

Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения*

Е.А. Кудрявцева, А.А. Ошемков

Аннотация

Изучается интегрируемая механическая система с магнитным полем, инвариантная относительно вращений. Для особых точек ранга 0 отображения момента получен критерий невырожденности, определен тип невырожденных особых точек (центр-центр и фокус-фокус), описаны бифуркации типичных вырожденных особых точек (интегрируемая гамильтонова бифуркация Хопфа двух типов). Для семейств особых окружностей ранга 1 отображения момента (состоящих из относительных положений равновесия системы) получено их параметрическое задание, критерий невырожденности, определен тип невырожденных (эллиптическая и гиперболическая) и типичных вырожденных (параболическая) особых окружностей. Построено параметрическое задание бифуркационной диаграммы отображения момента. Описаны геометрические свойства бифуркационной диаграммы и бифуркационного комплекса в случае, когда задающие систему функции находятся в общем положении. Определена топология неособых изоэнергетических 3-мерных многообразий, описана топология слоения Лиувилля на них с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (в терминах атомов и молекулы Фоменко). Описаны “расщепляющиеся” гиперболические особенности ранга 1, известные как топологически неустойчивые бифуркации слоения Лиувилля.

1 Введение

Натуральная механическая система с магнитным полем на римановом многообразии (M, g) — это гамильтонова система на T^*M , задаваемая функцией Гамильтона и симплектической структурой

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j + V, \quad \omega = dp_i \wedge dq^i + \pi^* \beta,$$

*Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01303).

где q — локальные координаты на M , p — сопряженные импульсы, $V = V(q)$ — гладкая функция на M (называемая *потенциалом*), $g^{ij} = g^{ij}(q)$ — матрица, обратная к матрице метрики g , β — гладкая замкнутая 2-форма на M (называемая *магнитным полем*), $\pi : T^*M \rightarrow M$ — проекция. Система описывает движение заряженной частицы в электро-магнитном поле на римановом многообразии (M, g) , где электрическое поле задается потенциалом V , а магнитное поле — 2-формой β .

Пусть (M, g) является замкнутым двумерным многообразием вращения, т.е. риманова метрика инвариантна относительно эффективного гладкого S^1 -действия на M . Тогда M гомеоморфно сфере, тору, проективной плоскости или бутылке Клейна. Будем считать, что M гомеоморфно сфере. Пусть $N, S \in M$ — неподвижные точки S^1 -действия (северный и южный полюсы). Тогда в некоторых (“сферических”) координатах r, φ на $M \setminus \{N, S\}$ метрика имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2, \quad (r, \varphi) \in (0, L) \times S^1, \quad (1)$$

где $f : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая положительная функция, и индуцированное S^1 -действие на T^*M имеет вид $(p_r, p_\varphi, r, \varphi) \mapsto (p_r, p_\varphi, r, \varphi + t)$, $t \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Предположим, что потенциал и магнитное поле тоже S^1 -инвариантны. Тогда на $M \setminus \{N, S\}$ они имеют вид

$$V = U(r), \quad \beta = B(r)\omega_0 = B(r)f(r)dr \wedge d\varphi = A'(r)dr \wedge d\varphi,$$

где $\omega_0 = f(r)dr \wedge d\varphi$ — ориентированная форма площади на M , $U(r)$, $B(r)$ и $A(r)$ — гладкие функции на $(0, L)$,

$$A(r) := \int B(r)f(r)dr.$$

В фазовых координатах $p_r, p_\varphi, r, \varphi$ на $T^*(M \setminus \{N, S\})$ имеем

$$H = \frac{p_r^2}{2} + F(r)\frac{p_\varphi^2}{2} + U(r), \quad \omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + dA(r) \wedge d\varphi,$$

где $F(r) = 1/f^2(r)$.

Лемма 1.1. (а) [1, Предложение 4.6 (ii)] *Метрика (1) продолжается до римановой метрики класса C^∞ на M тогда и только тогда, когда $f(r)$ продолжается до C^∞ функции на $[0, L]$, удовлетворяющей условиям $f(0) = f(L) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(L) = -1$, а также $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(L) = 0$ для каждого целого $k \geq 1$.*

(б) *Функция $U(r)$ на цилиндре $M \setminus \{N, S\}$ продолжается до C^∞ функции на M тогда и только тогда, когда $U(r)$ продолжается до C^∞ функции на $[0, L]$, удовлетворяющей условиям $U^{(2k-1)}(0) = U^{(2k-1)}(L) = 0$ для каждого целого $k \geq 1$.*

(с) 2-Форма $dA(r) \wedge d\varphi$ на цилиндре $M \setminus \{N, S\}$ продолжается до 2-формы β класса C^∞ на M тогда и только тогда, когда $A(r)$ продолжается до C^∞ функции на $[0, L]$, удовлетворяющей условиям $A^{(2k-1)}(0) = A^{(2k-1)}(L) = 0$ для каждого целого $k \geq 1$.

(d) 2-Форма β на M точна тогда и только тогда, когда $A(0) = A(L)$. Если $A(0) = A(L)$, то 1-форма $(A(r) - A(0))d\varphi$ на цилиндре $M \setminus \{N, S\}$ продолжается до 1-формы α класса C^∞ на M , удовлетворяющей условию $\beta = d\alpha$. \square

Далее будем считать, что функции $f(r)$, $U(r)$, $A(r)$ удовлетворяют условиям гладкости из леммы 1.1 (а)–(с). Индуцированное S^1 -действие на T^*M является гамильтоновым, порожденным функцией

$$K := p_\varphi + A(r)$$

(которая является гладкой на T^*M , будучи суммой двух гладких функций p_φ и $A(r)$). Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что симплектическая структура имеет вид $\omega = dp_r \wedge dr + dK \wedge d\varphi$, откуда $\omega(\cdot, \frac{\partial}{\partial \varphi}) = dK$.

В работе изучается топология слоения Лиувилля рассматриваемой интегрируемой системы. В §2 описаны особые точки ранга 0 отображения момента, получен критерий их невырожденности, определен тип невырожденных точек (предложение 2.1), описаны бифуркации типичных вырожденных точек (замечание 1). В §3 изучаются особые окружности ранга 1: получено их параметрическое задание, критерий невырожденности, определены типы невырожденных и типичных вырожденных особых окружностей, построено параметрическое задание бифуркационной диаграммы отображения момента (предложение 3.1 (А)), описаны геометрические свойства бифуркационной диаграммы и бифуркационного комплекса, когда функции $F(r)$, $U(r)$, $A(r)$ находятся в общем положении (предложение 3.1 (В)). В §4 определена топология неособых изоэнергетических 3-мерных многообразий Q^3 системы (предложение 4.1), описана топология слоения Лиувилля на них с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности (§4.1), доказано несуществование циклов в молекуле (предложение 4.2), обнаружены “расщепляющиеся” гиперболические особенности ранга 1, известные как топологически неустойчивые бифуркации слоения Лиувилля (замечание 4). В §5 вычислены метки Фоменко-Цишанга на некоторых ребрах молекулы, нужные для вычисления инварианта Фоменко-Цишанга (меченой молекулы) — полного инварианта лиувиллевой эквивалентности систем на Q^3 .

Случай натуральных механических систем без магнитного поля был изучен в [2, 3], а случай систем на эллипсоиде вращения с магнитным полем — в [4].

2 Особые точки ранга 0 отображения момента

Отображение $(H, K) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *отображением момента*.

Будем считать, что северный и южный полюсы N, S на M имеют вид $r = 0$ и $r = L$ соответственно.

Предложение 2.1. *Точка $(p_0, q_0) \in T^*M$ является особой точкой ранга 0 отображения момента тогда и только тогда, когда она совпадает с точкой $(0, N)$ или $(0, S)$, где $N, S \in M$ — северный и южный полюсы на поверхности вращения M . Особая точка $(0, N)$ (соответственно $(0, S)$) невырождена тогда и только тогда, когда $4U''(0) + A''(0)^2 \neq 0$ (соответственно $4U''(L) + A''(L)^2 \neq 0$). Если эта точка невырождена, то она имеет тип центр-центр или фокус-фокус в зависимости от знака $\text{sgn}(4U''(0) + A''(0)^2) = +1$ или -1 (соответственно $\text{sgn}(4U''(L) + A''(L)^2) = +1$ или -1).*

Доказательство. Шаг 1. Докажем, что система на T^*M имеет ровно две особые точки ранга 0: точку $(p, q) = (0, N)$ и точку $(p, q) = (0, S)$.

Особые точки ранга 0 — это фазовые точки $(p_0, q_0) \in T^*M$, являющиеся положениями равновесия обеих этих систем. Но положения равновесия второй системы, т.е. системы $v = \text{sgrad } K$, — это неподвижные точки S^1 -действия на T^*M . Опишем все такие фазовые точки $(p_0, q_0) \in T^*M$.

Если точка q_0 не является полюсом, то в канонических координатах p_r, K, r, φ дифференциал функции K в фазовой точке (p_0, q_0) имеет вид $dK = (0, 1, 0, 0) \neq 0$. Значит, эта фазовая точка не является неподвижной для S^1 -действия.

Пусть теперь точка q_0 является полюсом $r = 0$, т.е. $q_0 = N$. Фиксируем произвольный импульс $p_0 \in T_{q_0}^*M$ в этой точке. Так как потенциалы $U(r)$ и $A(r)$ являются гладкими функциями на поверхности вращения M , то в малой окрестности точки $(p_0, N) \in T^*M$ над полюсом $r = 0$ имеем

$$U(r) = c_0 + \frac{c_1}{2}r^2 + o(r^2), \quad A(r) = a_0 + \frac{a_1}{2}r^2 + o(r^2), \quad r \rightarrow 0. \quad (2)$$

Рассмотрим в этой окрестности локальные координаты p_x, p_y, x, y , где

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (3)$$

— координаты в окрестности полюса $r = 0$ на M , а p_x, p_y — сопряженные импульсы. В этих координатах симплектическая структура в точке (p_0, N) (над полюсом)

задается матрицей $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому в окрестности точки (p_0, N)

(над полюсом) гамильтониан и дополнительный первый интеграл принимают вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + c_0 + c_1 \frac{x^2 + y^2}{2} + o(x^2 + y^2), \quad K = xp_y - yp_x + a_0 + a_1 \frac{x^2 + y^2}{2} + o(x^2 + y^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} dH &= p_x dp_x + p_y dp_y + c_1(xdx + ydy) + O(x^2 + y^2), \\ dK &= -ydp_x + xdp_y + p_y dx - p_x dy + a_1(xdx + ydy) + O(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

В частности, в любой точке вида (p_0, N) (над полюсом) имеем

$$dH = p_x dp_x + p_y dp_y, \quad dK = p_y dx - p_x dy. \quad (4)$$

Поэтому равенство $dK = 0$ в точке (p_0, N) равносильно системе равенств $p_x = p_y = 0$, т.е. равенству $p_0 = 0$. Значит, неподвижные точки S^1 -действия на T^*M — это в точности требуемые точки $(0, N)$ и $(0, S)$.

