i . Ориентация на базисных циклах выбирается однозначно так же, как и в предыдущем случае.

Случай атома со звездочками более сложен. Однако в настоящей статье нам не понадобится выбирать циклы на граничных торах таких атомов.

Таким образом в точке каждого ребра грубой молекулы W , представляющей собой тор Лиувилля, определены два допустимых базиса, которые определяются по правилам выше, согласно тем атомам, которые соединяет выбранное ребро. Для каждой такой пары базисов можно указать матрицу перехода от одного базиса к другому, которая называется матрицей склейки. Так как допустимые базисы выбираются не совсем однозначно, то полученная матрица склейки может меняться при замене одних допустимых базисов на другие. Однако, по матрице склейки можно определить ряд чисел-меток, которые для всех таких матриц будут совпадать (см. [12, 15, 17]). Приведём эти правила.

Пусть на выбранном ребре найдена матрица склейки $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$. Сопоставим матрице склейки C_i следующие числовые метки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Числовой рациональной меткой r_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Числовой целочисленной меткой ε_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Назовём бесконечным ребро молекулы с меткой r_i , равной ∞ . Остальные рёбра будем называть конечными. Разрежем молекулу по всем конечным рёбрам. В результате молекула распадётся на некоторое число связанных кусков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Семьёй называется кусок молекулы, который не содержит атомов A после разреза молекулы по всем конечным ребрам.

В каждой семье все рёбра можно разделить на три класса: входящие, выходящие и внутренние.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Сопоставим каждому из этих рёбер e_i целое число Θ_i по следующему правилу:

$$\Theta_i = \begin{cases} \left[\frac{\alpha_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i \text{ – выходящее ребро,} \\ \left[-\frac{\delta_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i \text{ – входящее ребро,} \\ \left[-\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \right], & \text{если } e_i \text{ – внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Тогда для каждой семьи определена целочисленная метка n , определенная по следующему правилу

$$n = \sum \Theta_i,$$

где сумма берётся по всем рёбрам данной семьи.

Числовые метки r , ε и n инвариантны относительно допустимых замен базисов на граничных торах (см. леммы 4.5 и 4.6 книги [12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Молекула W^* , снабжённая числовыми метками r , ε и n_k , называется меченой молекулой или инвариантом Фоменко-Цишанга.

ТЕОРЕМА 1. (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг) *Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы W^* совпадают.*

Система бильярда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру в декартовых координатах. Необходимо видоизменить определения выше с учетом граничных точек. Описываемый ниже подход и определения предложены А.Т.Фоменко.

Фазовое многообразие M^4 является кусочно-гладким и распадется на гладкие куски (объединение которых мы обозначим $\widetilde{M^4}$), склеенные по точкам, проектирующимся (в случае бильярдной системы) в одни и те же точки границы области, где определен бильярд. На многообразии введем симплектическую структуру только в $\widetilde{M^4}$. Будем предполагать, что гладкие симплектические структуры в соседних гладких областях непрерывно согласованы на границе раздела, то есть их пределы “справа и слева” совпадают. Будем говорить, что кусочно-гладкая система на M^4 интегрируема (в кусочно-гладком смысле, но в дальнейшем будем говорить, для краткости, просто об интегрируемости), если существуют непрерывные на M^4 и гладкие на $\widetilde{M^4}$ функционально независимые функции f и H , которые находятся в инволюции на M^4 . Подобное определение имеет смысл не только для бильярдных систем, но в данной работе мы будем рассматривать только плоские бильярды.

Рассмотрим кусочно-гладкое изоэнергетическое многообразие Q^3 и связную компоненту совместного уровня функций f и H . Пусть гамильтоновы потоки $sgradf$ и $sgradH$ полны. Если можно показать, что связная компактная компонента совместного уровня функций f и H гомеоморфна либо кусочно-гладкому тору либо кусочно-гладкому трехмерному атому (для конечного числа значений f), то будем говорить, что выполнена кусочно-гладкая теорема Лиувилля. В этом случае мы можем построить грубую молекулу W и определить метки. В случае бильярда в компактной области полнота гамильтоновых потоков очевидна.

Фактически, кусочно-гладкое слоение Лиувилля в случае бильярдной системы отличается от слоения Лиувилля классической интегрируемой гамильтоновой системы тем, что каждая совместная поверхность уровня, как правило, представляет собой либо кусочно-гладкий атом либо кусочно-гладкий тор. В дальнейшем мы будем пользоваться однако теми же обозначениями для атомов и молекул, что и в классическом случае.

§ 3. Элементарные и топологические бильярды. Бильярдные книжки.

Пусть область Ω на плоскости \mathbb{R}^2 такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой кривой углы равны $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$. Эту систему назовём “бильярдом в области”. Будем считать, что в точках, где граница P не гладкая (тогда, как было сказано, угол излома обязательно равен $\frac{\pi}{2}$) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла границы, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim$$

где отношение эквивалентности задаётся так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь через T_xP обозначена касательная плоскость к области Ω в точке x , а через $|v|$ – евклидова длина вектора v .

Фиксируем декартовы координаты (x, y) на плоскости \mathbb{R}^2 . Рассмотрим семейство софокусных квадратик – кривых, задаваемых соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \lambda \leq a. \quad (3.1)$$

Здесь $\infty > a > b > 0$ – фиксированные параметры семейства, а λ – параметр квадратики. При $\lambda < b$ ($b < \lambda < a$) соотношение задает семейство софокусных эллипсов (соответственно гипербол). При $\lambda = b$ соотношение задает прямую Ox , которую можно рассмотреть как объединение двух вырожденных гипербол – лучей из фокусов семейства и вырожденного эллипса – отрезка между фокусами. При $\lambda = a$ соотношение задает прямую Oy , которую можно рассмотреть как предельную гиперболу. В дальнейших рассуждениях прямую Oy мы будем считать гиперболой.

Как заметили В.В.Козлов и Д.В.Трещёв [1] для траектории бильярда в части плоскости, ограниченной дугами софокусных квадратик выполнено следующее свойство. Звенья любой траектории ломаной лежат на прямых, касательных к одной и той же квадратике (эллипсу или гиперболу), которая принадлежит к тому же семейству, что и квадратик составляющие границу бильярда. Согласно Дж.Д.Биркгофу [18] в случае бильярда в эллипсе это свойство является прямым следствием теоремы Якоби-Шalley.

ТЕОРЕМА 2. (Якоби, Шаль)

Касательные прямые к геодезической линии на квадратике в n -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадратики еще $n - 2$ конфокальных с ней квадратик, одна и тех же для всех точек данной геодезической.

Таким образом, система бильярда в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик (в дальнейшем такую область будем называть элементарным бильярдом), имеет два независимых интеграла – квадрат модуля вектора скорости (или энергия) и параметр софокусной квадрики, обозначаемый через Λ . На множестве элементарных бильярдов можно ввести естественное отношение эквивалентности (см. подробнее [6]). Неформально говоря, бильярды называются эквивалентными, если их границы можно продеформировать в классе квадрик так, чтобы сегменты границ не пересекали фокальную прямую во все время деформации.

В дальнейшем в нашей работе нам понадобится простейший элементарный бильярд B_0 , принадлежащий серии B , имеющий пустое пересечение с фокальной прямой. Такой бильярд имеет четыре угла и ограничен двумя дугами эллипсов и двумя дугами гипербол.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Определение склейки элементарных бильярдов.

Пусть l_1 и l_2 – граничные сегменты двух элементарных бильярдов Ω_1 и Ω_2 . Пусть они совпадают и содержатся в квадрике семейства (3.1) с параметром $\lambda_{l_1} = \lambda_{l_2}$. Далее, пусть элементарные бильярды Ω_1 и Ω_2 расположены в плоскости по одну сторону от их общего сегмента.