В обеих этих точках $dH = 0$ (в силу (4)), т.е. обе эти точки являются положениями равновесия первой системы (с гамильтонианом H), а потому имеют ранг 0.

Шаг 2. Вычислим матрицы вторых дифференциалов в точке $(0, N)$ ранга 0:

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad d^2K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Затем вычисляем матрицы гамильтоновых операторов $A_H = \Omega^{-1}d^2H$ и $A_K = \Omega^{-1}d^2K$. Так как $\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -c_1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Осталось найти собственные значения матрицы

$$\lambda A_H + \mu A_K = \begin{pmatrix} 0 & a_1\lambda - \mu & -c_1\lambda & 0 \\ -a_1\lambda + \mu & 0 & 0 & -c_1\lambda \\ \lambda & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадраты собственных значений равны $(-\mu^2 - 2c_1\lambda^2 - (a_1\lambda - \mu)^2 \pm (2\mu - a_1\lambda)\lambda\sqrt{a_1^2 + 4c_1})/2$.

Если $a_1 = 0$, то из случая с нулевым магнитным полем [2], [3, §1.2, лемма 3] получаем, что при $c_1 = 0$ особая точка ранга 0 вырождена, при $c_1 > 0$ невырождена и имеет тип центр-центр, а при $c_1 < 0$ невырождена и имеет тип фокус-фокус.

Если $c_1 = 0$ и $a_1 \neq 0$, то при $\lambda \neq 0$ и $\mu \notin \{0, a_1\lambda, \frac{a_1}{2}\lambda\}$ собственные значения равны $\pm i(a_1\lambda - \mu), \pm i\mu$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип центр-центр.

Если $a_1^2 + 4c_1 > 0$ и $a_1c_1 \neq 0$, то при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ собственные значения равны $\pm i(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4c_1})/2$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип центр-центр.

Если $a_1^2 + 4c_1 < 0$ и $a_1 \neq 0$, то при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$ собственные значения равны $\pm i(a_1 \pm \sqrt{-a_1^2 - 4c_1})/2$, а значит, особая точка ранга 0 невырождена и имеет тип фокус-фокус.

В оставшемся случае ($c_1 = -a_1^2/4 < 0$) положим $\lambda = 1$ и $\mu = a_1/2$. Тогда все собственные значения оператора $\lambda A_H + \mu A_K$ равны 0. Но поскольку сам этот оператор отличен от нуля, то он не диагонализуем над полем \mathbb{C} (т.е. не является полупростым, т.е. его жорданова форма содержит нетривиальную жорданову клетку). Значит, особая точка ранга 0 вырождена.

Заметим, что $a_1 = A''(0)$ и $c_1 = U'''(0)$. Таким образом, тип невырожденной особой точки ранга 0 (в полюсе $r = 0$) определяется знаком числа $4c_1 + a_1^2 = 4U'''(0) + A''(0)^2$. \square

Замечание 1. Изучим более подробно случай, когда точка ранга 0 вырождена ($c_1 = -a_1^2/4$). Будем считать, что функции $F(r), U(r), A(r)$ гладко зависят от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, причем $\lambda = c_1 + \frac{a_1^2}{4}$.

Так как функции $f(r)$ и $A(r)$ удовлетворяют условиям из леммы 1.1 (а)—(с), то они продолжаются до C^∞ $2L$ -периодичных функций на всей прямой, где $f(r)$ нечетная, а $A(r)$ четная. Далее под $f(r)$ и $A(r)$ будем понимать такие $2L$ -периодичные функции.

Проведем рассуждение для точки $(0, N)$ ранга 0 (для точки $(0, S)$ рассуждение аналогично). Представим функцию $A(r)$ в виде $A(r) = a_0 + r^2 A_1(r)$. Ясно, что функция $A_1(r)$ является гладкой и четной в малой окрестности точки $r = 0$ на \mathbb{R} . Нелинейная замена локальных координат

$$\tilde{p}_x = p_x - A_1(r)y, \quad \tilde{p}_y = p_y + A_1(r)x$$

(называемая *преобразованием ведущего центра*) является регулярной и приводит симплектическую структуру к каноническому виду:

$$\omega = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy + \frac{A'(r)}{r} dx \wedge dy = d\tilde{p}_x \wedge dx + d\tilde{p}_y \wedge dy.$$

Эта замена приводит 2π -периодический первый интеграл $\hat{K} := K - a_0$ к виду

$$\hat{K} = K - a_0 = xp_y - yp_x + A(r) - a_0 = x\tilde{p}_y - y\tilde{p}_x + A(r) - a_0 - r^2 A_1(r) = x\tilde{p}_y - y\tilde{p}_x,$$

а функцию Гамильтона H , с учетом соотношений $p_r = (xp_x + yp_y)/r$, $p_\varphi = xp_y - yp_x$ и $p_r^2 + p_\varphi^2/r^2 = p_x^2 + p_y^2$, к виду

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_r^2}{2} + F(r) \frac{p_\varphi^2}{2} + U(r) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + F_1(r) \frac{p_\varphi^2}{2} + U(r) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + F_1(r) \frac{(xp_y - yp_x)^2}{2} + U(r) \\ &= \frac{(\tilde{p}_x + A_1(r)y)^2 + (\tilde{p}_y - A_1(r)x)^2}{2} + F_1(r) \frac{(\hat{K} - r^2 A_1(r))^2}{2} + U(r) =: \frac{\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2}{2} + \hat{U}_{\hat{K}}(r^2). \end{aligned}$$

Здесь $F(r) = \frac{1}{r^2} + F_1(r)$, т.е. $f(r) = \frac{1}{\sqrt{F(r)}} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2 F_1(r)}}$, откуда функция $F_1(r)$ гладкая и четная в малой окрестности точки $r = 0$, семейство функций

$$\hat{U}_k(\rho) := U(\rho^{1/2}) + F_1(\rho^{1/2}) \frac{k^2}{2} - (1 + \rho F_1(\rho^{1/2})) A_1(\rho^{1/2}) k + (1 + \rho F_1(\rho^{1/2})) \frac{A_1(\rho^{1/2})^2}{2} \rho$$

с параметром $k \in \mathbb{R}$ является гладким в окрестности точки $\rho = 0$. Имеем

$$\tilde{H} := H - \hat{U}_{\hat{K}}(0) = \frac{\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2}{2} + \hat{U}'_{\hat{K}}(0) r^2 + \frac{1}{2} \hat{U}''_{\hat{K}}(0) r^4 + o(r^4), \quad (5)$$

где

$$\hat{U}_{\hat{K}}(0) = c_0 - A_1(0) \hat{K} + F_1(0) \frac{\hat{K}^2}{2} = U(0) - \frac{1}{2} A''(0) \hat{K} - \frac{1}{6} f'''(0) \hat{K}^2,$$

$$\hat{U}'_0(0) = \frac{c_1}{2} + \frac{A_1(0)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(U''(0) + \frac{1}{4} A''(0)^2 \right) = \frac{\lambda}{2},$$

$$\hat{U}''_0(0) = \frac{U''''(0)}{12} + F_1(0) A_1(0)^2 + A_1(0) A_1''(0) = \frac{1}{12} \left(U''''(0) - f'''(0) A''(0)^2 + \frac{1}{2} A''(0) A''''(0) \right).$$

Предположим, что при $\lambda = 0$ и $\hat{K} = 0$ в ряде Тейлора (5) функции \tilde{H} коэффициент при r^4 отличен от нуля, т.е. $\hat{U}''_0|_{\lambda=0}(0) \neq 0$. Тогда при прохождении параметра $\lambda := c_1 + \frac{a_1^2}{4}$ через 0 происходит “интегрируемая гамильтонова бифуркация Хопфа”: при $\lambda < 0$ точка ранга 0 имеет тип фокус-фокус, при $\lambda = 0$ она вырождается, а при $\lambda > 0$ имеет тип центр-центр. Если при $\lambda = 0$ на совместном множестве уровня $\{H = U(0), K = A(0)\}$ нет других особых точек отображения момента, то при переходе параметра λ через 0 (т.е. при прохождении c_1 через значение $-a_1^2/4$) бифуркационная диаграмма в окрестности точки $(U(0), A(0))$ преобразуется как на рис. 1, в зависимости от знака $\eta = \text{sgn} \hat{U}''_0|_{\lambda=0}(0) = \pm 1$. Такая бифуркация типична, т.е. устойчива относительно малых интегрируемых возмущений 1-параметрического семейства интегрируемых систем [5].

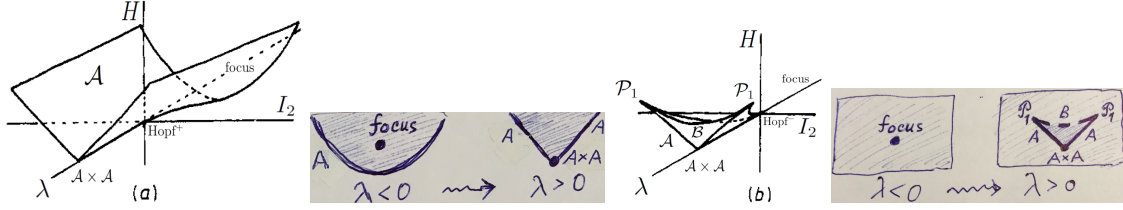


Рис. 1: Bifurcation diagram and bifurcation complex (with flap topology [6] at the closure of the hyperbolic arc) of the integrable Hamiltonian Hopf bifurcation in the (a) supercritical case ($\eta = +1$), (b) subcritical case ($\eta = -1$)

3 Особые точки ранга 1 и бифуркационная диаграмма отображения момента

Множество критических значений отображения момента называется *бифуркационной диаграммой* этого отображения. Рассмотрим *слоение Лиувилля* на T^*M , ассоциированное с данной интегрируемой системой, слоями которого являются интегральные подмножества (т.е. связные компоненты совместных множеств уровня функций H и K). The base of the Liouville foliation is called the *bifurcation complex*; it was introduced by A.T.Fomenko (the cell-complex K in [7, §5], the affine variety A in [6] called the *unfolded momentum domain*); it is a (branched) covering of the *momentum domain* $F(M)$ [6]. As pointed out by V.I. Arnold, it is interesting to investigate singularities of the bifurcation complex. S.P. Novikov stated the following important question: in which form does the bifurcation complex, as a topological invariant of the Liouville foliation, “feels” algebraicity of the momentum map F .

В данном разделе мы покажем, что (при условии $F'(r)^2 + A'(r)^2 > 0$) бифуркационная диаграмма состоит из пар дуг γ_i^+ и γ_i^- таких, что каждая дуга γ_i^η (для $\eta = \pm 1$) параметризуется в виде $(h_\eta(r), k_\eta(r))$, где параметр r на дуге γ_i^η пробегает подмножество $I_i^\eta \subset (0, L)$ следующего вида. Подмножество I_i — это максимальный по включению промежуток на интервале $(0, L)$, заданный неравенством $D(r) \geq 0$, а подмножество $I_i^\eta \subset I_i$ получается из I_i выкидыванием всех “экваторов” (т.е. таких точек $\hat{r}_j \in (0, L)$, что $F'(\hat{r}_j) = 0$), в которых $\eta A'(r) > 0$:

$$I_i^\eta := I_i \setminus \{r \in (0, L) \mid F'(r) = 0, \eta A'(r) > 0\}, \quad \eta \in \{\pm 1\}.$$

Здесь

$$D(r) = (A'(r)F(r))^2 - 2F'(r)U'(r), \quad (6)$$

$$k_\eta(r) = \begin{cases} A(r) + \frac{A'(r)F(r) + \eta\sqrt{D(r)}}{F'(r)}, & F'(r) \neq 0, \\ A(r) + \frac{U'(r)}{A'(r)F(r)}, & F'(r) = 0, \end{cases} \quad r \in I_i^\eta,$$

$$h_\eta(r) = U(r) + (k_\eta(r) - A(r))^2 \frac{F(r)}{2} = U(r) - F(r) \frac{U'(r) - (k_\eta(r) - A(r))A'(r)F(r)}{F'(r)}. \quad (7)$$

Заметим, что $k_\eta(r) \rightarrow \infty$ и $k_{-\eta}(r) \rightarrow k_{-\eta}(\hat{r}_j)$, когда r стремится к экватору \hat{r}_j и $\eta A'(\hat{r}_j) > 0$. Эти же свойства верны и для функций $h_\pm(r)$ ввиду (7). Функцию

$$U_k(r) := U(r) + F(r) \frac{(k - A(r))^2}{2} \quad (8)$$

назовем *эффективным потенциалом*, где $k \in \mathbb{R}$ — параметр.

Определение 3.1. Будем говорить, что функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся в *общем положении*, если

- (i) $(4U''(r) + A''(r)^2)^2 + (2U''''(r) - 2f'''(r)A''(r)^2 + (r)A''''(r))^2 > 0$ в каждом полюсе $r \in \{0, L\}$ (т.е. точки ранга 0 невырождены или являются типичными вырожденными, см. предложение 2.1 и замечание 1),
- (ii) функция $D(r)$ на интервале $(0, L)$ имеет только простые нули r_i ,
- (iii) все критические точки функций $F(r), U(r), A(r)$ на каждом промежутке I_i попарно различны и отличны от концов r_j этого промежутка.

Если дополнительно

- (iv) $(U''_{k_\eta(r)}(r))^2 + (U'''_{k_\eta(r)}(r))^2 > 0$ внутри каждого промежутка I_i , и $U''_{k_\eta(r_j)}(r_j) \neq 0$ в любом конце этого промежутка,

то будем говорить, что функции $F(r), U(r), A(r), k_+(r), k_-(r)$ находятся в *общем положении*.

Предложение 3.1. Пусть $F'(r)^2 + A'(r)^2 > 0$ на $(0, L)$. Тогда:

(A) *Относительные положения равновесия системы (т.е. точки ранга 1 отображения момента) образуют 1-параметрическое семейство окружностей $\mathcal{O}_r^\eta \subset T^*(M \setminus \{N, S\})$, имеющих в координатах (p_r, K, r, φ) вид*

$$\mathcal{O}_r^\eta := \{(0, k_\eta(r), r, \varphi) \mid \varphi \in S^1\}, \quad r \in I^\eta, \quad \eta = \pm 1, \quad \text{где}$$

$$I^\eta := I \setminus \{r \in (0, L) \mid F'(r) = 0, \eta A'(r) > 0\},$$

$I \subset (0, L)$ — подмножество, задаваемое неравенством $D(r) \geq 0$, см. (6), (7).

Значение отображения момента $(H, K) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^2$ на окружности \mathcal{O}_r^η равно

$$\gamma^\eta(r) := (h_\eta(r), k_\eta(r)),$$

см. (7). В частности, бифуркационная диаграмма отображения момента состоит из двух точек $(U(0), A(0))$ и $(U(L), A(L))$ и кривых $\gamma^\eta = \gamma^\eta(r)$, $r \in I^\eta$, $\eta = \pm 1$.

Окружность \mathcal{O}_r^η удовлетворяет соотношению $U'_{k_\eta(r)}(r) = 0$; она невырождена тогда и только тогда, когда $U''_{k_\eta(r)}(r) \neq 0$, см. (8). Если окружность невырождена, то она имеет эллиптический или гиперболический тип в зависимости от знака $\text{sgn } U''_{k_\eta(r)}(r) = +1$ или -1 . Если окружность вырождена и $U'''_{k_\eta(r)}(r) \neq 0$ и $D(r) \neq 0$, то она имеет параболический тип [8, Definition 2.1].

(B) Пусть функции $F(r), U(r), A(r)$ находятся в общем положении (определение 3.1). Тогда подмножество $I \subset (0, L)$ состоит из конечного числа попарно непересекающихся отрезков $I_i = [r_{2i-1}, r_{2i}]$, $1 \leq i \leq N$, и, возможно, “граничных” полуинтервалов $I_0 = (0, r_0]$ и $I_{N+1} = [r_{2N+1}, L)$. Здесь “граничный” полуинтервал I_0 с концом в полюсе $r = 0$ (соответственно I_{N+1} с концом в полюсе $r = L$) присутствует тогда и только тогда, когда отвечающее этому полюсу число в предложении 2.1 положительно, т.е. соответствующая точка ранга 0 имеет тип центр-центр. Каждая дуга $\gamma_i^\eta = \gamma^\eta|_{[r_{2i-1}, r_{2i}]}$ бифуркационной диаграммы обладает следующими свойствами:

(а) при стремлении параметра r к экватору \hat{r}_j (т.е. к критической точке функции $F(r)$) в случае $\eta A'(\hat{r}_j) > 0$ дуга уходит на бесконечность обеими координатами так, что $k_\eta(r) \text{sgn}(F'(r)) \rightarrow \eta\infty$ и $h_\eta(r) \sim \frac{F(\hat{r}_j)}{2} k_\eta(r)^2$ при $r \rightarrow \hat{r}_j$ (ср. [4, Corollary 3 (2)]),

(б) гладкость функций $h_\eta(r)$ и $k_\eta(r)$ может нарушаться только в точках r_i и точках \hat{r}_j из (а), причем в малой окрестности любой точки r_i (т.е. общего конца дуг из γ^+ и γ^-) эти функции гладко зависят от параметра $t_i = \eta\sqrt{|r - r_i|}$ и имеют ненулевые производные по этому параметру в этой точке,

(с) для любого $r \in (r_{2i-1}, r_{2i})$ вектор скорости дуги $\gamma_i^\eta(r)$ имеет вид

$$(h'_\eta(r), k'_\eta(r)) = -\eta \frac{U''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}} (F(r)(k_\eta(r) - A(r)), 1);$$

в частности, вырожденность окружности \mathcal{O}_r^η при таком r равносильна равенству нулю вектора скорости дуги (т.е. тому, что r является критической точкой функции $k_\eta(r)$), а параболичность окружности \mathcal{O}_r^η равносильна тому, что r является морсовской критической точкой функции $k_\eta(r)$; отношение $h'_\eta(r)/k'_\eta(r) = F(r)(k_\eta(r) - A(r))$, т.е. котангенс угла наклона касательной к дуге, имеет постоянный знак на любом интервале, в котором $U'(r) \neq 0$ или $\eta A'(r) > 0$; а при

переходе параметра r через любую морсовскую критическую точку \check{r}_ℓ потенциала $U(r)$ такую, что $\eta A'(\check{r}_\ell) < 0$, это отношение меняет знак (т.е. дуга касается прямой $\{h = U(\check{r}_\ell)\}$ в точке $(U(\check{r}_\ell), A(\check{r}_\ell))$ и малая окрестность этой точки в дуге лежит по одну сторону от касательной),

(d) окружность $\mathcal{O}_{r^0}^\eta$ состоит из положений равновесия системы (а потому содержащее ее изоэнергетическое 3-мерное многообразие является особым) тогда и только тогда, когда r^0 является критической точкой потенциала $U(r)$ и $\eta A'(r^0) < 0$; последнее условие равносильно тому, что $(h_\eta(r^0), k_\eta(r^0)) = (U(r^0), A(r^0))$ и дуга $(h_\eta(r), k_\eta(r))$ касается прямой $\{h = U(r^0)\}$ в точке $(U(r^0), A(r^0))$,

(e) дуга γ_i^η имеет невырожденную точку возврата (т.е. точку возврата типа “полукубическая парабола”) при прохождении параметра $r \in (r_{2i-1}, r_{2i})$ через любую морсовскую критическую точку функции $k_\eta(r)$,

(f) если функции $F(r)$, $U(r)$, $A(r)$, $k_+(r)$, $k_-(r)$ находятся в общем положении, то все критические точки функции $k_\eta(r)$ на интервале (r_{2i-1}, r_{2i}) являются морсовскими, и любая поддуга в $\gamma_i^+ \cup \gamma_i^-$, не содержащая точек из (e) и (a) (т.е. точек возврата и точек “ухода дуги на бесконечность”), является графиком $\Gamma_{\hat{h}} = \{(\hat{h}(k), k)\}$ некоторой морсовской функции $\hat{h} = \hat{h}(k)$; проекция такой эллиптической (соответственно гиперболической) поддуги на ось Ok строго убывает (соответственно возрастает) относительно ориентации поддуги в направлении роста локального параметра ηr ; в малой окрестности любой точки возврата $r = r^0$ дуги γ_i^η выполнено $\hat{h}_{\text{ell}}(k) < \hat{h}_{\text{hyp}}(k)$, где $\hat{h}_{\text{ell}}(k)$ и $\hat{h}_{\text{hyp}}(k)$ — морсовские функции на полуинтервале $(k_\eta(r^0), k_\eta(r^0 + \varepsilon))$ или $(k_\eta(r^0) - \varepsilon, k_\eta(r^0))$ (в зависимости от знака $-\eta \operatorname{sgn} U'''_{k_\eta(r^0)}(r^0) = +1$ или -1), задающие эллиптическую и гиперболическую поддуги, имеющие общий конец в точке возврата r_0 ; пересечение малой регулярной окрестности точки $(\hat{h}(k^0), k^0)$ в бифуркационном комплексе с множеством $\{h > \hat{h}(k^0), k = k^0\}$ связно.