Тогда определим *склейку* бильярдов Ω_1 и Ω_2 вдоль сегментов l_1 и l_2 (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как изометричную склейку этих двух областей по гомеоморфизму между l_1 и l_2 , согласованному с изометричными вложениями бильярдов Ω_1 и Ω_2 в плоскость. Концы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Топологическим (обобщенным) локально-плоским бильярдом Δ назовём двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается указанной выше склейкой элементарных бильярдов вдоль некоторых граничных сегментов, при выполнении следующих условий. А именно, потребуем, чтобы в каждой вершине склейки сходилась либо четыре ребра склейки, либо одно ребро склейки и два свободных ребра, либо два ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *коническими точками*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Склейку элементарных бильярдов назовем *выпуклой*, если по отношению к этим бильярдам ребро склейки – нестрого выпукло. Если ребро строго невыпукло – то склейку назовём *невыпуклой*.

Топологический бильярд называется *невыпуклым* если он содержит хотя бы одну невыпуклую склейку.

Полная классификация выпуклых топологических бильярдов была выполнена автором в работе [6], а невыпуклых – в работе [9]. В настоящей работе нам потребуется невыпуклый гомеоморфный тору бильярд $\Delta T(B_0)$. Такой бильярд может быть склеен из четного числа бильярдов B_0 . Он склеен из элементарных бильярдов как это показано на рис. 4.

Фиксируем на бильярде $\Delta T(B_0)$ цикл-меридиан P , состоящий из точек, лежащих на дугах одной и той же гиперболы софокусного семейства 3.1 (см. рис. 4). Окружность P состоит из отрезков p_i , каждый из которых принадлежит некоторому элементарному бильярду B_0 , входящему в состав бильярда

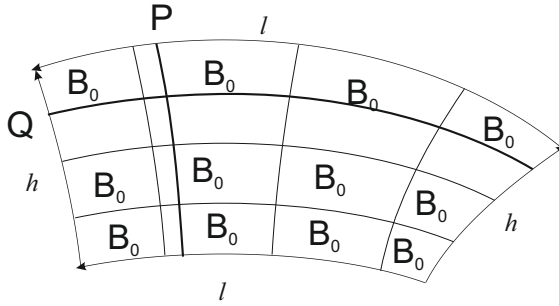


Рис. 4. Схема склейки гомеоморфного двумерному тору топологический билиярда $\Delta T(B_0)$. Стрелки с одинаковыми буквами l и h необходимо отождествить. Жирным выделены цикл-меридиан P , лежащий на дугах гипербол, и цикл-параллель Q , лежащий на дугах эллипсов.

$\Delta T(B_0)$. Каждому отрезку p_i сопоставим функцию $f_i(x) = b - l(x)$, где $l(x)$ – параметр эллипса, проходящий через точку $x \in p_i$. Склеим из функций f_i функцию $f(x) = f_i(x), x \in p_i$. Данная кусочно-линейная функция положительна на всех внутренних точках окружности P . Аналогично строится кусочно-линейная функция g . А именно, фиксируем цикл-параллель Q , состоящую из точек, лежащих на фиксированном эллипсе софокусного семейства 3.1 (см. рис. 4). Определим на составляющих этот цикл отрезках функцию $g_i(x) = l(x) - b$, где $l(x)$ – параметр гиперболы, проходящей через точку $x \in q_i$.

Таким образом построенные функции f и g будут положительно определенными и периодичными. В этом случае их графикам построим графы, обозначаемый через $W_2(f)$ и $W_2(g)$, следующим образом. Склеим область под графиком функции в цилиндр. Если исходная область была расслоена отрезками горизонтальных прямых $y = const$, то полученный цилиндр будет расслоен линиями уровня $y = const$ на отрезки и окружности. Отрезки получаются из окружностей, пересекающихся с графиком функции. Стянем каждый отрезок и каждую окружность в точку. В вершину, соответствующую перестройке окружности в несколько отрезков, поместим атом C_k , из которого вниз выходят два, а не одно ребро как в атоме B выше. Здесь число k это число минимумов функции, которых касается соответствующая окружность. Заменяем концевые вершины получившегося графа, соответствующие максимумам функции атомами A . Во все остальные вершины поместим атомы B_k , где k – количество локальных минимумов, которых касается соответствующая окружность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Рассмотрим плоский интегрируемый билиард Ω , ограниченный дугами софокусных квадрик. Фиксируем натуральное $n \in \mathbb{N}$. Каждой дуге границы Ω , являющейся связной частью квадрики, припишем произвольную перестановку σ порядка n так, чтобы, во-первых, невыпуклым дугам границы приписаны только тождественные перестановки, а во-вторых, в каждом углу билиярда дугам границы, его образующим, приписаны коммутующие перестановки. Рассмотрим несвязное объединение n элементарных

бильярдов (листов) $\Omega_i, i \in \{1..n\}$. Изготовим из этих листов некоторый клеточный комплекс. Рассмотрим дугу l границы бильярда Ω и приписанную ей перестановку σ . Разложим σ в произведение независимых циклов. Изометрично отождествим дуги l бильярдов Ω_i , если их номера i лежат в одном цикле перестановки σ . Получившийся клеточный комплекс \mathbb{B} назовем *бильярдной книжкой* (или кратко *книжкой*). Вообще говоря, книжка \mathbb{B} может оказаться несвязной. Ограничимся такими наборами перестановок σ на границах Ω , чтобы книжка \mathbb{B} была связной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что данное определение естественно обобщается на случай склейки комплекса-книжки из неэквивалентных друг другу бильярдов.

Бильярдное движение по книжке \mathbb{B} определим так. Внутри каждого листа Ω_i движение прямолинейно, а при ударе о границу происходит отражение, при котором точка продолжает движение по листу $\sigma(i)$, где σ – перестановка, приписанная этой дуге границы. При попадании в угол точка продолжает движение по листу $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i)$, где σ_1 и σ_2 – коммутирующие перестановки, приписанные сторонам этого угла.

§ 4. Реализация слоения линзового пространства $L(n, k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть B_0 элементарный бильярд, имеющий пустое пересечение с фокальной прямой и ограниченный двумя дугами гипербол (выпуклой и невыпуклой) и двумя дугами эллипсов. Рассмотрим \mathbb{B} – бильярдную книжку, склеенную из n экземпляров бильярдов B_0 , причём на выпуклом гиперболическом корешке книжки задана перестановка $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$, а на выпуклом эллиптическом корешке – перестановка σ^k . Перестановки, соответствующие невыпуклым дугам бильярда B_0 тождественные. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для данного бильярда, имеет вид $A - A$, где метка $r = \frac{k}{n}$, $\varepsilon = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что в этом случае изоэнергетическая поверхность Q^3 гомеоморфна линзовому пространству $L(n, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьём доказательство на два шага. Вначале докажем, что грубая молекула имеет вид $A - A$, затем вычислим циклы на граничных торах атомов A .

Шаг 1.

Будем считать, что листы B_0 лежат в первом квадранте нашей системы координат. При этом невыпуклые эллиптический и гиперболический сегменты границ лежат на эллипсе и гиперболе с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Фиксируем значение дополнительного интеграла $\lambda = \Lambda$. Рассмотрим соответствующий слой T в изоэнергетической поверхности Q^3 . Траектории при этом лежат на прямых, касательных к квадрату с параметром Λ . Если $\Lambda < b$ то это эллипс, если $\Lambda > b$, то это гипербола. В случае если $\Lambda = b$ то траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы. Каждая точка траектории может быть

описана парой (x, v) так что прямая, проходящая через точку x в направлении вектора v касается квадрики с параметром Λ .

Обозначим через $p : T \rightarrow \mathbb{B}$ проекцию слоя T на книжку \mathbb{B} . Фиксируем лист B_0 книжки \mathbb{B} и точки слоя T , проекции которых лежат во внутренности этого листа.