В частности, проекция на ось Ok любой поддуги из (f) (т.е. не содержащей точек возврата) строго монотонна, однако проекция этой поддуги на ось Oh не всегда строго монотонна: соответствующая морсовская функция $\hat{h}(k)$ имеет локальные экстремумы в точности в точках \check{r}_ℓ из (c).

Доказательство. Докажем (A). Предположим, что ранг отображения момента в точке $(p^0, q^0) \in T^*M$ равен 1.

Шаг 1. Покажем, что точка $q^0 \in M$ не является полюсом. Согласно формуле (4), в точке (p^0, N) (над полюсом) пропорциональность ковекторов dH и dK равносильна системе равенств $p_x^0 = p_y^0 = 0$, т.е. равенству $p^0 = 0$. Значит, точка (p^0, N) (над полюсом) является особой точкой отображения момента (ранга 0 или 1) тогда и только тогда, когда $p^0 = 0$. Но по предложению 2.1 в точке $(0, N)$ ранг отображения

момента равен 0, а потому не может быть равен 1.

Шаг 2. В канонических координатах $(p, q) = (p_r, K, r, \varphi)$ выполнено $dK = (0, 1, 0, 0)$ и

$$H = \frac{p_r^2}{2} + U_K(r), \quad (9)$$

где $U_K(r)$ — эффективный потенциал (8). Имеем

$$dH = (p_r, F(r)(K - A(r)), U'_K(r), 0). \quad (10)$$

Но равенство ранга единице в точке $(p^0, q^0) = (p_r^0, k^0, r^0, \varphi^0)$ равносильно пропорциональности ковекторов dK и dH в этой точке, т.е. равносильно системе

$$p_r^0 = 0, \quad U'_{k^0}(r^0),$$

где штрихом обозначена частная производная по r . Получаем $(p^0, q^0) = (0, k^0, r^0, \varphi^0)$, где (k^0, r^0) является решением уравнения

$$U'_{k^0}(r^0) = 0.$$

Запишем это уравнение:

$$F'(r^0) \frac{(k^0 - A(r^0))^2}{2} - F(r^0)(k^0 - A(r^0))A'(r^0) + U'(r^0) = 0. \quad (11)$$

С учетом формулы (10) ковектор dH в нашей точке $(0, k^0, r^0, \varphi^0)$ ранга 1 имеет вид

$$dH = (0, F(r^0)(k^0 - A(r^0)), 0, 0) = F(r^0)(k^0 - A(r^0))dK. \quad (12)$$

Шаг 3. Обозначим

$$h^0 := H(p^0, q^0) = U_{k^0}(r^0).$$

Тогда образом нашей точки ранга 1 при отображении момента $(H, K) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^2$ является точка (h^0, k^0) . Очевидно,

$$h^0 = F(r^0) \frac{(k^0 - A(r^0))^2}{2} + U(r^0) \geq U(r^0). \quad (13)$$

Найдем явные выражения для точки (h^0, k^0) через r^0 . Уравнение (11) переписывается в виде квадратного или линейного уравнения на величину $z := k^0 - A(r^0)$:

$$F'(r^0) \frac{z^2}{2} - A'(r^0)F(r^0)z + U'(r^0) = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $F'(r^0) = 0$ (т.е. r^0 — “экватор”), поэтому $A'(r^0) \neq 0$. Для линейного уравнения (14) находим решение $z = \frac{U'(r^0)}{A'(r^0)F(r^0)}$, откуда

$$k^0 = A(r^0) + \frac{U'(r^0)}{A'(r^0)F(r^0)}, \quad h^0 = U(r^0) + F(r^0) \frac{(k^0 - A(r^0))^2}{2}.$$

Случай 2: $F'(r^0) \neq 0$. Дискриминант квадратного уравнения (14) равен $D(r^0)$ (см. (6)). Разрешимость уравнения эквивалентна неравенству $D(r^0) \geq 0$ (т.е. $r_0 \in I$), а решение имеет вид $z = \frac{A'(r^0)F(r^0) + \eta\sqrt{D(r^0)}}{F'(r^0)}$, где $\eta = \pm 1$. Это сразу дает требуемое описание семейства точек ранга 1. Подставляя найденное решение в выражения

$$k^0 = A(r^0) + z, \quad h^0 = U(r^0) + F(r^0) \frac{z^2}{2},$$

получаем требуемое параметрическое представление дуг бифуркационной диаграммы в (A), а также описание подмножества $I \subset (0, L)$ из (A).

Шаг 4. Пусть окружность $\mathcal{O} = \{(0, k^0, r^0)\} \times S^1$ состоит из относительных положений равновесия, т.е. r^0 является критической точкой эффективного потенциала $U_{k^0}(r)$. По доказанному $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{r^0}^\eta$ для некоторого знака $\eta = \pm 1$. Изучим условие невырожденности окружности \mathcal{O} .

Из формулы (9) для H следует, что \mathcal{O} невырождена тогда и только тогда, когда $U''_{k^0}(r^0) \neq 0$, т.е. когда точка r^0 является невырожденной точкой локального минимума или максимума функции $U_{k^0}(r)$. В первом случае имеем $U''_{k^0}(r^0) > 0$ и окружность \mathcal{O} является эллиптической, а во втором — $U''_{k^0}(r^0) < 0$ и окружность \mathcal{O} является гиперболической.

Предположим, что \mathcal{O} вырождена, т.е. $U''_{k^0}(r^0) = 0$. Предположим также, что $U'''_{k^0}(r^0) \neq 0$ и $D(r^0) \neq 0$ (а значит, $D(r^0) > 0$ по шагу 3). Рассмотрим семейство функций $U_k(r)$ с параметром $k \in (k^0 - \varepsilon, k^0 + \varepsilon)$. Нас интересует семейство критических точек (k, r) этих функций — семейство решений уравнения $U'_k(r) = 0$, и множество критических значений $(U_k(r), k)$ (локальная бифуркационная диаграмма). С учетом неравенств $U'''_{k^0}(r^0) \neq 0$ и

$$\frac{\partial}{\partial k} U'_{k^0}(r^0) = F'(r^0)(k^0 - A(r^0)) - F(r^0)A'(r^0) = \eta\sqrt{D(r^0)} \neq 0 \quad (15)$$

получаем, что окружность \mathcal{O} является параболической [8, Definition 2.1]. Поэтому соответствующее 1-параметрическое семейство окружностей \mathcal{O}_r^η является гладким в малой окрестности окружности $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{r^0}^\eta$ и разбивается ею на семейство эллиптических окружностей, отвечающих значениям параметра r по одну сторону от r^0 , и семейство гиперболических окружностей, отвечающих значениям параметра r по другую сторону от r^0 , и локальная бифуркационная диаграмма имеет невырожденную точку возврата при $r = r^0$. Действительно: в силу результатов теории

особенностей существует локальная регулярная замена координат $r \rightarrow \tilde{r} = \tilde{r}(r, k)$, $k \rightarrow \tilde{k} = \tilde{k}(k)$ со свойствами $\tilde{r}(r^0, k^0) = 0$ и $\tilde{k}(k^0) = 0$, приводящая наше семейство функций к нормальной форме $U_k(r) = \tilde{r}^3 + \tilde{k}\tilde{r} + a(\tilde{k})$, где $a(\tilde{k})$ — некоторая гладкая функция с $a(0) = U_{k^0}(r^0)$ (см. [9] или [8, Proposition 2.4, Lemma 2.5]). Пусть $\tilde{r} \rightarrow r = r(\tilde{r}, \tilde{k})$, $\tilde{k} \rightarrow k = k(\tilde{k})$ — обратная замена. Тогда уравнение $U_k(r) = 0$ переписывается в виде $3\tilde{r}^2 + \tilde{k} = 0$, и локальная бифуркационная диаграмма задается параметрически в виде $(-2\tilde{r}^3 + a(-3\tilde{r}^2), k(-3\tilde{r}^2))$, где \tilde{r} пробегает малую окрестность нуля. Значит, она является полукубической параболой с вершиной (острием = каспом) в точке $(U_{k^0}(r^0), k^0)$.

Шаг 5. Докажем (B). Пусть функции $F(r)$, $U(r)$, $A(r)$ находятся в общем положении. Конечность числа отрезков I_i в $I \subset (0, L)$ следует из разложения

$$\begin{aligned} D(r) &= (A'(r)F(r))^2 - 2F'(r)U'(r) = \\ &= (4U''(0) + A''(0)^2)\frac{1}{r^2} + \frac{2}{3} \left(U''''(0) - f'''(0)A''(0)^2 + \frac{1}{2}A''(0)A''''(0) \right) + O(r^2) \end{aligned}$$

при $r \rightarrow 0$ и аналогичного разложения при $r \rightarrow L$. Действительно: первые два коэффициента в этом разложении не могут одновременно обращаться в ноль в силу условия общности положения, а значит функция $D(r)$ отделена от нуля на каждом конце интервала $(0, L)$.

Интересно отметить, что указанные два коэффициента совпадают (с точностью до положительных множителей) с первыми двумя коэффициентами в ряде Тейлора (5) первого интеграла \tilde{H} в соответствующей точке ранга 0. В частности, если первый коэффициент отличен от нуля, то его знак отвечает за тип невырожденной точки ранга 0, согласно предложению 2.1. Если же первый коэффициент равен нулю, а второй отличен от нуля, то знак второго коэффициента отвечает за тип бифуркации Хопфа для любого 1-параметрического семейства систем, задаваемого функциями $F_\lambda(r)$, $U_\lambda(r)$, $A_\lambda(r)$ такими, что $F_0(r) = F(r)$, $U_0(r) = U(r)$, $A_0(r) = A(r)$ и $\lambda = U''_\lambda(r^0) + \frac{1}{4}A''_\lambda(r^0)^2$ при $r^0 = 0$ или $r^0 = L$, см. замечание 1.

Осталось доказать свойства (a)—(f) из (B).

(a) Опишем поведение бифуркационных дуг, называемое “уходом на бесконечность”. Пусть $F'(r^0) = 0$ (т.е. r^0 — экватор) и $\eta A'(r^0) > 0$. Покажем, что $h_\eta(r)$ и $k_\eta(r)$ стремятся к бесконечности при $r \rightarrow r^0$. Ввиду гладкости функций $A(r)$ и $U(r)$ это свойство равносильно тому, что z (из шага 3) стремится к бесконечности при $r \rightarrow r^0$. Так как $\eta A'(r^0) > 0$, то при $r \rightarrow r^0$ числитель в z принимает вид

$$\begin{aligned} A'(r)F(r) + \eta\sqrt{D(r)} &= A'(r)F(r) \left(1 + \sqrt{1 - 2\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2}} \right) \\ &= A'(r)F(r) \left[2 - \frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$= 2A'(r)F(r) - \frac{F'(r)U'(r)}{A'(r)F(r)} - \frac{1}{8} \frac{(F'(r)U'(r))^2}{(A'(r)F(r))^3} + \dots$$

Отсюда

$$z = 2 \frac{A'(r)F(r)}{F'(r)} - \frac{U'(r)}{A'(r)F(r)} - \frac{1}{8} \frac{F'(r)U'(r)^2}{(A'(r)F(r))^3} + \dots \quad (16)$$

Так как в первом слагаемом $F'(r)$ стоит в знаменателе, а в остальных — только в числителе, то полученное выражение стремится к бесконечности при $r \rightarrow r^0$, что и требовалось.

(b) Изучим вопрос гладкости функций $h_\eta(r)$ и $k_\eta(r)$ в точке $r^0 \in I^\eta$. Ввиду гладкости функций $A(r)$ и $U(r)$ этот вопрос равносильен гладкости зависимости решения z (из шага 3) от параметра r при $r = r^0$.

Если $F'(r^0) \neq 0$ (т.е. r^0 не является экватором) и $D(r^0) > 0$, то из явных формул (7) для функций $h_\eta(r)$ и $k_\eta(r)$ получаем их гладкость в точке r^0 .

Если $F'(r^0) = 0$, то по условию $\eta A'(\hat{r}_j) < 0$. Поэтому при $r \rightarrow r^0$ числитель в z принимает вид

$$\begin{aligned} A'(r)F(r) + \eta\sqrt{D(r)} &= A'(r)F(r) \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2}} \right) \\ &= A'(r)F(r) \left[\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{F'(r)U'(r)}{(A'(r)F(r))^2} \right)^2 + \dots \right] = \frac{F'(r)U'(r)}{A'(r)F(r)} + \frac{1}{8} \frac{(F'(r)U'(r))^2}{(A'(r)F(r))^3} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$z = \frac{U'(r)}{A'(r)F(r)} + \frac{1}{8} \frac{F'(r)U'(r)^2}{(A'(r)F(r))^3} + \dots \quad (17)$$

Так как $F'(r)$ в первом слагаемом полностью сократилось, а в остальных слагаемых осталось только в числителе, то полученное выражение гладко зависит от r в малой окрестности точки r^0 .

Пусть теперь $D(r^0) = 0$. Пусть для определенности $r^0 = r_{2i-1}$ — левый конец отрезка $I_i = [r_{2i-1}, r_{2i}]$. Из условия общности положения функций имеем $F'(r^0)A'(r^0)D'(r^0) \neq 0$. Рассмотрим в малой окрестности точки r^0 замену параметра $r \rightarrow d = D(r)$. Так как $D'(r^0) \neq 0$, то эта замена регулярна. Обозначим обратную замену через $d \mapsto r = R(d)$. Положим $r^\varepsilon := R(\varepsilon^2)$, где $\varepsilon > 0$ мало. Введем параметр $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ на объединении двух дуг

$$\tilde{\gamma}_{2i-1} := \gamma_i^+[r^0, r^\varepsilon] \cup \gamma_i^-[r^0, r^\varepsilon],$$

полагая $s = \eta\sqrt{D(r)}$ на дуге $\gamma_i^\eta[r^0, r^\varepsilon]$, $\eta = \pm 1$. Получаем параметризацию дуги $\tilde{\gamma}_{2i-1}$:

$$s \mapsto (U \circ R(s^2) + \frac{1}{2}(\tilde{k}(s) - A \circ R(s^2))^2 F \circ R(s^2), A \circ R(s^2) + (A' \circ R(s^2) F \circ R(s^2) + s) F' \circ R(s^2)^{-1}) =: (\tilde{h}(s), \tilde{k}(s)).$$

Эта параметризация гладкая, так как функция $R(d)$ гладкая. Осталось проверить регулярность этой параметризации при $s = 0$. Вектор скорости дуги $\tilde{\gamma}_{2i-1}$ по параметру s при $s = 0$ равен

$$(\tilde{h}'(0), \tilde{k}'(0)) = \left(\frac{A'(r^0)F(r^0)^2}{F'(r^0)^2}, \frac{1}{F'(r^0)} \right).$$

Обе координаты этого вектора конечны и ненулевые ввиду $F'(r^0)A'(r^0) \neq 0$.

(с) Вычислим отношение $h'_\eta(r)/k'_\eta(r)$, т.е. котангенс угла наклона касательной к дуге γ_i^η , и исследуем вопрос о возможности изменения его знака. Предположим, что функция $k_\eta(r)$ является гладкой в окрестности точки $r^0 \in I^\eta$. Тогда $h_\eta(r) = U_{k_\eta(r)}(r)$ — тоже гладкая функция, будучи композицией гладких функций. С учетом (12) получаем требуемую формулу

$$h'_\eta(r) = k'_\eta(r)F(r)(k_\eta(r) - A(r)).$$

Осталось изучить вопрос: при переходе параметра r через какое значение $r^0 \in I^\eta$ может измениться знак разности $k_\eta(r) - A(r)$, которая выше обозначена через z (см. шаг 3).

Согласно (b), можно считать, что $D(r^0) > 0$ (т.е. $r^0 \neq r_i$) и либо $F'(r^0) \neq 0$, либо $F'(r^0) = 0$ и $\eta A'(\hat{r}_j) < 0$. В силу (b), z гладко зависит от r в точке r^0 .

Если $A'(r^0) = 0$, то из условия общности положения имеем $F'(r^0)U'(r^0) \neq 0$. Из явной формулы для z получаем, что $\eta F'(r^0)z > 0$ и $\eta U'(r^0)z < 0$ при $r = r^0$.

Если $A'(r^0) \neq 0$ и $F'(r^0) = 0$, то $\eta A'(r^0) < 0$ и (в силу условия общности положения) $U'(r^0) \neq 0$. Так как применима формула (17), то по ней получаем, что $\eta U'(r^0)z < 0$ при $r = r^0$.

Если $A'(r^0)F'(r^0) \neq 0$ и $\eta A'(r^0) > 0$, то из явной формулы для z получаем, что $\eta F'(r^0)z > 0$ при $r = r^0$.

Пусть теперь $A'(r^0)F'(r^0) \neq 0$ и $\eta A'(r^0) < 0$. Из явной формулы для z получаем, что в случае $U'(r^0) = 0$ выполнено $z = 0$ при $r = r^0$, а в случае $U'(r^0) \neq 0$ выполнено $\eta U'(r^0)z < 0$ при $r = r^0$. Поэтому в случае $U'(r^0) = 0$ и $U''(r^0) \neq 0$ (т.е. когда r^0 — морсовская критическая точка функции $U(r)$) решение z уравнения (14) зависит от r так, что при $r = r^0$ выполнено

$$z|_{r=r^0} = 0, \quad \left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=r^0} = \frac{U''(r^0)}{A'(r^0)F'(r^0)} \neq 0, \quad (18)$$

а потому число z меняет знак при прохождении r через r^0 .

(d) Изучим критические точки функции Гамильтона. В силу (12) точка $(0, k^0, r^0, \varphi)$ является критической для функции Гамильтона (т.е. в ней $dH = 0$) тогда и только

тогда, когда $k^0 = A(r^0)$. Последнее равносильно тому, что $z = 0$ (здесь z как в шаге 3). Из доказательства пункта (с) следует, что равенство $z = 0$ при $r = r^0$ равносильно тому, что $U'(r^0) = 0$ и $\eta A'(r^0) < 0$, что и требовалось.

(е) Изучим точки возврата бифуркационной дуги. Пусть $r^0 \in (r_{2i-1}, r_{2i})$ — морсовская критическая точка функции $k_\eta(r)$. Ввиду условия общности положения $F'(r_0)U'(r^0) \neq 0$. Отсюда и из доказательства пункта (с) получаем, что $z \neq 0$ при $r = r^0$. Значит, ввиду соотношения $h'_\eta(r) = k'_\eta(r)F(r)z$ из (с) и морсовости точки r^0 получаем, что она является морсовской критической точкой и для $h_\eta(r)$, т.е. для обеих функций $k_\eta(r)$ и $h_\eta(r)$. Поэтому эта точка является “острием”, или точкой возврата дуги. Невырожденность точки возврата следует из шага 4 и параболичности окружности $\mathcal{O}_{r^0}^\eta$ (действительно: в силу (с) и равенства $k'_\eta(r^0) = 0$ имеем $U''_{k_\eta(r^0)}(r^0) = 0$, откуда $U'''_{k_\eta(r^0)}(r^0) \neq 0$ в силу условия общности положения).

(ф) Изучим вопрос “монотонности” бифуркационных дуг. Пусть r^0 — внутренняя точка промежутка I_i^η .

Если $k'_\eta(r^0) \neq 0$, то в малой окрестности точки r^0 функция $k'_\eta(r)$ имеет постоянный знак, что и означает строгую монотонность проекции поддуги на ось Ok .