Тогда каждая точка слоя T проектирующаяся во внутренность листа B_0 может быть оснащена четырьмя векторами скорости, лежащих на прямых, касательных к квадрике с параметром Λ . По отношению к внутреннему граничному эллипсу занумеруем их следующим образом v_1 – от эллипса вправо, v_2 – к эллипсу по вправо, v_3 – к эллипсу влево, v_4 – от эллипса влево, см. рис. 5. На невыпуклых эллиптических границах листа B_0 согласно закону отражения отождествляются друг с другом точки (x, v_1) и (x, v_2) , а также (x, v_3) и (x, v_4) . На невыпуклых гиперболических границах листа B_0 согласно закону отражения отождествляются друг с другом точки (x, v_1) и (x, v_4) , а также (x, v_2) и (x, v_3) . В результате получится четырехугольник, обозначаемый через (B_0, v) , границы которого соответствуют выпуклым эллиптическим и гиперболическим границам листа B_0 . На рисунке 5 стрелками показано какие вектора (внутри или наружу по отношению листу B_0) приписываются каждой границе. Теперь склеим все четырехугольники, соответствующие всем листам книжки. Если гиперболической (вертикальной) стороне четырехугольника $(B_0, v)_i$, соответствующего листу с номером i , приписан исходящий вектор, то эта сторона склеивается с гиперболической стороной четырехугольника $(B_0, v)_{i+1}$, которой приписан входящий вектор. Если эллиптической (горизонтальной) стороне четырехугольника $(B_0, v)_i$, соответствующего листу с номером i , приписан исходящий вектор, то эта сторона склеивается с эллиптической стороной четырехугольника (B_0, v) под номером $\sigma^k(i) = (i + k) \bmod n$, которой приписан входящий вектор. Занумеруем числами $i \in \{1..n\}$ эллиптические границы четырехугольников (B_0, v) , оснащенные входящими векторами. Тогда слой T может быть представлен в виде многоугольника, стороны которого отождествлены так, как показано на рисунке 5. Разрезая его по линии b и переклеивая части (см. рис. 5) получаем четырехугольник с отождествленными противоположными сторонами. Следовательно, он гомеоморфен тору.

Обозначим через λ_{\min} значение параметра эллипса, на котором лежит выпуклый эллиптический корешок книжки, а через λ_{\max} значение параметра гиперболы, на которой лежит выпуклый гиперболический корешок книжки. При приближении параметра интеграла λ к значению λ_{\min} (соотв. λ_{\max}) каждый четырехугольник (B_0, v) стягивается на горизонтальный (вертикальный) отрезок, соответствующий склейке на границе. Тор при этом стягивается на окружность, соответствующую движению вдоль выпуклого корешка книжки.

Шаг 2.

Для атома A , соответствующего значению интеграла λ_{\max} (движению по выпуклой гиперболе), выбор циклов изображен на рисунке 6. Очевидно, что при стремлении значения интеграла λ к λ_{\max} цикл λ_h стягивается в точку, а дополняющий его до базиса μ_h переходит в окружность, соответствующую предельному движению по гиперболическому корешку книжки.

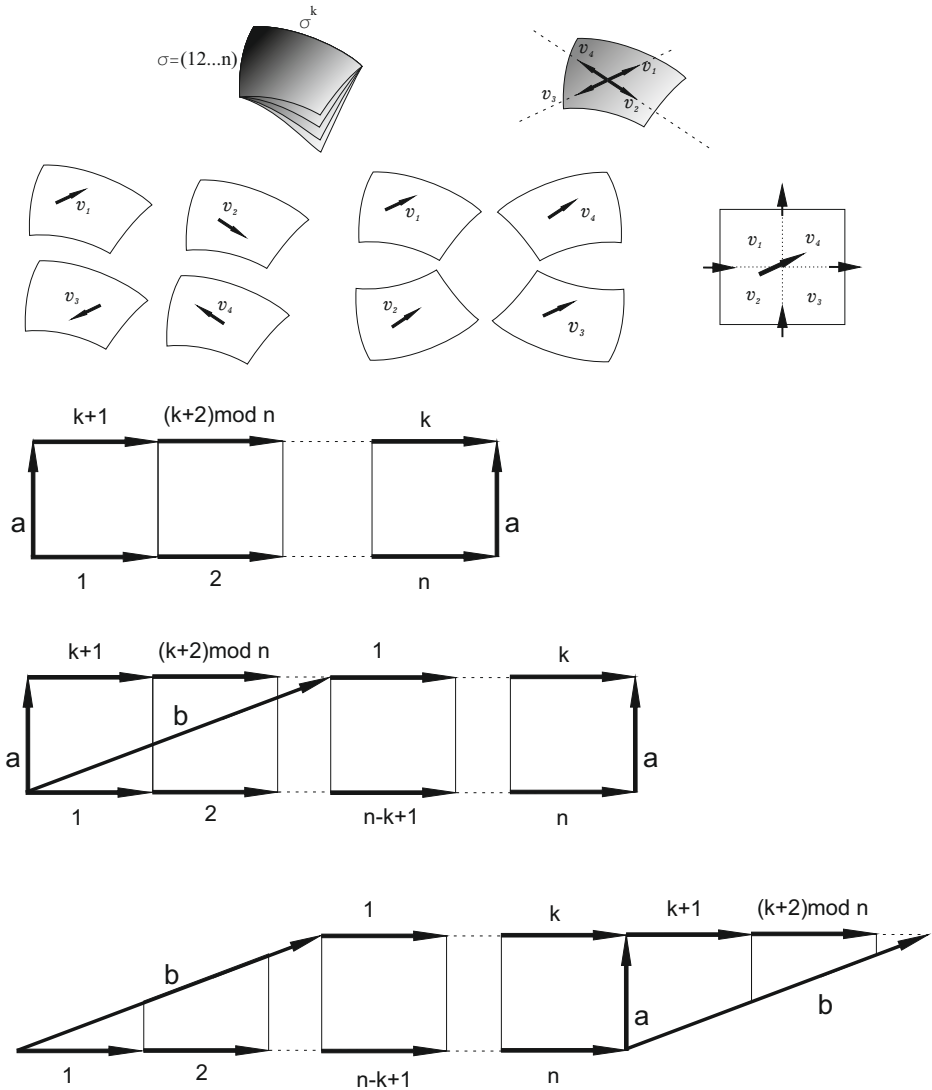


Рис. 5. Неособый слой дополнительного интеграла λ бильярдной книжки, склеенной из B_0 (на рисунке сверху слева) гомеоморфен двумерному тору. На каждый лист такой книжки проектируется четырехугольник, каждая четверть которого соответствует одному из четырех векторов v_i . В нижней части рисунка показано, как склеены четырехугольники, соответствующие разным листам. Легко видеть, что в результате получается двумерный тор.

Для атома A , соответствующего значению интеграла λ_{\min} циклы выбирают следующим образом. Пусть d – наибольший общий делитель чисел k и n . Введём натуральные числа t, s такие что $k = ts$, $n = sd$.

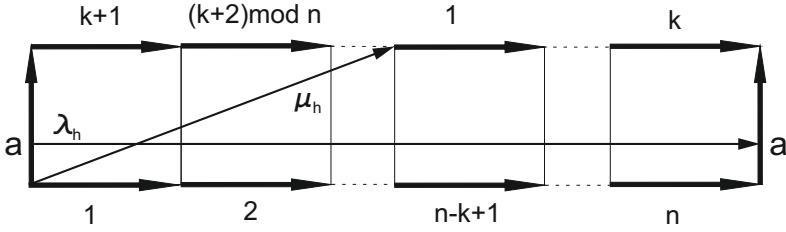


Рис. 6. Выбор циклов на граничном торе атома A , относящемуся к гиперболическому движению.