Пусть $k'_\eta(r^0) = 0$, т.е. r^0 — критическая точка функции $k_\eta(r)$. Покажем, что она является морсовской (отсюда с учетом (е) будет следовать, что она является невырожденной точкой возврата дуги $\gamma_i^\eta(r)$). В силу (с) имеем $k'_\eta(r) = -\eta \frac{U''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}}$. Отсюда, с учетом равенства $k'_\eta(r^0) = 0$, получаем $U''_{k_\eta(r^0)}(r^0) = 0$ и $k''_\eta(r^0) = -\eta \frac{U'''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}}$. Последнее выражение отлично от нуля ввиду условия общности положения. Значит, $k''_\eta(r^0) \neq 0$, что и означает морсовость точки r^0 .

Исследуем подробнее первый случай — когда $k'_\eta(r^0) \neq 0$. По доказанному дуга $\gamma_i^\eta(r) = (h_\eta(r), k_\eta(r))$ в малой окрестности точки $r = r^0$ является графиком некоторой функции $\hat{h}(k)$. Покажем, что функция $\hat{h}(k)$ морсовская. Пусть $k^0 = k_\eta(r^0)$ — критическая точка функции $\hat{h}(k)$, т.е. $\hat{h}'(k^0) = 0$. С учетом (с) имеем $\hat{h}'(k_\eta(r)) = F(r)(k_\eta(r) - A(r))$, откуда $k^0 - A(r^0) = 0$, т.е. $z|_{r=r^0} = 0$. Из доказательства (с) получаем, что $A'(r^0)F'(r^0) \neq 0$, $\eta A'(r^0) < 0$ и $U'(r^0) = 0$; в силу (18) имеем $\hat{h}''(k^0) = F(r^0) \frac{dz}{dr} \Big|_{r=r^0} = \frac{U''(r^0)}{A'(r^0)} \neq 0$, откуда k^0 — морсовская критическая точка функции $\hat{h}(k)$. Покажем теперь, что если поддуга эллиптическая (соответственно гиперболическая), то на ней координата k убывает (соответственно возрастает) при движении в направлении роста локального параметра ηr (ясно, что локальный параметр ηr индуцирует однозначную ориентацию на $\gamma_i^+ \cup \gamma_i^-$). Пусть для определенности $\eta k'_\eta(r^0) < 0$ (соответственно > 0). Так как $k'_\eta(r) = -\eta \frac{U''_{k_\eta(r)}(r)}{\sqrt{D(r)}}$, то в некоторой окрестности точки r^0 выполнено $U'_{k_\eta(r)}(r) = 0$ и $U''_{k_\eta(r)}(r) > 0$ (соответственно < 0). Значит, точка r^0 является невырожденной точкой локального

минимума (соответственно максимума) эффективного потенциала $U_{k_\eta(r^0)}(r)$. Поэтому соответствующая окружность $\mathcal{O}_{r^0}^\eta$, состоящая из точек ранга 1, является невырожденной и имеет эллиптический (соответственно гиперболический) тип.

Исследуем теперь второй случай — когда $k'_\eta(r^0) = 0$. Покажем, что в малой окрестности точки возврата r^0 дуги $\gamma_i^\eta(r)$ выполнено $\hat{h}_{\text{ell}}(k) < \hat{h}_{\text{hyp}}(k)$. Из описания дуги $\gamma_i^\eta(r)$ в окрестности точки возврата (см. конец шага 4) следует, что при $\tilde{k} < 0$ эффективный потенциал $U_{k(\tilde{k})}(r)$ имеет две критические точки, близкие к r^0 : невырожденную точку $r_{\min}(\tilde{k})$ локального минимума и невырожденную точку $r_{\max}(\tilde{k})$ локального максимума, причем локальный минимум меньше локального максимума: $U_{k(\tilde{k})}(r_{\min}(\tilde{k})) < U_{k(\tilde{k})}(r_{\max}(\tilde{k}))$. Так как точке (k, r) невырожденного локального минимума (соответственно максимума) эффективного потенциала отвечает эллиптическая (соответственно гиперболическая) окружность $\{(0, k, r)\} \times S^1$ в координатах (p_r, K, r, φ) на $T^*(M \setminus \{N, S\})$, то

$$\hat{h}_{\text{ell}}(k(\tilde{k})) = U_{k(\tilde{k})}(r_{\min}(\tilde{k})) < U_{k(\tilde{k})}(r_{\max}(\tilde{k})) = \hat{h}_{\text{hyp}}(k(\tilde{k})).$$

Осталось показать, что пересечение малой регулярной окрестности точки $(\hat{h}(k^0), k^0)$ в бифуркационном комплексе с множеством $\{h > \hat{h}(k^0), k = k^0\}$ связно. Пусть $(\hat{h}(k^0), k^0) = \gamma_i^\eta(r^0)$. Для любого уровня энергии $h \geq U_k(r^0)$ обозначим через $L_{r^0, h, k}$ компоненту связности окружности $\{(0, k, r^0)\} \times S^1$ в множестве $\{H = h, K = k\}$ (здесь окружность задана в координатах (p_r, K, r, φ) на $T^*(M \setminus \{N, S\})$). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $D_\varepsilon := \pi(L_{r^0, \hat{h}(k^0)+\varepsilon, k^0}) \supseteq \pi(L_{r^0, \hat{h}(k^0), k^0}) =: D_0$, где $\pi : T^*M \rightarrow M$ — проекция. Но подмножества D_ε и $\pi(\{H = \hat{h}(k^0) + \varepsilon, K = k^0\} \setminus L_{r^0, \hat{h}(k^0)+\varepsilon, k^0}) =: D'_\varepsilon$ имеют пустое пересечение. Из условия общности положения следует, что эффективный потенциал $U_{k^0}(r)$ имеет лишь морсовские критические точки и вырожденные критические точки типа рождение-уничтожение. Отсюда следует, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и малая окрестность U подмножества D_0 в M такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено $D_\varepsilon \subset U$ и $D'_\varepsilon \cap U = \emptyset$, а потому $\{H = \hat{h}(k^0) + \varepsilon, K = k^0\} \cap \pi^{-1}(U) = L_{r^0, \hat{h}(k^0)+\varepsilon, k^0}$, а значит связно. \square

4 Топология неособых изоэнергетических многообразий. Несуществование циклов в молекуле. Описание атомов и молекулы Фоменко (грубого инварианта лиувиллевой эквивалентности)

Пусть Q^3 — изоэнергетическое 3-мерное многообразие с уровнем энергии h^0 , т.е. $Q^3 = \{(p, q) \in T^*M \mid H(p, q) = h^0\}$. Назовем его *неособым*, если $dH(p, q) \neq (0, 0, 0, 0)$ для любой точки $(p, q) \in Q^3$.

Замечание 2. Согласно критерию неособости изоэнергетического многообразия Q^3 ([2], [3, §1.7, лемма 19]), Q^3 является неособым тогда и только тогда, когда $h^0 \neq U(0)$, $h^0 \neq U(L)$ и $h^0 \neq U(\check{r}_\ell)$, где $U'(\check{r}_\ell) = 0$ (т.е. \check{r}_ℓ — критическая точка функции $U(r)$). Другими словами, уровень энергии h^0 должен быть отличен от значения энергии во всех положениях равновесия системы, а именно: в обеих точках ранга 0 (описанных в предложении 2.1) и в критических окружностях ранга 1, состоящих из положений равновесия (описанных в предложении 3.1 (В) (d)). Если функции $F(r)$, $U(r)$, $A(r)$, $k_+(r)$, $k_-(r)$ находятся в общем положении, то условие неособости Q^3 эквивалентно следующему: прямая $h = h^0$ не проходит через точки $(U(0), A(0))$ и $(U(L), A(L))$ и не касается дуг бифуркационной диаграммы.

Предложение 4.1. *Топология неособого изоэнергетического многообразия Q^3 определяется (как и в случае без магнитного поля) образом проекции Q^3 на конфигурационное многообразие=сферу (эта проекция может быть несвязна и совпадает с множеством тех точек на поверхности вращения=сфере, где потенциал не превосходит данного уровня энергии):*

(а) *если проекция совпадает со всей сферой (т.е. уровень энергии больше, чем максимум потенциала на сфере), то $Q^3 = \mathbb{R}P^3$,*

(б) *если проекция является несвязным объединением n кусков (колец и дисков) на сфере, то Q^3 состоит из n связных компонент Q_i^3 — прообразов соответствующих кусков сферы (колец и дисков, где число дисков равно 0, 1 или 2, а число колец любое):*

(б1) *если i -й кусок проекции является кольцом (внутри которого потенциал меньше данного уровня энергии, а на границе кольца совпадает), то $Q_i^3 = S^1 \times S^2$,*

(б2) *если i -й кусок проекции является диском (внутри которого потенциал меньше данного уровня энергии, а на границе диска совпадает), то $Q_i^3 = S^3$. \square*

Пусть Q^3 — неособое изоэнергетическое 3-мерное многообразие с уровнем энергии h^0 (см. замечание 2).

Замечание 3. Согласно критерию боттовости периодического интеграла $K|_{Q^3}$ натуральной механической системы на поверхности вращения в терминах эффективного потенциала ([2], [3, §1.7, Лемма 20]), интеграл $K|_{Q^3}$ является функцией Ботта с 1-мерными критическими подмногообразиями тогда и только тогда, когда в любой точке $(0, k^0, r^0, \varphi^0)$, лежащей на критической окружности в Q^3 , имеем $U''_{k^0}(r^0) \neq 0$. Если функции $F(r)$, $U(r)$, $A(r)$, $k_+(r)$, $k_-(r)$ находятся в общем положении, то условие боттовости $K|_{Q^3}$ эквивалентно следующему: прямая $h = h^0$ не проходит через точки возврата бифуркационной диаграммы.

Предположим, что $K|_{Q_i^3}$ — функция Ботта (см. замечание 3). Напомним определение молекулы Фоменко для функции $K|_{Q_i^3}$. Это — грубый инвариант лиувиллевой

эквивалентности интегрируемой системы на Q_i^3 .

Определение 4.1. Пусть W — граф Кронрода-Риба функции $K|_{Q_i^3}$. Он получается из Q_i^3 стягиванием в точку каждой связной компоненты в $Q_i^3 \cap \{K = k^0\}$. ℓ -Атомом функции, заданной на ℓ -мерном компактном многообразии, называется регулярная окрестность связной компоненты критического множества уровня этой функции с точностью до послыйного гомеоморфизма. Молекулой Фоменко функции Ботта $K|_{Q_i^3}$ называется граф W , каждой вершине которого сопоставлен соответствующий 3-атом с указанием соответствующей биекции между множеством граничных торов 3-атома и множеством всех ребер графа W , инцидентных данной вершине.