Разобьём полосу, склеенную из четырехугольников (B_0, v) , на s равных “кусков” (B_0, v, d) , каждый из которых склеен из d четырехугольников (B_0, v) (см. рис. 7). Границы разреза обозначим через a_j , где $j < s$. Переклеим эти s “кусков” вдоль номеров $d + 1, \dots, n$. Вертикальные стороны полученного четырехугольника образованы отрезками a_j . На таком четырехугольнике уже легко увидеть нужные циклы (см. рис. 7). Цикл λ_e , стягивающийся в точку, в каждом куске (B_0, v, d) проходит по первым четырехугольникам (B_0, v) . Для того чтобы явно написать матрицу склейки осталось понять, сколько кусков (B_0, v, d) пересекает цикл μ_e . Для этого необходимо понять в каком по счету снизу куске (B_0, v, d) справа откажется четырехугольник (B_0, v) с правой границей a_0 . У такого четырехугольника нижняя граница имеет номер n . Правые четырехугольники (B_0, v) в кусках $(B_0, v, d)_z$ на своих горизонтальных нижних границах либо имеют номера $d + zk \bmod n < n$ либо номер n . Таким образом, необходимо понять при каком минимальном z число $d + zk$ делится на n . Заметим, что всегда можно единственным образом выбрать два минимальных натуральных числа r и l таких, что $d = rn - lk$ (коэффициенты Безу). Откуда $d + lk = rn$. Следовательно, $z = l$.

Рассмотрим тор Лиувилля как фактор плоскости \mathbb{R}^2 с координатами x, y по некоторой решётке так чтобы границы четырехугольников (B_0, v) лежали на целочисленных координатных линиях. Тогда базисные циклы будут иметь следующее представление (см. рис. 7):

$$\vec{\lambda}_e = s\vec{y}, \quad \vec{\mu}_e = d\vec{x} + l\vec{y};$$

$$\vec{\lambda}_h = n\vec{x}, \quad \vec{\mu}_h = (n - k)\vec{x} + \vec{y} = (s - t)d\vec{x} + \vec{y}.$$

Заметим, что базисы (λ_e, μ_e) и (λ_h, μ_h) противоположно ориентированы, следовательно, ориентация циклов λ выбрана правильно.

Выражая (λ_e, μ_e) через (λ_h, μ_h) получаем следующее

$$\begin{pmatrix} \lambda_e \\ \mu_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - s & s \\ \frac{1+l(t-s)}{s} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_h \\ \mu_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - s & s \\ r - l & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_h \\ \mu_h \end{pmatrix}.$$

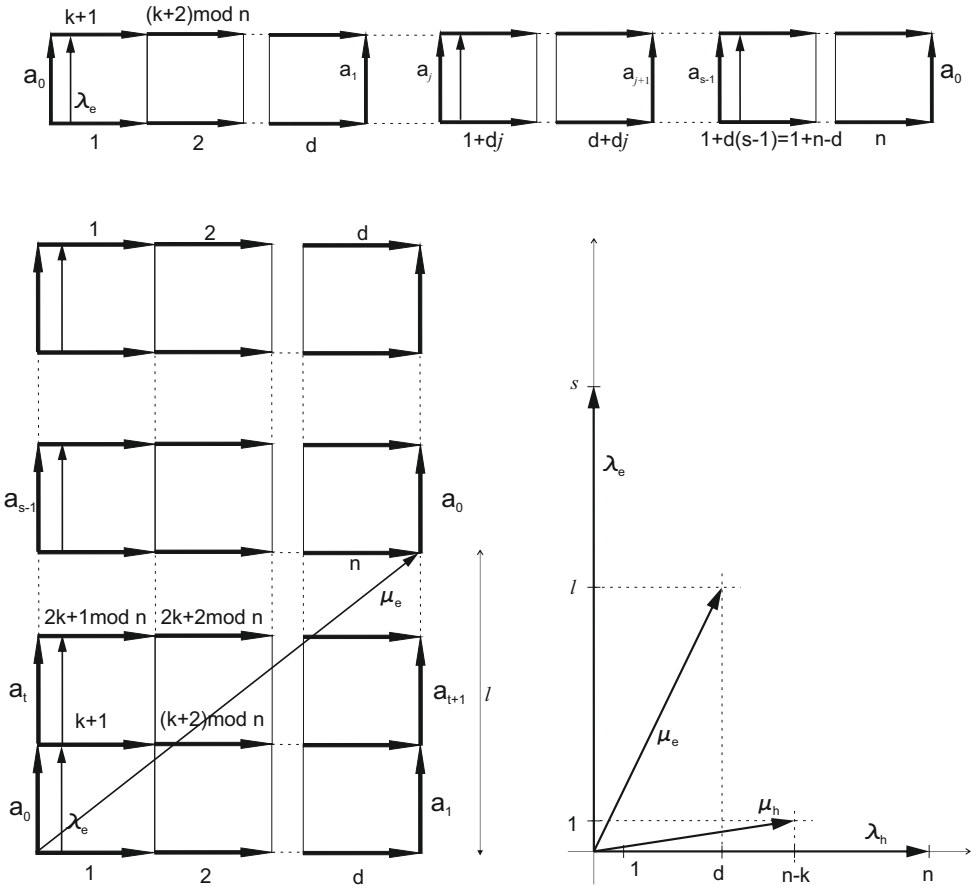


Рис. 7. Выбор циклов на граничном торе атома A , относящемуся к эллиптическому движению.

Последнее следует из цепочки очевидных равенств $\frac{1+l(t-s)}{s} = \frac{1+lt-sl}{s} = \frac{rs-ls}{s} = r-l$.

Находим метки $r = \frac{t-s}{s} \bmod 1 = \frac{t}{s} = \frac{td}{sd} = \frac{k}{n}$, $\varepsilon = \text{sign } s = 1$.

Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что можно было не выбирать цикл μ_e , так как для определения меток в молекуле $A - A$ достаточно знать только первую строку матрицы склейки.

§ 5. Нетривиальное слоение 3-тора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Рассмотрим четыре экземпляра билиярда B_0 , обозначенных через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, склеенных в тор так, как это показано на рис 8.

Поясним обозначение границ биллиарда. Через c и d обозначены выпуклая и невыпуклая границы, лежащие на эллипсах, а через a и b обозначены выпуклая и невыпуклая границы, лежащие на гиперболах. Биллиардное движение на полученном торе определим так. Внутри листов B_0 материальная точка движется прямолинейно. Если два листа были склеены вдоль некоторой границы, то точка, двигаясь по одному из них, после удара о границу продолжает движение по второму. Данный биллиард назовем *торическим биллиардом* и обозначим через $T(B_0)$.

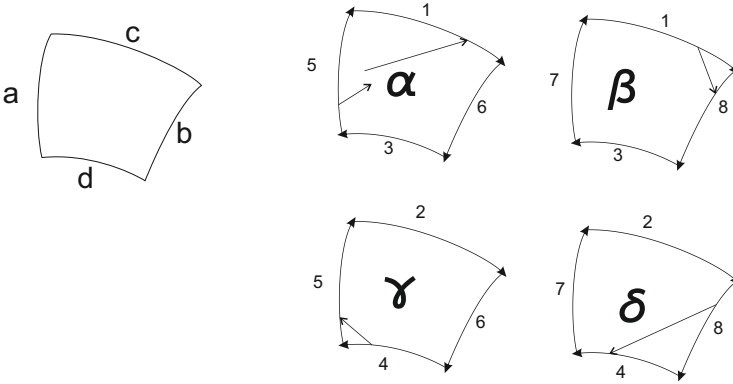


Рис. 8. Склейка четырех экземпляров биллиарда B_0 , обозначенных через α , β , γ , δ , в тор. Одинаковыми цифрами обозначены склеиваемые границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть n и k – взаимно простые натуральные числа, причем $k < n$. Напомним, что через σ была обозначена перестановка $(1\ 2\ \dots\ n)$. Рассмотрим n экземпляров биллиарда $T(B_0)$. Занумеруем биллиарды числами от 1 до n и продолжим нумерацию на их листы α , β , γ , δ . На объединении этих биллиардов зададим следующее движение. На выпуклой гиперболической границе a материальная точка при движении по листу α_i (соотв. β_i) после удара переходит на лист $\gamma_{\sigma(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma(i)}$), а при движении по листу γ_i (соотв. δ_i) после удара переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-1}(i)}$ (соотв. $\beta_{\sigma^{-1}(i)}$).