Хорошо известно, что молекула Фоменко является инвариантом лиувиллевой эквивалентности системы на Q_i^3 . Этот инвариант неполный. Его иногда называют *грубым*, чтобы отличать от полного инварианта лиувиллевой эквивалентности системы на Q_i^3 — *меченой молекулы* Фоменко-Цишанга функции $K|_{Q_i^3}$.

Предложение 4.2. У молекулы Фоменко (т.е. у графа Кронрода-Риба) функции $K|_{Q_i^3}$ нет циклов, где Q_i^3 — любое неособое изознергетическое 3-многообразие.

Доказательство. Если бы у молекулы был цикл, то он бы реализовал нетривиальный элемент 1-когомологий Q^3 (над кольцом \mathbb{Z} или \mathbb{R}). Но 1-когомологии Q^3 нетривиальны только в случае (b1) предложения 4.1. В этом случае на Q_i^3 есть глобальное сечение гамильтонова S^1 -действия: это сечение задается уравнением $\varphi = 0$ (φ — неособая координата на Q_i^3 , так как в случае (b1) полюса сферы не участвуют в Q_i^3). Но дополнительный интеграл $K|_{Q_i^3}$ на Q_i^3 не зависит от φ , т.е. он “опускается” на сферу S^2 , поэтому его граф Кронрода-Риба не имеет циклов (будучи графом Кронрода-Риба функции, заданной на сфере S^2 , а у сферы 1-когомологии тривиальны). Этот граф Кронрода-Риба и есть молекула W . \square

4.1 Описание молекулы Фоменко для неособого изознергетического многообразия

Опишем построение молекулы Фоменко для функции $K|_{Q_i^3}$ в терминах плоской кривой ∂D_i — границы “области возможности движения” D_i . Будем предполагать, что точки $(h^0, A(0))$ и $(h^0, A(L))$ не принадлежат бифуркационной диаграмме (это выполнено для значений h^0 “общего положения”).

Шаг 1: описание областей возможности движения. Рассмотрим подмножество плоскости $\mathbb{R} \times (0, L)$ с координатами k, r , заданное неравенством $U_k(r) \leq h^0$, где $U_k(r)$ — эффективный потенциал. Обозначим его через D и назовем *областью*

возможности движения для уровня энергии h^0 . Неравенство $U_k(r) \leq h^0$ переписывается в виде

$$U(r) \leq h^0, \quad A(r) - \sqrt{2 \frac{h^0 - U(r)}{F(r)}} \leq k \leq A(r) + \sqrt{2 \frac{h^0 - U(r)}{F(r)}}.$$

Поэтому

$$D = \left\{ (k, r) \in \mathbb{R} \times (0, L) \mid U(r) \leq h^0, A(r) - \sqrt{2 \frac{h^0 - U(r)}{F(r)}} \leq k \leq A(r) + \sqrt{2 \frac{h^0 - U(r)}{F(r)}} \right\}.$$

Заметим, что D — это замкнутое подмножество полосы $\mathbb{R} \times (0, L)$ с гладкой (в силу неособости Q^3 и замечания 2) границей

$$\partial D = \{(A(r), r) \mid U(r) = h^0\} \cup \left\{ (k, r) \mid U(r) < h^0, k = A(r) \pm \sqrt{2 \frac{h^0 - U(r)}{F(r)}} \right\}.$$

Пусть D_i — связная компонента D , отвечающая компоненте Q_i^3 .

Лемма 4.1. *Обозначим $\tilde{Q}^3 := Q^3 \cap T^*(M \setminus \{N, S\})$, $\tilde{Q}^2 := \tilde{Q}^3 \cap \{\varphi = 0\}$, $\tilde{Q}^1 := \tilde{Q}^2 \cap \{p_r = 0\}$. Тогда*

- в координатах (p_r, K, r, φ) на $T^*(M \setminus \{N, S\})$ выполнено $\tilde{Q}^1 = \{0\} \times (\partial D) \times \{0\}$, \tilde{Q}^2 — гладкая двумерная ориентируемая поверхность рода 0 в $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$, симметричная относительно плоскости $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \times \{0\}$; S^1 -действие на \tilde{Q}^3 совпадает со сдвигами вдоль координаты φ ;
- $K|_{\tilde{Q}^3} = K|_{\tilde{Q}^2} \circ p$, где $p: \tilde{Q}^3 \rightarrow \tilde{Q}^2$ — проекция, являющаяся S^1 -расслоением;
- критические точки функции $K|_{\tilde{Q}^2}$ содержатся в “средней линии” \tilde{Q}^1 (состоящей из неподвижных точек отражения поверхности относительно плоскости симметрии) и совпадают с критическими точками функции $K|_{\tilde{Q}^1}$;
- боттовость функции $K|_{\tilde{Q}^3}$ равносильна морсовости функции $K|_{\tilde{Q}^2}$ на поверхности \tilde{Q}^2 , а также морсовости функции $K|_{\tilde{Q}^1}$ на окружности \tilde{Q}^1 . \square

Обозначим $\tilde{Q}_i^\ell := \tilde{Q}^\ell \cap Q_i^3$, т.е. это — связная компонента \tilde{Q}^ℓ , $\ell = 1, 2, 3$, отвечающая компоненте Q_i^3 .

Шаг 2: описание графа W Кронрода-Риба для функции $K|_{Q_i^3}$.

Заметим, что функция Морса $K|_{\tilde{Q}_i^2}$ является функцией высоты на гладкой (необязательно компактной) поверхности $\tilde{Q}_i^2 \subset \mathbb{R}^3(p_r, k, r)$. Пусть W — граф Кронрода-Риба функции $K|_{\tilde{Q}_i^2}$. Его можно получить из D_i стягиванием в точку каждой

связной компоненты в $D_i \cap \{k = k^0\}$, а потому он имеет вложение в плоскость $j : W \rightarrow \mathbb{R}^2(k, r)$ такое, что $K = k \circ j \circ p_W$ и для любых точек $a, b \in W$ со свойством $k \circ j(a) = k \circ j(b)$ и $r \circ j(a) < r \circ j(b)$ выполнено $r(p_W^{-1}(a)) < r(p_W^{-1}(b))$, где $p_W : \tilde{Q}_i^2 \rightarrow W$ — проекция.

Рассмотрим более подробно 3 случая, определяемые типом связной компоненты Q_i^3 многообразия Q^3 из предложения 4.1.

Случай 1: Q_i^3 — связная компонента Q^3 типа (b1). Тогда функция $K|_{\tilde{Q}_i^2}$ задана на компактной поверхности $\tilde{Q}_i^2 \subset \mathbb{R}^3(p_r, k, r)$. При этом связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}_i^2 \cap \{k = k^0\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с отрезками (возможно вырождающимися в точку) вида $\{0\} \times \{k^0\} \times I_{k^0} \times \{0\}$, на которые распадается подмножество $D_i \cap \{k = k^0\}$, где $I_{k^0} \subset (0, L)$ и каждая компонента линии уровня имеет непустое пересечение с соответствующим отрезком. Последнее условие однозначно определяет указанное соответствие.

Случай 2: Q_i^3 — связная компонента Q^3 типа (b2). Пусть для определенности $N \in \pi(Q^3)$. Функция $K|_{\tilde{Q}_i^2}$ задана на некомпактной поверхности $\tilde{Q}_i^2 \subset \mathbb{R}^3(p_r, k, r)$. При этом связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}_i^2 \cap \{k = k^0\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с промежутками вида $\{0\} \times \{k^0\} \times I_{k^0} \times \{0\}$, на которые распадается подмножество $D_i \cap \{k = k^0\}$, где $I_{k^0} \subset (0, L)$ — либо отрезок $[r_0, r_1]$, либо полуинтервал $(0, r_1]$.

Все связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}_i^2 \cap \{k = k^0\}$ являются компактными кроме одной компоненты (гомеоморфной \mathbb{R}) — отвечающей полуинтервалу $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, r_1] \times \{0\}$ из подмножества $D_i \cap \{k = A(0)\}$.

Случай 3: Q^3 имеет тип (a). В частности, Q^3 и D связны, и индекс i можно опустить. Пусть W — граф Кронрода-Риба функции $K|_{\tilde{Q}^2}$. Его построение полностью аналогично построению в случае 2. При этом все кроме одной (см. ниже) связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}^2 \cap \{k = k^0\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с промежутками $\{0\} \times \{k^0\} \times I_{k^0} \times \{0\}$, на которые распадается подмножество $D \cap \{k = k^0\}$, где промежуток $I_{k^0} \subset (0, L)$ — это либо отрезок $[r_0, r_1]$, либо полуинтервал $(0, r_1]$ или $[r_0, 1)$, либо интервал $(0, L)$. При этом интервал $(0, L)$ присутствует только в том случае, когда $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, L) \times \{0\} \subset D$ (откуда $A(0) = A(L)$). В последнем случае линия уровня $\tilde{Q}^2 \cap \{k = k^0\}$ состоит из двух связных компонент, и указанное соответствие сопоставляет интервал $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, L) \times \{0\}$ обеим этим компонентам. На множествах остальных компонент линий уровня и остальных промежутков указанное соответствие взаимно-однозначно.

Все связные компоненты линий уровня $\tilde{Q}^2 \cap \{k = k^0\}$ являются компактными — кроме двух компонент (гомеоморфных \mathbb{R}), отвечающих одному или двум промежуткам следующего вида: либо двум полуинтервалам $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, r_1] \times \{0\}$

и $\{0\} \times \{A(L)\} \times [r_0, L) \times \{0\}$, либо одному интервалу $\{0\} \times \{A(0)\} \times (0, L) \times \{0\}$.

Шаг 3: описание 3-атомов для функции $K|_{Q_i^3}$. 3-Атомы функции $K|_{Q_i^3}$ получаются из 2-атомов функции $K|_{\tilde{Q}_i^2}$ взятием прямого произведения на окружность. Опишем 2-атомы функции $K|_{\tilde{Q}_i^2}$.