На выпуклой эллиптической границе c материальная точка при движении по листу α_i (соотв. γ_i) после удара переходит на лист $\beta_{\sigma^k(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma^k(i)}$), а при движении по листу β_i (соотв. δ_i) после удара переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-k}(i)}$ (соотв. $\gamma_{\sigma^{-k}(i)}$).

На невыпуклых границах b и d движение задаётся как обычно, то есть без смены биллиарда $T(B_0)$ и симметрично. Данный биллиард (биллиардную книжку) обозначим через $T(B_0, n, k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изознергетической поверхности Q^3 для биллиардной книжки $T(B_0, n, k)$ имеет вид, представленный на рисунке 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\lambda_{Ae} < \lambda_{Be} < \lambda_{Bh} < \lambda_{Ah}$ параметры квадратик на которых лежат соответственно выпуклый эллиптический, невыпуклый эллиптический, невыпуклый гиперболический и выпуклый гиперболический граничные сегменты биллиарда B_0 . Эти четыре значения назовем *особыми*. Отметим, что все параметры квадратик, к которым траектории биллиарда являются касательными, заключены в отрезке $[\lambda_{Ae}, \lambda_{Ah}]$.

Покажем, что грубая молекула имеет структуру графа, изображенного на рис. 1, а именно: при неособых значениях дополнительного интеграла двумерная поверхность уровня состоит из объединения нескольких торов, при минимаксных значениях λ_{Ae} , λ_{Ah} окрестность особого слоя послойно гомеоморфна 3-атому A , при седловых значениях λ_{Be} , λ_{Bh} окрестность особого слоя послойно гомеоморфна 3-атому B .

Будем считать, что листы B_0 лежат в первом квадранте нашей системы координат.

Фиксируем значение дополнительного интеграла $\lambda = \Lambda$. Рассмотрим соответствующий слой F в изоэнергетической поверхности Q^3 . Траектории при этом лежат на прямых, касательных к квадрике с параметром Λ . Если $\Lambda < b$ то это эллипс, если $\Lambda > b$, то это гипербола. В случае если $\Lambda = b$ то траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы. Каждая точка траектории может быть описана парой (x, v) так что прямая, проходящая через точку x в направлении вектора v касается квадрики с параметром Λ .

Обозначим через $p : F \rightarrow T(B_0, n, k)$ проекцию слоя F на книжку $T(B_0, n, k)$. В книжке $T(B_0, n, k)$ рассмотрим тор $T(B_0)$ под номером i , фиксируем в нём лист (в дальнейшем считаем без ограничения общности, что это лист α_i) и точки слоя F , проекции которых лежат во внутренности этого листа. Для этого надо вырезать из листа α_i внутренность квадрики с параметром Λ (под внутренностью квадрики понимается часть плоскости, ограниченная квадратикой и содержащая фокусы). Полученную область, эквивалентную B_0 , будет по-прежнему называть листом.

Тогда каждая точка слоя F , проектирующаяся во внутренность листа α_i , может быть оснащена четырьмя векторами скорости, лежащих на прямых, касательных к квадрике с параметром Λ . По отношению к внутреннему граничному эллипсу занумеруем их следующим образом: v_1 – от эллипса вправо, v_2 – к эллипсу по вправо, v_3 – к эллипсу влево, v_4 – от эллипса влево, см. рис. 5.

На выпуклом граничном гиперболическом сегменте a происходит склейка листов α_i , оснащенных векторами v_3 и v_4 с листами $\gamma_{\sigma(i)}$, оснащенных векторами v_2 и v_1 соответственно; оснащенных векторами v_2 и v_1 с листами $\gamma_{\sigma^{-1}(i)}$, оснащенных векторами v_3 и v_4 соответственно. На выпуклом граничном эллиптическом сегменте c происходит склейка листов α_i , оснащенных векторами v_1 и v_4 с листами $\beta_{\sigma^k(i)}$, оснащенных векторами v_2 и v_3 соответственно; оснащенных векторами v_2 и v_3 с листами $\beta_{\sigma^{-k}(i)}$, оснащенных векторами v_1 и v_4 соответственно.

На невыпуклых границах склейка зависит от уровня Λ . Если $\Lambda < \lambda_{Be}$, то на невыпуклой эллиптической границе d происходит склейка точек листа α_i оснащенных векторами v_1 (соответственно, v_3) с точками того же самого листа α_i , оснащенных векторами v_2 (соответственно, v_4). Если $\Lambda > \lambda_{Be}$, то склейка

происходит между листами α_i и β_i . Если $\Lambda > \lambda_{Bh}$, то на невыпуклой гиперболической границе b происходит склейка точек листа α_i оснащенных векторами v_1 (соответственно, v_2) с точками того же самого листа α_i , оснащенных векторами v_4 (соответственно, v_3). Если $\Lambda < \lambda_{Bh}$, то склейка происходит между листами α_i и γ_i .

На рисунках 9,10 изображены получающиеся слои F . Пунктиром отмечены граничные точки листов, которые соответствуют невыпуклому граничному эллипсу, т.е. либо границе d либо дуге интегрального эллипса. Штрих-пунктиром отмечены граничные точки листов, которые соответствуют невыпуклой граничной гиперболе, т.е. либо границе b либо дуге интегральной гиперболы. Листы повернуты так, чтобы движение по ним происходило по направлению вправо и вверх. Одинаковыми цифрами с жирными стрелками на границе многоугольников отмечены стороны, которые отождествляются по закону отражения. Очевидно, что все слои гомеоморфны объединению торов.

Пусть $\Lambda_{Ae} < \Lambda < \Lambda_{Be}$. Тогда движения по книжке разбиваются на два семейства. Их можно охарактеризовать, к примеру, направлением движения по листам α – справа налево и слева направо. Два соответствующих тора изображены на рисунках 9 а) и г). Если $\Lambda > \Lambda_{Be}$ то каждый тор распадается на два – в результате изменения билиардного закона на границе d . На рисунках 9 б) и в) показаны два тора, на которые распался тор, изображенный на рисунке 9 а), соответствующий движению направо на листах α . На рисунках 9 д) и е) показаны два тора, на которые распался тор, изображенный на рисунке 9 г), соответствующий движению налево на листах α . Это изменение соответствует разрезам вдоль двух пунктирных линий и последующему их отождествлению в каждом полученном многоугольнике (стороны d_i). Бифуркация торов, при этом, имеет вид атома B . Особый слой состоит из двух колец, отождествленных по границам (выделенных пунктиром на торе при $\Lambda < \Lambda_{Be}$ и соответствующих сторонам d_i на торах при $\Lambda_{Bh} > \Lambda > \Lambda_{Be}$). При стремлении Λ к Λ_{Ae} границы a_i уменьшаются и переходят в точку, что отражается на торе стягиванием его в окружность.

На рисунке 9 стрелками отмечены циклы на граничных торах атомов A и B . Напомним, что цикл λ_A выбирается так, чтобы стягиваться в точку внутри полнотория (на рисунках он выбран параллельным стягиваемым границам a), цикл μ_A должен дополнять его до базиса. Цикл λ_B должен быть гомотопен циклу, переходящему в особый слой атома B . На рисунках он выбран вдоль пунктирной линии. Циклы μ_B , выбранные на трех граничных торах этого атома, выбираются как граничные окружности 2-атома B – трансверсального сечения к критической окружности. При этом их ориентация на уровнях, находящихся по разные стороны от критического значения, должна быть противоположной. Это объясняет направление стрелок на соответствующих циклах. Циклы μ_A и λ_B имеют ориентацию, заданную потоком. Поток на данных многоугольниках течет по направлению вверх и вправо (мы так расположили листы), поэтому их ориентация, заданная стрелкой, выбрана корректно.

Пусть $\Lambda > \Lambda_{Bh}$. В этом случае движения по книжке также разбивается на два семейства по направлению на листах α – вверх и вниз. Соответствующие торы, склеенные из листов, изображены на рисунках 10 а) и г). При

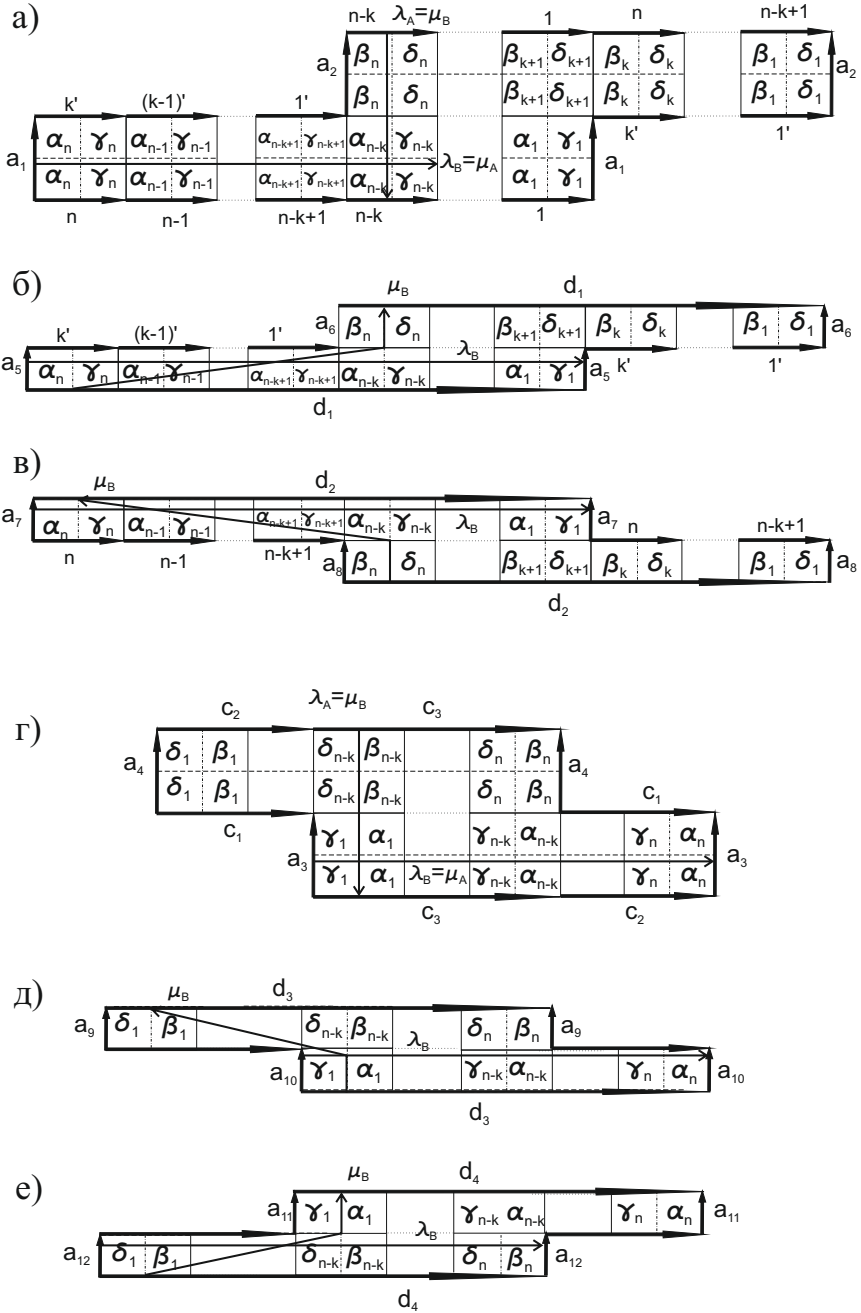


Рис. 9. Циклы для торов, лежащих на уровне $\Lambda < b$.

$\Lambda_{Be} < \Lambda < \Lambda_{Bh}$ каждый тор распадается на два (10 пары торов б), в) и д) е) вдоль штрих-пунктирных линий, проекции которых лежат на интегральной гиперболе с параметром Λ . Мы имеем те же четыре тора, изображенных на ри-

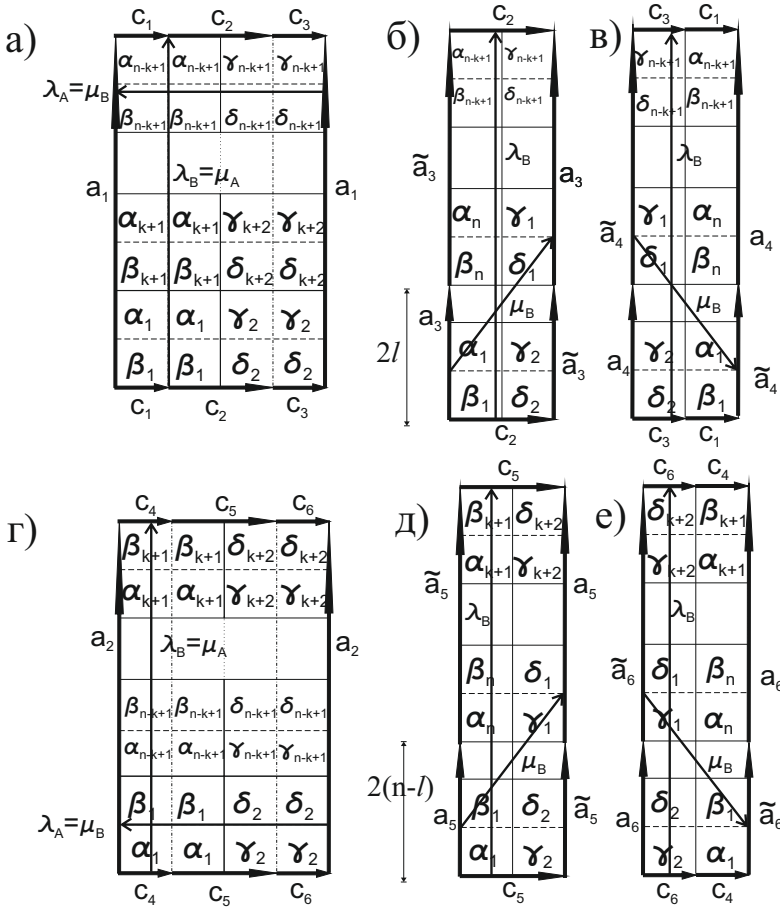


Рис. 10. Циклы для торов, лежащих на уровне $\Lambda > b$.

сунках 9 б), в) и д), е), но склеенных по-другому (см. рис. 10 справа). Отметим, что направление движения по данным многоугольникам, однако, по-прежнему выбрано вверх и вправо. Соответствия между рисунками при этом выглядит так.