Согласно шагу 2, 2-атомы находятся во взаимно-однозначном соответствии с отрезками $\{0\} \times \{k^0\} \times I_{k^0} \times \{0\}$, где $I_{k^0} = [r_0, r_1]$, являющимися связными компонентами подмножеств $D_i \cap \{k = k^0\}$, содержащими точку касания прямой $\{0\} \times \{k^0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ и кривой $\tilde{Q}_i^1 = \{0\} \times (\partial D_i) \times \{0\}$. Действительно: I_{k^0} не является ни полуинтервалом, ни интервалом, так как $k^0 \neq A(0)$ и $k^0 \neq A(L)$ в силу предположения (см. начало §4.1).

Обозначим через $r_1^* < \dots < r_n^*$ содержащиеся в интервале (r_0, r_1) r -координаты точек касания прямой $\{0\} \times \{k^0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ и кривой \tilde{Q}_i^1 , а через $\eta_\ell \in \{0, 1\}$ индекс Морса критической точки $v_\ell = (0, k^0, r_\ell^*, 0)$ функции Морса $K|_{\tilde{Q}_i^1}$, $1 \leq \ell \leq n$.

Лемма 4.2. *Седловой 2-атом морсовской функции высоты $K|_{\tilde{Q}_i^2}$, отвечающий отрезку $\{0\} \times \{k^0\} \times [r_0, r_1] \times \{0\}$, обладает следующими свойствами:*

- критический уровень 2-атома — это связная компонента линии уровня $\tilde{Q}_i^2 \cap \{k = k^0\}$, отвечающая отрезку $\{0\} \times \{k^0\} \times [r_0, r_1] \times \{0\}$. Это — граф в плоскости $\mathbb{R} \times \{k^0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ вида $\diamond \bullet \diamond \bullet \dots \bullet \diamond \bullet \diamond$, симметричный относительно указанного отрезка, с вершинами v_1, \dots, v_n на этом отрезке (упорядоченными по возрастанию r);
- вектор единичной внешней нормали к поверхности \tilde{Q}_i^2 (соответственно к кривой $\tilde{Q}_i^1 = \{0\} \times (\partial D_i) \times \{0\}$) в критической точке v_ℓ равен $(1 - 2\eta_\ell) \frac{\partial}{\partial k}$, $1 \leq \ell \leq n$;
- каждая окружность $\{0\} \times \{k^0\} \times \{r_\ell^*\} \times S^1$ состоит из относительных положений равновесия системы, и на ней $(1 - 2\eta_\ell) \frac{\partial H}{\partial K} > 0$, т.е. ориентация этой окружности фазовым потоком системы совпадает с ориентацией, задаваемой гамильтоновым S^1 -действием, порожденным функцией K , в случае $\eta_\ell = 0$ и противоположна ей в случае $\eta_\ell = 1$, $1 \leq \ell \leq n$. \square

Ориентированный 2-атом с указанными свойствами однозначно определяется последовательностью индексов Морса $(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \{0, 1\}^n$. Обозначим этот 2-атом через $V_n^{\eta_1, \dots, \eta_n}$.

Шаг 4: описание молекулы Фоменко для функции $K|_{Q_i^3}$. Молекула функции $K|_{Q_i^3}$ получается, если в каждую вершину графа W , описанного на шаге 2, поместить соответствующий 3-атом, описанный на шаге 3. \square

Замечание 4. (а) Если магнитное поле достаточно мало или уровень энергии h^0 достаточно большой, то в молекуле Фоменко боттовской функции $K|_{Q^3}$ возникают только атомы $V_n^{0,\dots,0}$ и $V_n^{1,\dots,1}$ (отличающиеся друг от друга знаком функции), как и в случае нулевого магнитного поля [2, 3].

(б) В молекуле Фоменко боттовской функции $H|_{\{K=k^0\}}$ возникают только атомы $V_n^{0,\dots,0}$ и $V_n^{1,\dots,1}$, как и в случае нулевого магнитного поля [2, 3].

(с) Предположим, что молекула Фоменко функции $K|_{Q_{h^0}^3}$ содержит 3-атом $V_n = V_n^{\eta_1,\dots,\eta_n}$ сложности $n \geq 2$. Каждая особая окружность этого 3-атома является гиперболической окружностью ранга 1 и включена в 1-параметрическое семейство таких окружностей. Образ каждого такого семейства при отображении момента является дугой бифуркационной диаграммы. Эти n дуг пересекаются в одной точке — образе особого слоя 3-атома при отображении момента, причем котангенс угла наклона каждой дуги в этой точке вычисляется по формулам из предложения 3.1 (В) (с) и (7). Если хотя бы у двух дуг наклоны различны (что выполнено в случае “общего положения”), то при варьировании уровня энергии 3-атом V_n на $Q_{h^0}^3$ “расщепляется” на несколько 3-атомов V_{n_1}, \dots, V_{n_k} на Q_h^3 общей сложности $n_1 + \dots + n_k = n$. В этом случае назовем особый слой 3-атома V_n *расщепляющейся гиперболической особенностью ранга 1*. В терминологии [10], [11, Definition 3.3] такому 3-атому V_n отвечает *топологически неустойчивая* бифуркация слоений Лиувилля на изоэнергетическом многообразии Q_h^3 (это значит, что для любой 4-мерной окрестности U особого слоя 3-атома, слоения Лиувилля на $Q_h^3 \cap U$ и $Q_{h^0}^3 \cap U$ имеют разную топологию при $h \rightarrow h^0$).

5 Вычисление некоторых меток Фоменко-Цишанга в молекуле Фоменко

Изучим топологию слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии Q^3 , когда функция $K|_{Q^3}$ является боттовской (см. замечания 2 и 3).

Согласно лемме 4.2, любой седловой атом функции $K|_{Q^3}$ имеет специальный вид $V_n^{\eta_1,\dots,\eta_n}$, причем ориентации его критических окружностей фазовым потоком системы согласованы между собой только в случае $\eta_1 = \dots = \eta_n$. Но в теореме Фоменко-Цишанга [11, теорема 4.1], описывающей топологию слоения Лиувилля на Q^3 , предполагается, что все критические окружности ориентированы фазовым потоком системы и что эти ориентации согласованы на каждом седловом атоме (т.е. порождены некоторым гамильтоновым S^1 -действием в 4-мерной окрестности атома, сохраняющим функции H и K , см. [11, §3.5 перед определением 3.4, §3.3 перед предложением 3.8]). Значит, если хотя бы один седловой атом функции $K|_{Q^3}$ отличен от атомов $V_n^{0,\dots,0}$ и $V_n^{1,\dots,1}$, то теорема Фоменко-Цишанга не применима. Мы

обойдем эту трудность так. Зададим ориентации всех критических окружностей функции $K|_{Q^3}$ с помощью гамильтонова S^1 -действия, порожденного функцией K (а не фазовым потоком системы, ср. [11, §3.5 перед определением 3.4]). Тогда ориентации критических окружностей станут согласованы на каждом атоме, и поэтому можно описать топологию слоения Лиувилля на Q^3 в терминах соответствующего инварианта Фоменко-Цишанга [11, теорема 4.1] — меченой молекулы функции $K|_{Q^3}$ с указанными ориентациями критических окружностей.

Предложение 5.1. *Пусть Q^3 — неособое изоэнергетическое многообразие (см. замечание 2). Тогда гамильтоново S^1 -действие, порожденное дополнительным первым интегралом K , является свободным на Q^3 , а потому определяет структуру локально-тривиального S^1 -расслоения на Q^3 . Это S^1 -расслоение согласовано со слоением Лиувилля на Q^3 . Если функция $K|_{Q^3}$ боттовская (см. замечание 3), то метки Фоменко-Цишанга на ребрах с концами в седловых атомах соответствующей молекулы Фоменко имеют следующий вид: все метки r равны бесконечности, а все метки ε равны $+1$.*

Доказательство. Рассмотрим гамильтоново S^1 -действие на T^*M , порожденное дополнительным первым интегралом K . Оно отвечает вращению поверхности вращения вокруг оси симметрии. Так как у гамильтонова S^1 -действия на T^*M неподвижных точек ровно две, а именно точки $(p, q) = (0, N)$ и $(p, q) = (0, S)$, причем они являются точками ранга 0 отображения момента (см. доказательство предложения 2.1, шаг 1), то на любом неособом изоэнергетическом многообразии Q^3 это S^1 -действие свободно.

На каждом граничном торе каждого седлового атома определим цикл λ — траекторию указанного S^1 -действия. Дополним его до базиса группы 1-мерных гомологий тора любым циклом μ . Рассмотрим любое ребро молекулы, концы которого являются седловыми атомами. Тогда в матрице склейки, отвечающей этому ребру, первая строка равна $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, откуда находим все метки: $r = \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha = +1$. \square

Список литературы

- [1] А. Бессе, Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
- [2] Е.О. Кантонистова, Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле. Матем. сб., **207**:3 (2016), 47–92.
- [3] Е.О. Кантонистова, Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на многообразиях вращения в потенциальном поле. Дисс.

на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. МГУ, 2016. <http://dfgm.math.msu.su/files/0diss/diss-kantonistova.pdf>

- [4] I. Kozlov, A. Oshemkov, Integrable systems with linear periodic integral for the Lie algebra $e(3)$, Lobachevskii J. Math. **38**:6 (2017), 1014–1026.
- [5] J.-C. van der Meer, The Hamiltonian Hopf bifurcation, volume 1160 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [6] K. Efstathiou and A. Giacobbe, The topology associated with cusp singular points. Nonlinearity, **25** (2012), 3409–3422.
- [7] A.T. Fomenko, Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl., **22**:4 (1988), 286–296.
- [8] A. Bolsinov, L. Guglielmi, E. Kudryavtseva, Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems. Phil. Trans. R. Soc. A **376** (2018), 20170424.
- [9] E.A. Kudryavtseva, E.L. Lakshmanov, Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions, Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, eds. A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, A.A. Oshemkov, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006, 173–214. Arxiv:1212.4302.
- [10] Bolsinov A.V., Matveev S.V., and Fomenko A.T., Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity. Uspekhi Mat. Nauk, **45**:2 (1990), 49–77.
- [11] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. A.V. Bolsinov, A.T. Fomenko, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification. Boca Raton, London, N.Y., Washington, D.C. Chapman & Hall/CRC, 2004.

Е.А. Кудрявцева (E.A. Kudryavtseva)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

E-mail: eakudr@mech.math.msu.su

А.А. Ошемков (A.A. Oshemkov)

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

E-mail: a@oshemkov.ru