Рассмотрим два многоугольника, соответствующие движению вверх по листам α (правый и средний многоугольника на рисунке 10 сверху). Уточним склейку вдоль невыпуклых дуг гипербол (штрих-пунктирные линии). Разобьём каждый многоугольник на квадраты, состоящие из двух пар листов α_i и β_i и $\gamma_{(i+1) \bmod n}$ и $\delta_{(i+1) \bmod n}$, склеенных по невыпуклым эллиптическим границам (отмечена пунктиром), которые склеены друг с другом вдоль выпуклой гиперболической границы (сплошная линия). Считаем, что остатки по модулю n принимают значения от 1 до n . Так как n и k взаимно-просты, то можно однозначно определить пару минимальных натуральных чисел r и l таких что $1 + kl = rn$ (коэффициенты Безу). Квадрат с листом α_i вдоль выпуклой эллиптической границы склеивается с квадратом содержащим лист $\alpha_{i+k \bmod n}$.

Биллиардный закон на невыпуклой гиперболической границе (левая и правая границы многоугольника) отождествляет пары листов с одинаковыми индексами. Лист α_1 должен быть склеен вдоль невыпуклой гиперболической границы с листом γ_1 . В этом квадрате находится лист γ_2 . Номер листа γ в квадрате с номером j равен $2 + jk \pmod n$. Если $j = l$, то это номер равен $2 + lk = 1 + rn = 1 \pmod n$. Таким образом, лист α_1 находящийся в самом первом квадрате снизу будет склеен с листом γ_1 , находящимся в квадрате с номером l . Аналогичная склейка происходит и с остальными квадратами. Для торов, соответствующих движению по листам α вниз, ситуация аналогична. Склейка квадратов друг с другом происходит по обратной перестановке, т.е. квадрат с листом α_i вдоль выпуклой эллиптической границы склеивается с квадратом содержащим лист $\alpha_{i-k+n \pmod n}$. Это приводит к тому что лист α_1 , находящийся в самом первом квадрате снизу будет склеен с листом γ_1 , находящимся в квадрате с номером $n - l$. Выбор циклов на граничных торах изображён на рисунке и сделан аналогично предыдущему случаю.

Выпишем матрицы склейки между полученными циклами. Назовем тор верхним, если он относится к атому, в который входит стрелка на ребре. Все остальные торы назовём нижними.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 9б) и 10в) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -k & n \\ r & -l \end{pmatrix}$, откуда метки $r = -\frac{k}{n}$, $\varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\frac{-k}{n}] = -1$ на нижнем торе и $[\frac{l}{n}] = 0$ на верхнем.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 9в) и 10е) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} k & n \\ r - k & l - n \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \frac{k}{n}$, $\varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\frac{k}{n}] = 0$ на нижнем торе и $[\frac{-l+n}{n}] = 0$ на верхнем.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 9д) и 10б) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} k & n \\ r & l \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \frac{k}{n}$, $\varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\frac{k}{n}] = 0$ на нижнем торе и $[\frac{-l}{n}] = -1$ на верхнем.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 9е) и 10д) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -k & n \\ -k + r & -l + n \end{pmatrix}$, откуда метки $r = -\frac{k}{n}$, $\varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\frac{-k}{n}] = -1$ на нижнем торе и $[\frac{l-n}{n}] = -1$ на верхнем.

На остальных рёбрах матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$, а вклад в метки n нулевой.

Утверждение доказано.

5.1. Биллиард, моделирующий квадратично-интегрируемый геодезический поток на торе с конечнолистно-лиувиллевой метрикой. Рассмотрим гомеоморфный тору топологический биллиард, склеенный из более чем четырех биллиардов B_0 . Такие биллиарды были изучены в работе [9]. В этом случае в молекуле, классифицирующей изоэнергетическую поверхность,

модифицируются минимаксные атомы A . А именно, отметим, что добавляются особые слои, соответствующие параметрам квадратик на которых лежат невыпуклые сегменты склейки данного билиарда. Окрестности таких особых слоёв описываются атомами серии B . Для того, чтобы более подробно описать структуру получающегося графа необходимо ввести следующие функции.

Сопоставим билиарду $\Delta T(B_0)$ кусочно-линейную функцию f по следующему правилу. Фиксируем некоторый параметр $\lambda > b$ так, чтобы пересечение ветви гиперболы h_λ софокусного семейства, ему соответствующей, с областью $\Delta T(B_0)$ было не пусто. Связная компонента P пересечения гиперболы h_λ с областью $\Delta T(B_0)$ гомеоморфна окружности. Так как все точки окружности P лежат на одной дуге гиперболы, то на P можно задать естественную параметризацию f значением параметра эллипса. Минимумам функции f соответствуют либо края компоненты связности, либо точки ребер склейки выпуклых эллиптических дуг. Максимумам соответствуют склейки невыпуклых эллиптических дуг. Так как P гомеоморфна окружности, то значения на концах области определения совпадают (если это минимумы, то склейка выпуклая, если максимумы – то невыпуклая). Заметим, что функция f строго ограничена сверху числом b .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. (В.В.Ведюшкина [9]) Пусть $\Delta T(B_0)$ – гомеоморфный тору топологический билиард. Обозначим через $W_2(f)$ и $W_2(g)$ графы W_2 , построенные по кусочно-линейным функциям f и g этого билиарда соответственно. Тогда инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы W^* , описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 интегрируемого топологического билиарда $\Delta T(B_0)$, ограниченного дугами софокусных квадратик, изображены на рис. 11а.

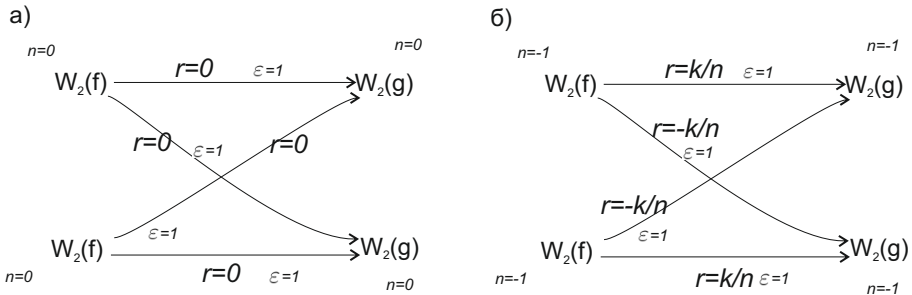


Рис. 11. Инварианты Фоменко-Цишанга серии топологических билиардов $\Delta T(B_0)$ (см. случай а) и топологического билиарда-книжки (см. случай б).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Фиксируем билиард, принадлежащий бесконечной серии гомеоморфных тору билиардов $\Delta T(B_0)$, склеенных из областей B_0 вдоль

выпуклых и невыпуклых границ. Фиксируем некоторый бильярд из этой серии. Произвольно выделим на нём выпуклые параллель и меридиан – объединение выпуклых рёбер склейки, лежащих на эллиптических и гиперболических сегментах соответственно. Выделим невыпуклую параллель, которая состоит из невыпуклых сегментов склейки, лежащих на эллипсах с максимальным значением параметра λ из всех рёбер склейки. Аналогично выделим невыпуклый меридиан, состоящий из невыпуклых сегментов склейки, лежащих на гиперболах с минимальным значением параметра λ из всех рёбер склейки. Эти две параллели и два меридиана разбивают тор $\Delta T(B_0)$ на четыре области-листа. Обозначим их через α, β, γ и δ . При этом пары листов α, γ и β, δ склеены вдоль гиперболических границ, обозначаемых через a (выпуклая) и b (невыпуклая). Пары листов α, β и γ, δ склеены вдоль эллиптических границ, обозначаемых через c (выпуклая) и d (невыпуклая).

Пусть n и k – взаимно простые натуральные числа, причем $k < n$. Напомним, что через σ была обозначена перестановка $(1\ 2\ \dots\ n)$. Рассмотрим n экземпляров бильярда $\Delta T(B_0)$. Занумеруем бильярды числами от 1 до n и продолжим нумерацию на их листы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. На объединении этих бильярдов движение зададим также как и на бильярдной книжке $T(B_0, n, k)$. То есть на невыпуклых границах движение происходит без смены бильярда, а на выпуклых – со сменой и листа и бильярда по тем же перестановкам. Данный бильярд (бильярдную книжку) обозначим через $\Delta T(B_0, n, k)$.

Заметим, что бильярд $T(B_0)$ и бильярдная книжка $T(B_0, n, k)$ принадлежат к описанной серии $\Delta T(B_0, n, k)$, являющейся их естественным обобщением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изознергетической поверхности Q^3 для бильярдной книжки $\Delta T(B_0, n, k)$ имеет вид, представленный на рисунке 11б.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим слой интеграла $\Lambda = b$. Дословно повторяя рассуждения утверждения 4 получаем, что данный слой гомеоморфен несвязному объединению четырёх торов (см. рис. 9 и 10 б), в), д), е)).

Опишем слои интеграла при $\Lambda < b$. Обобщенным эллиптическим сегментом назовём минимальное объединение невыпуклых эллиптических границ бильярдов B_0 , каждый из которых имеет непустое пересечение с какими-либо двумя сегментами из данного множества. Данное множество образует некоторую параллель тора $\Delta T(B_0)$. Рассмотрим на торах, соответствующих уровню интеграла $\Lambda = b$ точки, проекции которых на бильярдный стол расположены на невыпуклых обобщённых эллиптических сегментах. Все такие точки на развертке торов, изображенных на рисунке 9 изображаются отрезками горизонтальных прямых – каждый обобщенный эллиптический сегмент соответствует одному отрезку на развертке каждого тора. Фиксируем максимальное значение λ_{\max} дополнительного интеграла, совпадающее со значением некоторого эллипса, на котором лежат невыпуклые ребра склейки. При $\lambda_{\max} < \Lambda < b$ проекция совместной поверхности уровня интегралов покрывает весь бильярд. При этом развертка торов и сами торы не меняются при таком увеличении значения дополнительного интеграла. Двумерная поверхность уровня интеграла $\Lambda = \lambda_{\max}$ получается в результате отождествления пар торов вдоль точек, лежащих в прообразе обобщенных эллиптических сегментов. Во-первых, она происходит

вдоль рёбер склейки, разделяющих различные листы, т.е. отождествляя d_1 и d_2 , а также d_3 и d_4 как на рисунке 9. Во-вторых, необходимо отождествить пары окружностей, лежащих в проекции других невыпуклых рёбер клейки, лежащих на эллипсах с параметром λ_{\max} . Так как все эти окружности на торах гомологичны, то полученная поверхность уровня имеет вид особого слоя некоторого атома, принадлежащего к серии атомов C_n , где n – это число обобщенных невыпуклых эллиптических сегментов, лежащих на данном уровне интеграла. Напомним, что под атомом C_1 мы понимаем атом B .

Отметим, что на развертках торов, изображенных на рисунках 9 а) и г) внутренние точки, лежащие на эллипсах с параметром λ_{\max} изображаются двумя горизонтальными отрезками, лежащим либо на листах α и γ либо на листах β и δ . Рассмотрим поверхность уровня дополнительного интеграла $\Lambda = \lambda_{\max} - \varepsilon$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Проекция данной поверхности не покрывает весь бильярд. Вырежем из развертки торов, изображенных на рисунках 9 а) и г) полосы, являющиеся прообразами окрестностей обобщенных эллиптических сегментов, соответствующих параметру λ_{\max} . Фиксируем обобщенный эллиптический сегмент. Ему соответствуют два горизонтальных отрезка и две полосы – их окрестности. Границы полос образуют точки, лежащие на эллипсах с параметром $\lambda_{\max} - \varepsilon$. Согласно бильярдному закону, необходимо отождествить верхнюю границу каждой полосы с нижней границей другой. В результате совместная поверхность уровня гомеоморфна объединению нескольких торов.

При дальнейшем уменьшении значения интеграла Λ бифуркация, соответствующая каждому невыпуклому эллиптическому сегменту выглядит как склейка (и последующее вырезание из развертки тора двух окрестностей-полос) горизонтальных отрезков, лежащих в прообразе данного сегмента. Такая перестройка описывается подходящим атомом B_n где n – число обобщенных невыпуклых эллиптических сегментов, лежащих на эллипсе с параметром равным значению интеграла.

Для выбора циклов на граничных торах можно воспользоваться циклами, изображенными на рисунках 9 б), в), д), е). Для четырех торов на уровне интеграла $\Lambda = b$ циклы выбираются также. Рассмотрим развертки торов, изображенные на рисунках 9 а) и г). Циклы на частях этой развертки, оставшихся после вырезания окрестностей невыпуклых сегментов можно взять как части тех циклов, что изображены на рисунке. При этом, все циклы λ на граничных торах седловых атомов – слои расслоения Зейферта – выбираются как горизонтальные отрезки. Дополняющие их циклы μ – вертикальные отрезки. На граничных торах атомов A циклы меняются местами, так как вертикальные отрезки стягиваются в точку, а следовательно, определяют цикл λ а горизонтальный отрезок дополняет его до базиса. Это означает, что внутри графа W_2 между седловыми атомами метки $r = \infty$, $\varepsilon = 1$, а на ребрах с атомами $A - r = 0$, $\varepsilon = 1$. При этом вклады в метки n данные склейки торов не дают.

Для гиперболических невыпуклых ребер доказательство аналогично. Утверждение доказано.

Из данного утверждения вытекает следующее важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. [14] Пусть на 2-торе задана гладкая (или вещественно-аналитическая) риманова метрика, геодезический поток которой квадратично интегрируем. Тогда алгоритмически и явно строится интегрируемый бильярд, ограниченный дугами софокусных квадрик, лувиллево эквивалентный данному геодезическому потоку. А именно, для случая глобально-лувиллевой метрики на торе моделирующий бильярд имеет вид $\Delta T(B_0)$, а для случая конечно-листно лувиллевой метрики на торе моделирующий бильярд имеет вид $\Delta T(B_0, n, k)$.

Автор благодарит А.Т.Фоменко за множество ценных замечаний и постоянное внимание к работе, а также весь коллектив кафедры Дифференциальной геометрии и приложений за ряд полезных комментариев.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01303).

Список литературы

- [1] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991
- [2] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., Математический ин-т им.В.А.Стеклова РАН, 2009, 14, 4-5, 479–494
- [3] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе*, М.; Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010
- [4] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., М.: Издательство Московского университета, №5(2012), 31–34
- [5] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, №4, 18–27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas Moscow Univ. Math. Bull, 69:4 (2014), 148-158.
- [6] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176
- [7] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы*, Изв. РАН. Серия матем. 81:4(2017), 20-67
- [8] В. В. Ведюшкина, *Слоение Лиувилля невыпуклых топологических бильярдов*, ДАН, 478:1(2018)
- [9] В. В. Ведюшкина, *Инварианты Фоменко-Цишанга невыпуклых топологических бильярдов*, Матем. Сборник, 210:3 (2019), 17–74
- [10] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. Сборник, 209:12 (2018), 17–56
- [11] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, *Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами*, ДАН, 479:6(2018), 607-610
- [12] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т.1,2, Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999
- [13] В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко *Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела*, ДАН, 465:2(2015), 150-153
- [14] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко *Интегрируемые геодезические потоки ориентированных двумерных поверхностей ливувиалево эквивалентны топологическим бильярдам*, Известия РАН, 2019
- [15] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем*, Изв. АН СССР 52:2(1988), 378–407,
- [16] А. Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, Успехи матем. наук, 44 №1(265), 1989, 145–173
- [17] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы* Изв. АН СССР, 54:3(1990), 546–575
- [18] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Издательский дом «Удмуртский университет», 1999

В.В. Ведюшкина (V. V. Fokicheva)

каф. дифференциальной геометрии и приложений
мех.-мат. ф-та МГУ

E-mail: arinir@yandex.ru